高額所得モデルのベキ乗指数と競争ルールについて

山本啓三[†]　宮島佐介[††]　山本洋[†††]
大月俊也[†††]　藤原明広[†††]

我々はすでに高額所得のランキングがベキ乗を示すモデルを提案し，実際の高額所得分布をよく表現していることをシミュレーションにより確かめている．本報告ではそのモデルの拡張として，各競争における投資額に異なる競争ルールを導入しシミュレーションすることにより，所得の分布に異なるベキ乗指数を示す分布が得られた．また，マスタ方程式を解くことにより，上記ルールのベキ乗指数を解析的に導出した．

Different Competition Rules Effect on the Power-law Exponents of High-income Distribution

Keizo Yamamoto,[†] Sasuke Miyazima,[††] Hiroshi Yamamoto,[†††]
Toshiya Ohtsuki[†††] and Akihiro Fujihara[†††]

A model for power-law problem in high-income distribution is proposed by changing competition rules, such that allocate different amounts of resources to winners and losers in economic competitions from our original model, which induces different power-law exponents. We have obtained the above power-law exponents analytically by solving the master equation.

1. はじめに

所得の分布は 1900 年ごろから研究され，モードを中心に広範囲の所得領域で対数正規分布に従うことが知られており[1)]，高額所得領域ではパレート分布（ベキ乗分布）になるといわれている[2)～7)]．我々は以前に高額所得のランキングがベキ乗を示す簡単なモデルを提案し，現実の所得分布をよく表現していることをシミュレーションと数値計算により確かめた[8),9)]．これまでに得られている所得の累積分布のベキ乗指数 α を**表 1** に示し，我々が以前に行った所得と順位のシミュレーション結果と実所得の比較を**図 1** に示す．累積分布と順位の関係より，これらのベキ乗指数はお互いに逆数の関係になっている．

実際の所得分布は各年度により，所得額そのものと同時に累積分布のベキ乗指数も少し変化することが知られている．この変化が経済現象とどのように関連しているかについては，まだよく知られておらず，経済活動（景気等）が上昇すると傾き（ベキ乗指数の絶対値）が増加することは図 1 において認められる．このベキ乗指数を自在に変化させるモデルを一挙に構築することは現段階では困難であるが，他の値のベキ乗指数を示すメカニズムが提案できれば，次のステップとしてそれにつながるモデルの構築が可能と考える．我々が以前に提案したモデルは自己組織化臨界現象により，得られる分布は 1 つの固有のベキ乗指数を有するベキ乗分布を示した．

今回はそのモデルの改良として，競争により投資額を取り合う箇所に着目して，どのような競争ルールを導入すると，異なるベキ乗指数を示す分布が得られるかを検討した．その競争ルールとベキ乗指数について報告する．また，モデルが簡単であるので，そのマスタ方程式が構成でき，generating function により解析的に定常解が求められた．所得が大きいところでの漸近解がベキ乗則を示し，実際の所得分布やシミュレーションの結果と一致するベキ乗指数を得ることができた．以下，2 章には 3 種類の異なる競争ルールを提案し，3 章ではそれらのシミュレーションによる定常分布を示す．また，4 章ではマスタ方程式による解析解を計算し，実際の所得分布やシミュレーションと比較

† 摂南大学
Setsunan University
†† 中部大学
Chubu University
††† 横浜市立大学
Yokohama City University

表 1 これまでに得られている所得に対する累積所得のベキ乗指数
Table 1 Some earlier data of the power-law exponent.

