

# 1 方向再帰型線形時間一斉射撃アルゴリズムの設計と実装

梁瀬 隼人<sup>†</sup> 久岡 雅也<sup>‡</sup> 梅尾 博司<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 大阪電気通信大学 総合情報工学部 情報工学科

<sup>‡</sup> 大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻

## 1 はじめに

1次元セルラーオートマトンのための様々な一斉射撃アルゴリズムが考案されている [1-7]. その中に次のような特徴を持つ Mazoyer [3] が考案した一斉射撃アルゴリズムがある. Mazoyer アルゴリズムは, セル空間を1方向信号のみで再帰的にセル空間を分割し, セル空間の同期を実現している. このような性質のアルゴリズムを1方向再帰型一斉射撃アルゴリズムと呼ぶ. これまでに, 1方向再帰型一斉射撃アルゴリズムとして, Mazoyer [3] の6状態  $2n-2$  ステップアルゴリズム以外に知られていない.

本稿では, 一斉射撃アルゴリズムにおける再帰性に着目し, 1方向再帰性を有する一斉射撃アルゴリズムの設計手法を提案する. 任意の正整数  $k(\geq 3)$  に対して,  $kn$  ステップで射撃可能な一方向再帰型一斉射撃アルゴリズムの設計が可能であることを示し,  $3n-3$  ステップで動作する内部状態数が16のアルゴリズムをコンピュータ上に実装する.

## 2 一斉射撃問題

### 2.1 セルラーオートマトン

セルラーオートマトンとはセルと呼ばれる有限状態オートマトンの集合である. 全てのセルは隣り合うセルとのみ通信できる. (図1参照).

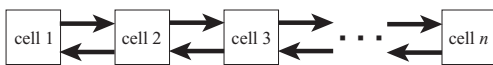


図1: セルラーオートマトン

### 2.2 一斉射撃問題

一斉射撃問題はセルラーオートマトンの同期に関する問題である. 時刻  $t=0$  に将軍と呼ばれるセルから発せられた, 「準備ができたなら一斉に射撃せよ」という命令により, 未来のある時刻  $t=$  において全てのセルが特殊な射撃状態に遷移するように遷移規則集合を決定する問題である.

## 3 再帰性

本節では, 一斉射撃アルゴリズムにおける1方向並びに2方向再帰性を定義する. 図2は1方向再帰性を有する最適時間一斉射撃アルゴリズムの時間・空間図式である. 2方向再帰性を有する同様なアルゴリズムの時間空間図式を図3に示す. 図2では, 反射信号は将軍  $G_0$  からの信号と徐々に衝突し, そこに新しい将軍  $G_1, G_2, \dots$  を作り出していく.  $G_1$  は自身の右側に広がるセル空間

を一斉射撃するために,  $G_2$  は自身と  $G_1$  にはさまれたセル空間を一斉射撃するために  $G_0$  と全く同じ動作を開始する. このように再帰的に生成された将軍は, セル空間を小さなサブ空間に分割し, それぞれを一斉射撃するように設計されている. 生成される全ての将軍は, 自ら統治するセル空間の左端に位置し, 右側のセル空間に対して一斉射撃するための信号群を送る. このように再帰的に生成される全ての将軍が, 統治すべき部分セル空間の左端に位置し, 自身の右方向に広がる部分空間に対して一斉射撃動作を行うアルゴリズムを1方向再帰型アルゴリズムと呼ぶ.

一方, 図3は,  $t=n-1$  時に右端に将軍  $G_1$  が生成され, さらに反射信号と  $G_0$  から送出された信号が衝突する時点で将軍  $G_2, G_3, \dots$  が生成される.  $G_1$  は自身と  $G_2$  にはさまれた部分空間を一斉射撃し,  $G_2$  は自身と  $G_3$  ではさまれた空間を... という具合にそれぞれの部分空間の右端から左側に広がる部分空間を一斉射撃する. さらに,  $G_2, G_3, \dots$  は自身の右側に位置する部分空間に対しても同様な動作を行う. 以上のように再帰的に生成される将軍は, 自ら統治する部分空間の左端にもまた右端にも出現し, 自身の右方向並びに左方向に広がる部分空間に対して一斉射撃動作を行う. このようなアルゴリズムを2方向再帰型アルゴリズムと呼ぶ. 2方向再帰型アルゴリズムとして, Balzer [1], Waksman [6], Yunes [7] が知られている.

