多相環境計算における強正規化可能性

清 水 　亮[†]　西 崎 真 也[††]

多相環境計算は，環境をファーストクラスオブジェクトとして扱うことができる λ 計算に，多相型体系を導入したものである．これまでに，ML 多相型体系を持つ環境計算とその型推論アルゴリズムは提案し，その主部簡約定理を得ていたが，強正規化可能性定理はまだ得ていなかった．本論文では ML 多相型体系を包含する，2 階型体系を提案し，その強正規化可能性定理を証明する．この性質は，多相環境計算から多相 λ 計算（2 階型付 λ 計算）への変換をもちいて，多相環境計算の強正規化可能性を多相 λ 計算の強正規化可能性に帰着することによって得られる．

Strong Normalization in Polymorphic Environment Calculus

Ryo Shimizu[†] and Shin-ya Nishizaki[††]

Polymorphic environment calculus is a polymorphic lambda calculus with first-class environments. We proposed environment calculus with ML-polymorphic type system and its type inference algorithm and proved principal type theorem with respect to the type system. In this paper, we propose second-order type system for the environment calculs, which includes the ML-polymorphic type system and prove strong normalization theorem with respect to the second-order type system. The theorem is proved by using transformation of the environment calculus to the polymorphic lambda calculus.

1. はじめに

多くのプログラムは変数を含んでいる．変数名から値への対応は環境により管理されている．環境は，変数の有限集合から値への関数として形式化される．Lisp の方言である Scheme[7] では，その多くの実装[4] において，環境を，整数や論理値のように関数の引数として渡したり返り値としたりすることが可能となっている．このような機構は，しばしば，ファーストクラス環境（first-class environment）と呼ばれる．Scheme ではファーストクラス環境のために，いくつかのプリミティブが用意されているが，以下に主要なもの 2 つを紹介する．

- `the-environment` は 0 個の引数をとる手続きであり，現在の環境を表す値を返す．
- `eval` は 2 引数の手続きである．第 1 引数は，式を表現するリストをとり，第 2 引数は環境を表すデータをとる．第 1 引数が表現する式を第 2 引数が表現する環境のもとで評価し，その結果を返り値とする．

代入は，環境を形式化したものであることはよく知られている．たとえば，

$(\lambda f.(ff))(\lambda x.x) \underset{\beta}{\rightarrow} (ff)[x{:=}(\lambda x.x)] \equiv (\lambda x.x)(\lambda x.x)$

という簡約において，第 2 項の $[x{:=}(\lambda x.x)]$ は，変数 x への代入であるが，これは，(ff) という項を評価する時点での変数 x の束縛を記述した環境ととらえることもできるわけである．

代入は通常の λ 計算では，メタレベルの操作として定義されるものであるが，これを明示的に扱った体系として Abadi らによる明示的代入（explicit substitution）[1] がある．これは代入の機構をオブジェクトレベルにおいて，簡約として定義し，変数の参照機構をより詳細にとらえようとしたものであった．彼らの体系，$\lambda\sigma$ 計算では，項と代入は別の構文クラスとして与えられていた．環境計算は，代入を項として定義することにより，ファーストクラス環境を形式化することを可能としたものである．

論文 5) では単純型付の環境計算を提唱し，合流性，強正規化可能性定理，型推論アルゴリズム，主要型定理（principal typing theorem）について研究した．そ

† 新日鉄ソリューションズ株式会社
NS Solutions
†† 東京工業大学大学院情報理工学研究科計算工学専攻
Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology

して，さらに論文 6) では，ML 多相型体系を持つ環境計算を提唱し，型推論アルゴリズムと主要型定理を研究した．

ML 多相 λ 計算およびその拡張となっている多相 λ 計算 System F（以降，単に F）[2),3)] の持つ顕著な性質として，強正規化可能性，すなわち，すべての項はどのような順序で簡約を行ってもその正規形に至る，という性質があげられる．ML 多相な環境計算においても強正規化可能性定理を持つことが予想される．本論文では，ML 多相環境計算を拡張した体系である多相環境計算 F_{env} を提唱する．この型体系は，System F の拡張であり,（ML 多相環境計算ML_{env}と同様に）型の抽象，型の具体化を項の中では明示的に表さないスタイル，いわゆる，暗黙的型付け（implicit typing）カリースタイル（à la Curry）である．そして，その強正規化可能性定理を証明する．

2. 多相環境計算

あらかじめ，項変数の可算集合，型変数の可算集合，環境型変数の可算集合が与えられているものと仮定する．項変数のメタ変数として，x，y，z などが用いられ，型変数のメタ変数として，α，β，γ などが用いられ，環境型変数のメタ変数として，ρ，ρ' などが用いられるものとする．各環境型変数には以下のように禁止変数と呼ばれる項変数が有限個割り当てられているものとする．

定義 1 （禁止変数） 環境型変数 ρ に対して，以下の条件をみたす項変数の有限集合を対応させる関数 PVar を禁止変数割当てと呼び，有限集合 $\mathsf{PVar}(\rho)$ の要素を，環境型変数 ρ の禁止変数と呼ぶ：

$$|\mathsf{PVar}^{-1}(\{x_1,\ldots,x_n\})| = \infty$$

すなわち，禁止変数の有限集合が 1 つ与えられたら，それを禁止変数とする環境型変数は無限個あるということである．また以下では，環境型変数 ρ が禁止変数の集合 X を持つとき，ρ_X と書き，明示的に表すこともある．