西暦	氏名	α	所得データ
1897	Preto	1.5	ヨーロッパの諸都市
1953	Champernone	1.7	U.K. 1951/1952
1959	Lydall	1.5	U.K. 1954/1955
1983	Montroll, 他	1.63	USA 1935/1936
2000	青山，他	2.05	日本 1998
2001	山本，他	2.18	日本 1997
2002	山本，他	1.56	日本と米国の CEO1997

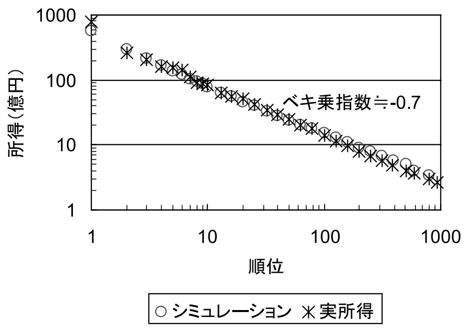


図 1 実際の所得とシミュレーション（構成員数=10,000）との比較
Fig. 1 The comparison of the real data (1998) and the simulation result (N=10,000).

している．最後に 5 章には得られた結果のまとめを述べる．

2. 競争ルール

現在，世界中の多くの高額所得者の主たる収入は給与所得ではなく，投資（株式，先物等）のリスク資産が主な収入源である．株式，先物（金融，商品）等への投資は価格変動により予測が適中した者は多額の収益を獲得し，予想が外れた者は逆に大きな損益を被ることになる．これら以外にも多くの要因が複雑に絡み合って高額所得分布が形成されていると考えられているが，ここではなるべくシンプルなモデルを構築したく下記の競争ルールを提案する．

システムに共通な条件

C1. システムは同等な構成員で構成され，構成員の人数は N 人と固定する．

C2. システムからランダムに選出された 2 人の構成員が競争している企業等に全所有額を投資し，競争をする．

C3. システムが保有する全投資額 S は固定され，各構成員は少なくとも 1 単位を保有する．

ルール 1：

競争に勝った構成員が両方の投資額を獲得し，負けた構成員は全額を失う．構成員数を一定に保つために，負けた構成員にシステム外から 1 単位与える．これは 1 単位を有する新たな構成員が負けた構成員と交代すると考えてもよい．また，システム内の全投資額を一定にするためにランダムに，2 単位以上を有する構成員から 1 単位を取り去る．ただし，全投資額 S は $2N$ とする．このルールは全投資額を一定にしているので，経済的安定期に対応する場合と考えている．

ルール 2：

競争に勝った構成員が両方の投資額を獲得し，負けた構成員は全額を失う．構成員数を一定に保つために，負けた構成員にシステム外から 1 単位与えるところまではルール 1 と同じであるが，構成員から 1 単位取り去ることはしない．すなわち，1 競争ごとに全投資額は 1 単位ずつ増加することになる．このルールは経済活動が上昇局面にあり，社会全体の総資産が増加していく場合に対応すると考えている．システムに共通な条件 C1，C3 を少し緩和して，システム内での構成員数と全投資額の関係においては $N^2 \leq S < (N+1)^2$ をつねに保ちながらシミュレーションをする．

ルール 3：

2 人の構成員の投資額が異なる場合は両者の少ない方の投資額を取り合う競争をする．全投資額の保存方法はルール 1 と同様である．ただし，全投資額 S は $7N$ とする．シミュレーション中は全投資額は一定であるが，システム内の全投資額はルール 1 の $2N$ から $7N$ に増加しており，何らかの構造改革等により，競争条件が変更されて社会全体の資産が増加し新たな経済的安定期に対応する場合と考えている．

各ルールの注釈

ルール 2 では，全投資額=S と構成員数=N で $S=N^2$ の関係を初期条件として，各競争ごとに全投資額が 1 単位ずつ増加し，S が $(N+1)^2$ を超えるとき構成員数を 1 人増加させて N+1 にする．その間システム内では $2N$+1 回の競争が生じており，これはシステム内の競争回数に比べてゆっくりとシステムサイズを増加させていることになり，つねに定常状態を実現しているようにシミュレーションしている．

ルール 3 については，ルール 1 の競争では投資額に大きな差がある場合，少ない投資額の者が勝った場合には自分の投資額に比べて多額の収益額を得，多い投資額の者が勝った場合には自分の投資額に比べて少額の収益額を得ることになる．これは，[多い投資額の者にとっては不利である] という理由で，取り合う額は両者の少ない方の額としており，ルール 1 に比べて高額所得者に有利なルール改正になっている．