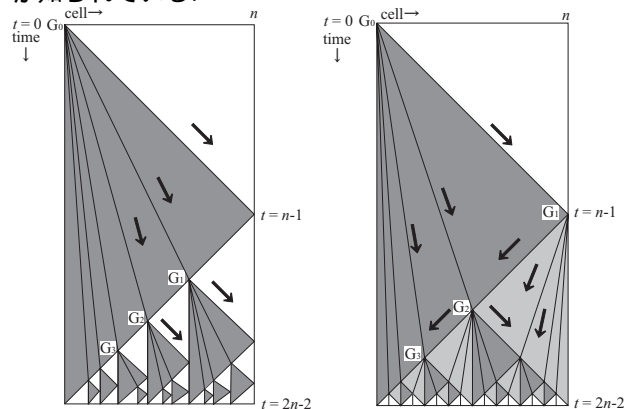


図2: 1方向再帰型一斉射撃アルゴリズムのための時間・空間図式

図3: 2方向再帰型一斉射撃アルゴリズムのための時間・空間図式

## 4 1方向再帰型線形時間一斉射撃アルゴリズムの設計

1次元セルラーオートマトン上で  $kn$  ステップ ( $k$  は 3

A Design of Time-optimum One-way Recursive Firing Squad Synchronization Algorithms for One-dimensional Cellular Arrays

<sup>†</sup>Osaka Electro-Communication Univ., Faculty of Information Science and Technology

<sup>‡</sup>Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering

以上の正の整数) で一斉射撃する 1 方向線形時間一斉射撃アルゴリズムを設計する。これまでに提案されている 2 方向  $3n$  ステップ一斉射撃アルゴリズムは、図 4 に示すようにセル空間を 2 分割した時に時間・空間図式が左右対称になるように信号を出す [7]。

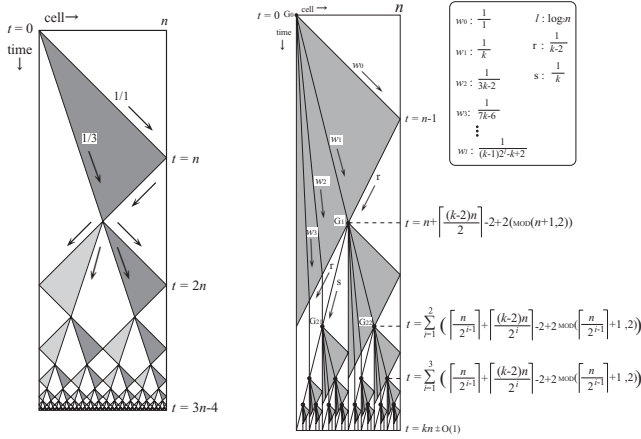


図 4: 2 方向  $3n$  ステップ一斉射撃アルゴリズム 図 5: 1 方向線形時間一斉射撃アルゴリズム

図 5 は 1 方向再帰性を有する一斉射撃アルゴリズムの時間・空間図式である。  $t = 0$  時、左端に位置する将軍  $G_0$  から右方向にスピード  $1/1$  で伝播する信号  $w_0$  が生成される。  $w_0$  は右端まで進み、  $t = n - 1$  時に右端にて反射する。反射信号  $r$  は左方向に  $1/(k - 2)$  のスピードで伝播する。将軍  $G_0$  は  $w_0$  の生成だけでなく、右方向に  $1/((k - 1)2^l - k + 2)$  のスピードで伝播する無限個の信号  $w_l$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$  を同時に生成する。これらの信号は、  $l$  の増加とともに伝播速度が指数関数的に遅くなる信号群である。  $w_1$  は反射波  $r$  とセル空間の midpoint で  $t = kn/2$  時に出会い、そこに新たな将軍  $G_1$  を生成する。  $G_1$  は自身の右側に広がるセル空間に対して、  $G_0$  と全く同じ動作をする。  $G_1$  は生成と同時に、左方向にスピード  $1/k$  で伝播する信号  $s$  を生成する。信号  $s$  の機能については後述する。信号  $w_2$  は  $t = (3k - 2)n/4$  時にアレイの左端から  $n/4$  に位置するセル上で信号  $r$  に出会い、そこに分割点であることを示すマークを付与する。信号  $s$  は  $t = 3kn/4$  時にこのセル上に到着し、ここに新たな将軍  $G_{21}$  を生成する。同時に、アレイの左端から  $3n/4$  に位置するセル上にも将軍  $G_{22}$  が生成される。このように信号  $s$  は、将軍  $G_0$  が統治するセル空間の左半分の将軍の生成を遅らせるために使用される。以下同様にアレイの左端から  $n/8, n/16, \dots$  に位置するセル上に将軍が生成される。長さ  $n$  のセル空間の一斉射撃に要する時間を  $T(n)$  とする。以上の観察より

