4F-6

不動点付高階様相論理

岡本 圭史†
(独)産業技術総合研究所 システム検証研究センター†

導入

命題様相μ計算([3])は、様々な場面で利用されている。例えば二つのプロセス p と q の間の相互排除は、プロセス p がクリティカルセクションを実行中であるという命題を CSp と表すことにすると、命題様相μ計算の式として

$$\nu X.\neg(CSp \wedge CSq) \wedge \Box X$$

と表される。同様に任意有限個のプロセス p,q,r,…間の相互排除を命題様相μ計算の式風に表そうとすると

$$\nu X.(\neg(CSp \wedge CSq) \wedge \neg(CSp \wedge CSr) \cdots) \wedge \Box X$$

のように記述する他ないが、この記号列の長さは有限では無いので、これは命題様相μ計算の式ではない。

このような事態が起こるのは、命題様相μ計算が量化記号(束縛記号)を持たない命題論理の拡張であるため、無限個の対象についてのある種の性質を記述できないからである。そこで、無限個の対象の性質を記述するために、一階述語論理のμ計算による拡張の一種である一階様相μ計算(First-order Modal μ-calculus, FOMμ)を定義する。

この拡張により、各プロセスを対象として扱え、さらにプロセス x がクリティカルセクションを実行中であることを表す述語 CS(x)を利用できるようになる。すると

$$\nu X.(\forall p.\forall q.\neg(p \neq q \wedge CS(p) \wedge CS(q))) \wedge \Box X$$

のような、直感的には「どんな場合も、将来にわたってずっと、任意の二つのプロセスが同時にクリティカルセクションを実行することはない」ことを意味する論理式が記述できるようになる。(我々の論理式に対する意味の与え方により、この論理式は実際にそのような意味を持つ)

一階様相μ計算

導入で示したように、直感的には、FOMμの論理式は命題様相μ計算の命題変数に一階述語論理の論理式を代入した形になっている。そこで、FOMμの論理式を定義するために、以下の定義を用いることにする。

定義[言語] 記号の集まりのうち次のようなものを、FOMμにおける言語と呼ぶ。
1. x,y,… 対象変数
2. c,d,… 定数記号
3. f,g,… 関数記号
4. P,Q,… 述語記号
5. X,Y,… 命題変数

特に断りがない限り、以後 FOMμにおけるある言語 L(FOMμ)をひとつ固定し、話を進める。

定義[項] L(FOMμ)を FOMμのある言語とする。このとき、次の規則にしたがって生成される記号列を項とよぶ。
1. 対象変数 x は項
2. 定数記号 c は項
3. f が n 変数関数記号で、$t_1,...,t_n$ が項ならば、$f(t_1,...,t_n)$は項

定義[論理式] L(FOMμ)を FOMμのある言語とする。このとき、次の規則にしたがって生成される記号列を論理式と呼ぶ。
1. P が n 変数述語記号、$t_1,\cdots t_n$ が項ならば、$P(t_1,\cdots t_n)$は論理式
2. 命題変数 X は論理式
3. φとψが論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi\vee\psi$, $\Box\phi$ は論理式
4. x が対象変数でφが論理式ならば、$\forall x.\phi$は論理式
5. X が命題変数でφが論理式、さらに X がφで positive ならば、$\mu X.\phi$は論理式

∀を対象束縛記号、μを命題束縛記号とそれぞれ呼ぶことにする。

Higher-order Modal Logic with Fixed-Point
† Keishi Okamoto, National Institute of Advanced Industrial Science and Technology Research Center for Verification and Semantics

論理式の例 導入で紹介した相互排除の言語を用いるとき、次は論理式。

1. $\forall p.\mu X.CS(p)\lor\Diamond X$
2. $\mu X.(\forall p.CS(p))\lor\Diamond X$
3. $\nu X.(\neg(p\neq q\land CS(p)\land CS(q))\land\Box X$
4. $\nu X.(\neg\exists p\exists q(p\neq q\land CS(p)\land CS(q)))\land\Box X$