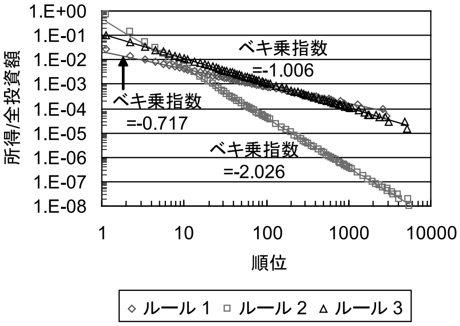


図 2　異なるルールによる所得分布のベキ乗指数の比較（構成員数 =10,000）
Fig. 2　Three log-log plots of income against ranking (N=10,000).

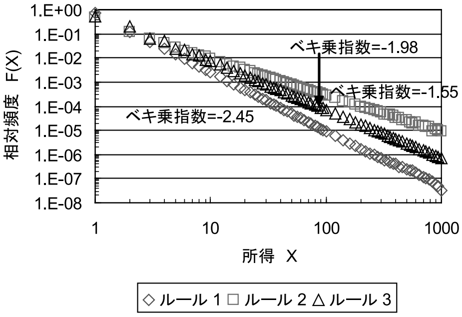


図 3　異なるルールによる頻度分布のベキ乗指数の比較（構成員数 =10,000）
Fig. 3　Three log-log plots of the frequency F(X) against income X (N=10,000).

3. 定常分布のシミュレーション結果

システム内からランダムに 2 人を選択し，そのうちの任意の 1 人を勝者として両方の投資額を獲得させ，敗者にはシステム外から 1 単位を与える．全投資額を一定にするために 2 単位以上を有する任意の構成員から 1 単位を取り除く．この一連のプロセスを 1 モンテカルロステップとして，任意の初期分布から始めて N（構成員数）モンテカルロステップで定常分布に達し，1 サンプルでも綺麗なベキ乗分布を示すが，乱数列の違いにより，ベキ乗指数が少し変動するので，10000 サンプルの平均をとっている．シミュレーション方法の詳細については文献 8）を参照．ルール 1，2，3 によるシステムサイズ N=10000 のシミュレーション結果を**図 2**，**図 3** に示す．

図 2 には（所得/全投資額）と順位の関係を両対数グラフで表示している．ルール 1，ルール 2 とルール 3 の順位に対する所得のベキ乗指数はそれぞれ，−0.717，−2.026，−1.006 となる．また，図 3 には所得 X に対する相対頻度 F(X) を両対数グラフで表示し，所得に対する頻度のベキ乗指数はルールが想定する経済の予想される帰結どおり，ルール 2（経済上昇）では −1.55，ルール 3（増加した安定期）では −1.98，ルール 1（安定期）では −2.45 の順になっている．それらをまとめて，**表 2** には各ルールによる順位に対する所得のベキ乗指数を，**表 3** には所得に対する所得の頻度分布のベキ乗指数を示す．表 3 のルール 1 の所得の頻度分布（ベキ乗指数：−2.45）を所得 X で積分して累積分布に変換するとベキ乗指数は −1.45 となり，ベキ乗指数の絶対値は $\alpha = 1.45$ となり，これまで得られている実測結果（表 1）のベキ乗指数 α（日本のみの所得データ 2000 青山，2001 山本を除いて）とよく対応している．また，ルール 2 のベキ乗指数は高安ら[10] が企業のサイズ分布において提案したモデルとベキ乗指数が対応している．そして，ルール 3 の結果はジップの法則[11] として知られているベキ乗指数と対応する結果を得ているが，メカニズム的にどの部分が対応しているかは現在検討中である．

表 2　順位に対する所得のベキ乗指数
Table 2　The power-law exponent of income against ranking.

	ベキ乗指数
ルール 1	−0.717
ルール 2	−2.026
ルール 3	−1.006

表 3　所得に対する頻度分布のベキ乗指数
Table 3　The power-law exponent of the frequency against the income.