$$T(n) = \frac{kn}{2} + T(n/2) = kn \pm O(1)$$

が得られる。以上より次の定理を得る。

[定理 1] 図 5 に示した時間・空間図式の 1 方向再帰型一斉射撃アルゴリズムは、  $n$  個のセルからなる 1 次元のセル空間を  $kn \pm O(1)$  ステップで一斉射撃する。但し、  $k$  は  $k \geq 3$  なる任意の正整数である。

次に、  $3n - 3$  ステップで動作する一斉射撃アルゴリズムを内部状態数が 16 のセルラーオートマトン上に実現する。図 6 は  $3n - 3$  ステップで動作する 1 方向再帰型一斉射撃アルゴリズムの時間・空間図式である。実際にシミュレータ上に実装したシミュレーション結果を図 7 に示す。

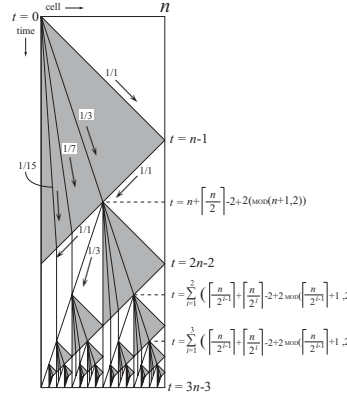


図 6: 1 方向  $3n$  ステップ一斉射撃アルゴリズム

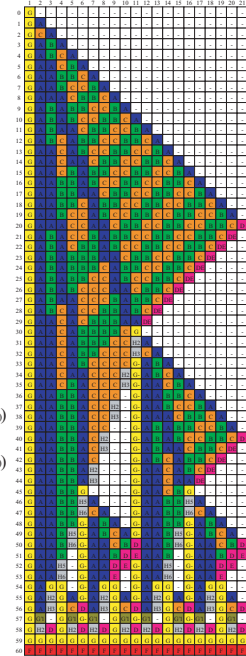


図 7: シミュレーション結果

以上を次の定理にまとめる。

[定理 2]  $n$  個のセルからなる 1 次元のセル空間を  $3n - 3$  ステップで一斉射撃する 16 状態のアルゴリズムが存在する。

## 5 おわりに

1 次元セルラーオートマトン上で 1 方向線形時間一斉射撃アルゴリズムの設計手法を提案し、  $3n - 3$  ステップで動作する内部状態数が 16 のセルラーオートマトンとして実装を行った。実装したアルゴリズムが、セル数 2 から 300 までシミュレータ上で正しく動作することを確認した。

今後の課題として、  $4n \pm O(1), 5n \pm O(1), \dots$  ステップで動作するアルゴリズムの実装と、さらなる状態数の削減が考えられる。

## 参考文献

- [1] R. Balzer: An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 10 (1967), pp. 22-42.
- [2] P. C. Fischer: Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array. *J. of ACM*, vol. 12, No. 3 (1965), pp. 388-394.
- [3] J. Mazoyer: A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, vol. 50 (1987), pp. 183-238.
- [4] M. Minsky: *Computation: Finite and infinite machines*. Prentice Hall, (1967), pp. 28-29.
- [5] E. F. Moore: The firing squad synchronization problem. in *Sequential Machines, Selected Papers* (E. F. Moore, ed.), Addison-Wesley, Reading MA., (1964), pp. 213-214.
- [6] A. Waksman: An optimum solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 9 (1966), pp. 66-78.
- [7] J. B. Yunes: Seven-state solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, 127 (1994), pp.313-332.