続いて、FOMμのフレームと論理式の意味を定義する。直感的には、FOMμのフレームは遷移系の各状態が一階述語論理のモデルであるような遷移系である。また論理式の意味において、□とμ以外の定義には、遷移系の関係 R は無関係となっている。

定義[フレーム] (S,R) を遷移系、すなわち S を空でない集合、R を S 上の二項関係とし、D を空で無い集合とする。このとき三つ組み(S,R,D)を一階様相μ計算のフレームと呼ぶ。また、D を(S,R,D)の領域と呼ぶ。

FOMμのフレーム(S,R,D)に対して、一階様相論理の固定領域モデルにおける解釈 v、付値 I と項の割当 A([1],[2])と同様に、FOMμの解釈 v、付値 I、割当 A を定義することにし、FOMμにおける論理式の意味を次のように定義する。

定義[論理式の意味] (S,R,D)はフレーム、I,v,A はそれぞれ(S,R,D)上の解釈、付値、割当とする。論理式の集まりから S の冪集合への写像$[-]^{v}_{I}$(以下[-]と略)を以下のように定義する。

1. $[P(\tau)] := \{s\in S|A(\tau,s)\in I(P,s)\}$ (P は述語記号, τは項)
2. $[X] := v(X)$ (X は命題変数)
3. $[\neg\phi] := S\setminus[\phi]$
4. $[\phi\lor\psi] := [\phi]\cup[\psi]$
5. $[\forall x.\phi] := \cap_{d\in D}[\phi]^{v[d/x]}{}_{I}$
6. $[\Box\phi]$:= {s∈S|任意の t∈S について、R(s,t)が成り立つならば t∈[φ]}
7. $[\mu X.\phi] := \cap\{T\subseteq S|[\phi]^{v[T/X]}{}_{I}\subseteq T\}$

一階述語論理の形式体系に、次の推論規則(□I,⊃□E,μI,μE)を加えたものを FOMμの形式体系とする。ただし、□I においてφは仮定無しに証明可能で、μE においてψはφ[ψ/X]以外の仮定無しに証明可能であるとする。([4])

$$\frac{\phi}{\Box\phi}\Box I \qquad \frac{\Box(\phi\supset\psi)\quad\Box\phi}{\Box\psi}\supset\Box E$$

$$\frac{\phi[(\mu X.\phi)/X]}{\mu X.\phi}\mu I \qquad \frac{\begin{array}{cc} & [\phi[\psi/X]] \\ & \vdots \\ \mu X.\phi & \psi \end{array}}{\psi}\mu E$$

この形式体系と先ほど定義したフレームと論理式の意味に対し、健全性が証明される。

高階様相μ計算

FOMμにおける命題束縛記号μは、その意味において、論理式 X を受け取り論理式φ(X)を返す関数を受け取り、論理式μX.φ(X)を返す関数

$$\mu:\ (X\rightarrow\ \phi(X))\ \rightarrow\ \mu X.\phi(X)$$

と考えることが出来る。そこで、高階論理の命題(論理式)を表す型 o に対し、新たに作用素μを、(o→o)→o の型を持つ関数として導入することで、一階様相μ計算は自然に高階様相μ計算(Higher-order Modal μ-calculus, HOMμ)に拡張される。

不動点付高階様相論理

HOMμにおけるμ作用素の型は(o→o)→o のみであるが、各型αに対し、型(α→α)→αを持つ作用素μ_{α}を付け加えた固定点付高階様相論理を考えることも出来る。しかし、FOMμと HOMμのときと同様の方法では、うまくフレームと意味を定義できないことが分かっている。

参考文献

1. M.Fitting, Types, Tableaus, and Godel's God, TRENDS IN LOGIC-STUDIA LOGICA LIBRARY, KLUWER ACADEMIC PUBLICATIONS
2. M.Fitting and R.L.Mendelsohn, FIRST-ORDER MODAL LOGIC, SYNTHESE LIBRARY/VOLUME 277, KLUWER ACADEMIC PUBLICATIONS
3. D.Kozen, Results on the Propositional μ-calculus, Theoretical Computer Science 27 (1983) 333-354
4. M.Miculan, A Natural Deduction Style Proof System for Propositional μ-calculus and Its Formalization in Inductive Type Theories,