	ベキ乗指数
ルール 1	−2.45
ルール 2	−1.55
ルール 3	−1.98

4. マスタ方程式による定常解

4.1 ルール 1 のマスタ方程式

任意に選んだ 1 人の構成員が X 単位を有する確率を P(X) とすると，詳細平衡を要請するすることにより以下のような定常マスタ方程式を導くことができる．

$$(1-P(1))(1-P(1)) + \frac{P(2)}{1-P(1)} = (P(1))^2 \quad (X=1) \tag{1}$$

$$\sum_{i+j=X} P(i)P(j) + \frac{P(X+1)}{1-P(1)} = 2\,P(X) + \frac{P(X)}{1-P(X)} \quad (X \geq 2) \tag{2}$$

上式の左辺の各項はその状態へ流入する確率で，右辺

の各項はその状態から流出する確率である．式 (1) は確率 P(1) の増減を示し，左辺の第 1 項はルール 1 の競争の結果，1 単位有する状態以外の状態から選ばれた 2 人の構成員が競争し，負けた構成員は全額を失うが，全構成員数を一定に保つために負けた構成員にシステム外から 1 単位与えることから生ずる P(1) へ流入する確率，第 2 項はシステム内の全投資額を一定に保つために，2 単位有する構成員から 1 単位取り去ることから生ずる P(1) へ流入する確率である．右辺は 1 単位有する 2 人が競争し，勝者が 2 単位有することから生ずる P(1) から P(2) へ流出する確率である．また，式 (2) は確率 P(X)($X \geq 2$) の増減を示している．左辺の第 1 項はルール 1 の競争の結果，2 人の構成員の投資額の和が X 単位となる状態間の競争の結果，勝者が X 単位を得ることから生ずる P(X) へ流入する確率で，第 2 項はシステム内の全投資額を一定に保つために，X+1 単位有する構成員から 1 単位取り去ることから生ずる P(X+1) から P(X) への確率である．右辺の第 1 項は競争する 2 人のうち，どちらか 1 人が X 単位を有することから生ずる P(X) から流出する確率で，第 2 項は X 単位有する構成員から 1 単位取り去ることから生ずる P(X) から P(X−1) への確率である．ここで，generating function G(z) を次式で定義し，

$$G(z) = \sum_{X=1}^{\infty} P(X)\, z^X \quad |z| \leq 1 \tag{3}$$

式 (1) の両辺に z を掛け，式 (2) の両辺に z^X を掛けてそれぞれ辺々の和をとり，式 (3) を用いると次の generating function G(z) を得る．

$$(1 - P(1))G(z)^2 + (z^{-1} - 3 + 2\,P(1))G(z) - P(1) + z = 0 \tag{4}$$

この式にはまだ未定の P(1) を含んでいるので，それを決定しなければ P(X) を求めることができない．そこで，上式を z で 2 回微分して，z=1 と置くと，1 次モーメント G'(1) の 2 次方程式を得る．

$$(1 - P(1))G'(1)^2 - G'(1) + 1 = 0 \tag{5}$$

1 次モーメント G'(1) は定義より平均値を表すので，上式は重根を持たなければならない．それより，P(1) と G'(1) は以下のように求められる．

$$P(1) = \frac{3}{4} \quad , \quad G'(1) = < X > = 2 \tag{6}$$

平均値 $< X > = 2$ になるということは第 2 章の競争ルール 1 において，シミュレーションをするときに全投資額 S=2N と定めたことの根拠を示している．P(1) の値を式 (4) に代入すると，G(z) の解は次式で得られる．

$$G(z) = 3 - 2\,z^{-1} + 2\,z^{-1}(1-z)^{\frac{3}{2}} \tag{7}$$

関数 G(z) の Taylor 展開を用いて，z のベキ展開係数として確率 P(X) を次式のように求めることができる．

$$P(X) = 6\frac{(2X-2)!}{(X+1)!\,(X-1)!\,2^{2X}} \tag{8}$$

Stirling の公式を用いて，階乗項をベキ乗に近似すると，確率 P(X) は次式のように X の −5/2 乗のベキ乗関数に漸近する．

$$P(X) \,\propto\, X^{-\frac{5}{2}} \tag{9}$$

したがって，P(X) の累積分布関数は次式となる．

$$P(>X) \,\propto\, X^{-\frac{3}{2}} \tag{10}$$

式 (10) のベキ乗指数は表 1 の実測データと式 (9) のベキ乗指数は表 3 のルール 1 の結果とよく一致している．

4.2 ルール 2 のマスタ方程式

ルール 1 と同様に次式のマスタ方程式が導かれる．

$$(1 - P(1)(1 - P(1) = (P(1))^2 \ (X = 1) \tag{11}$$

$$\sum_{i+j=X} P(i)P(j) = 2\,P(X) \quad (X \geq 2) \tag{12}$$

また，generating function G(z) は次式となり，

$$G(z)^2 - 2\,G(z) + z = 0 \tag{13}$$

したがって，解 G(z) は次式となる．

$$G(z) = 1 - (1-z)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

上式を無限級数展開し，Stirling の公式を用いると，確率 P(X) は次式のように X の −3/2 乗のベキ乗関数に漸近する．

$$P(X) \,\propto\, X^{-\frac{3}{2}} \tag{15}$$

このベキ乗指数は表 3 のルール 2 の結果をよく表している．なお，ルール 3 についてのマスタ方程式は現在検討中である．

5. おわりに

本報告では高額所得モデルに異なる競争ルールを導入して，シミュレーションでは表 3 に示すように所得の頻度分布におけるベキ乗指数は，ルール 1 では −2.45，ルール 2 では −1.55，ルール 3 では −1.98 が得られている．したがって，所得の累積分布はその頻度分布を所得で積分することにより得られることより，ルール 1 では −1.45，ルール 2 では −0.55，ルール 3

では −0.98 となり，ルール 1 のベキ乗指数はこれまで報告されている実測結果の表 1（日本のみの所得データ 2000 青山，2001 山本を除いて）のベキ乗指数 α をよく表している．また，ルール 2 のベキ乗指数は高安ら[10] の結果に対応し，ルール 3 の結果はジップの法則[11] として知られているベキ乗指数に対応している．

最後に，我々の提案するモデルと経済変動（景気等）から生ずると考えられているベキ乗指数の変化について述べる．米国の CEO の高額所得データから（ホームページから比較的簡単に入手可能），米国経済の景気等が変動すると，表 2 に対応した順位に対する所得のベキ乗指数は変化している．景気が上昇している 1995 年度（ベキ乗指数は −0.73）から 2000 年度（ベキ乗指数は −1.03）までベキ乗指数は徐々に減少し，景気に少しか陰りが見え始める 2000 年度を境に増加傾向を示している．我々のモデルを用いれば，まずルール 1 を用いて順位のベキ乗指数が約 −0.7 を示す状態を実現し，ルール 2 の投資額を増加させるシステムを適用して，システム内の総投資額を増加させ，総投資額が構成員の 7 倍になったところで，ルール 3 に切り替える．

これにより，ベキ乗指数が −0.7 から −1.0 への変化のシナリオを構成することは可能であり，徐々にベキ乗指数が変化するようにシミュレーションできる．しかし，その変化の途中では特に順位が上位の部分の分布は綺麗な形のベキ乗則を示さず，現実のように毎年のベキ乗指数の変化を定常分布で得ることは現在できていない．また，同一システム内にルール 1，ルール 2，およびルール 3 に従う構成員が存在するような場合については現在検討中である．当然我々はこのモデルで高額所得分布の性質や，景気変動をすべて説明できるとは考えておらず，現実はもっと複雑で多くの要因が相互に作用していると考えている．我々の提案したモデルはその一部分の性質を示しているにすぎないが，非常に簡単なルールでいくつかのベキ乗指数を有するベキ乗則を示すモデルを構築できたことは，現実の複雑な現象にも簡単なルールの組合せで有用なモデルを構成する可能性を示唆しており，この分野への 1 つの寄与になると考える．

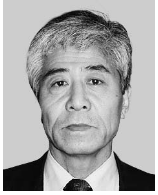
参 考 文 献

1) Montroll, E.W. and Shlesinger, M.F.: Maximum Entropy formalism, Fractals, Scaling Phenomena, and $1/f$ Noise: A Tale of Tails, *J. Stat. Phys.*, Vol.32, No.2, pp.209–230 (1983).
2) Parto, V.: *Le Cours d'Economie Politique*, Macmillan, London (1897).
3) Champernowne, D.G.: A Model of Income Distribution, *Economic Journal*, Vol.63, pp.318–351(1953).
4) Lydall, H.F.: The Distribution of Employment Income, *Econometrica*, Vol.27, pp.110–115 (1959).
5) Mandelbrot, B.B.: The Pareto-Levy Law and the Distribution of Income, *International Economic Review*,Vol.1, No.2, pp.79–106 (1960).
6) Aoyama, H., Souma, W., Nagahara, Y., Okazaki, M.P., Takayasu, H., and Takayasu, M.: Pareto's law for income of individuals snd debt of bankrupt companies, *Fractals*, Vol.8, No.3, pp.293–300 (2000).
7) 山本啓三，宮島佐介：日本の高額納税額のベキ乗則について，理論と方法，Vol.16, No.1, pp.133–138 (2001).
8) Yamamoto, K., Miyazima, S., Koshal, R.K., Koshal, M. and Yamada, Y.: A model for distribution of high-tax payers, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.20, No.2, pp.148–154 (2003).
9) Yamamoto, K. and Miyazima, S.: Power-law behavior in social and economical phenomena, *Physica A*, Vol.344, pp.757–763 (2004).
10) Takayasu, H. and Okuyama, K.: Country dependence on company size distribution and numerical model based on competition and cooperation, *Fractals*, Vol.6, No.1, pp.67–79 (1998).
11) Zipf, G.K.: *Selected Studies of the Principle of Relative Frequency in Language*, Harvard University Press, Cambridge, MA (1932).

(平成 18 年 1 月 15 日受付)
(平成 18 年 11 月 17 日再受付)
(平成 18 年 11 月 29 日再々受付)
(平成 18 年 12 月 8 日採録)

山本 啓三

昭和 24 年生．昭和 52 年大阪府立大学大学院工学研究科電子工学専攻博士課程修了．昭和 53 年摂南大学工学部講師．昭和 61 年摂南大学工学部助教授．高額所得モデル，パーコレション問題等の研究に従事．工学博士（大阪府立大学）．日本応用数理学会，日本物理学会，日本 OR 学会，数理社会学会，日本経営工学会各会員．



宮島 佐介

昭和17年生．昭和43年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士課程中退．昭和43年大阪大学工学部助手．昭和57年中部大学工学部助教授．昭和61年中部大学工学部教授．高額所得モデル，パーコレション問題等の研究に従事．日本物理学会会員．工学博士（大阪大学）．

山本 洋

昭和47年生．平成14年横浜市立大学大学院総合理学研究科博士課程満期退学．平成15年横浜市立大学物理学博士号取得．平成15年より横浜市立大学ほか非常勤講師．確率過程，経済物理学の研究に従事．理学博士（横浜市立大学）．日本物理学会，日本応用数理学会各会員．

大月 俊也

昭和27年生．昭和55年東京大学大学院工学研究科物理工学専攻博士課程修了．昭和58年Boston大学Research Associate．昭和63年福井大学工学部助教授．平成8年横浜市立大学理学部教授．非平衡統計力学の研究に従事．工学博士（東京大学）．日本物理学会，粉体工学会各会員．

藤原 明広

昭和53年生．平成18年横浜市立大学大学院総合理学研究科博士課程修了．平成18年横浜市立大学国際総合科学科非常勤講師．複雑系に普遍的に現れる統計分布を確率モデルを通じて理論的に理解する研究を行っている．理学博士（横浜市立大学）．日本物理学会，日本応用数理学会各会員．