定義 2 （型） F_{env}の型（type）と環境型（environment type）は以下の文法により定義される．型のメタ変数として，A，B などが使用され，環境型のメタ変数として，Γ，Δ などが使用される．

$$\begin{array}{rcll} A & ::= & \alpha & \text{型変数} \\ & | & (A_1 \to A_2) & \text{関数型} \\ & | & \forall\alpha.A & \text{普遍型} \\ & | & \Gamma & \text{環境型} \\ \Gamma & ::= & \rho & \text{環境型変数} \\ & | & \{x_1:A_1\}\cdots\{x_n:A_n\}\rho & \end{array}$$

$x_1,\ldots,x_n$ は相異なるものとし，$\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \mathsf{PVar}(\rho)$ をみたすものとする．

型変数は，型が代入されうる変数であり，関数型 $(A_1 \to A_2)$ は，引数の型が A_1 で，返り値の型が A_2 であるような関数の型を表す．型普遍型 $\forall\alpha.A$ は，型変数 α によって抽象された項の型である．環境普遍型 $\forall\rho.A$ は，環境型変数 ρ によって抽象された項の型である．環境型変数は，環境型のみが代入される変数である．環境型 $\{x_1:A_1\}\cdots\{x_n:A_n\}\rho$ は，変数 $x_1,\ldots,x_n$ に型 $A_1,\ldots,A_n$ の値を各々束縛する環境の型である．環境型変数 ρ には他の環境型が具体化（instantiate）されうる．ただ，無制限に具体化すると,「変数が相異なる」という条件が維持できない．たとえば，環境型 $\{x:A\}\{y:B\}\rho$ の環境型変数 ρ に $\{x:C\}\{z:D\}\rho'$ の代入を許してしまうと，

$$\{x:A\}\{y:B\}\{x:c\}\{z:C\}\rho'$$

という環境型ができるが，これは変数 x の束縛が重複してしまっている．このような現象を抑制するために，環境型変数の代入（後述：付録 A.1）では，禁止変数に関して制限を設けている．禁止変数の機構は，型推論アルゴリズム[6)] において重要な役割を果した．本論文で扱う強正規化可能性の証明においては，特に重要な役割を果すわけではない．

また，型 A の自由型変数 $\mathsf{Ftv}(A)$ を次のように定義する．

$\mathsf{Ftv}(\alpha) = \{\alpha\}$,
$\mathsf{Ftv}(A \to B) = \mathsf{Ftv}(A) \cup \mathsf{Ftv}(B)$,
$\mathsf{Ftv}(\forall.A) = \mathsf{Ftv}(A) - \{\alpha\}$,
$\mathsf{Ftv}(\{x_1\!:A_1\}\cdots\{x_n\!:A_n\}\rho) = \mathsf{Ftv}(A_1) \cup \cdots \mathsf{Ftv}(A_n)$.

注 意

以降，定義のいくつかは，本論文の最後の付録において与えているので注意してほしい．

定義 3 （項） F_{env}の項は以下の文法により定義される．

$$\begin{array}{rcll} M & ::= & x & \text{（項）変数} \\ & | & \lambda x.M & \text{ラムダ抽象} \\ & | & (MN) & \text{関数適用} \\ & | & id & \text{恒等環境} \\ & | & (M/x)\cdot N & \text{環境拡張} \\ & | & (M \circ N) & \text{環境合成} \end{array}$$

変数 x，ラムダ抽象 $\lambda x.M$，関数適用 (MN)，型抽象 $\Lambda\alpha.M$，型適用 (MA) は，通常の多相 λ 計算と同様である．恒等環境 id は現在の環境を評価値として返すようなプリミティブであり，Scheme の `(the-environment)` に相当する．環境拡張 $(M/x)\cdot N$

は，項 N を評価した結果が環境値であり，それに，変数 x と項 M の評価値との束縛を追加した環境値を返すようなプリミティブである．環境合成は，項 N の評価値が環境で，その環境のもとでの項 M の評価値を表し，Scheme の（`eval` M　N）に相当する．

定義 4 （型付規則）

$$\frac{}{\{x:A\}\Gamma\vdash x:A}\ \textbf{Var}$$

$$\frac{\{x:A\}\Gamma\vdash M:B}{\{x:C\}\Gamma\vdash \lambda x.M:(A\to B)}\ \textbf{Abs}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:(A\to B)\quad \Gamma\vdash N:A}{\Gamma\vdash (MN):B}\ \textbf{App}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:A\quad \alpha\notin \mathsf{Ftv}(\Gamma)}{\Gamma\vdash M:\forall\alpha.A}\ \textbf{TypeAbs}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:\forall\alpha.A}{\Gamma\vdash M:A[\alpha:=B]}\ \textbf{TypeApp}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:\{x:A\}\Delta\quad \alpha\notin \mathsf{Ftv}(\Gamma)}{\Gamma\vdash M:\{x:\forall\alpha.A\}\Delta}\ \textbf{TypeAbs-InEnv}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:\{x:\forall\alpha.A\}\Delta}{\Gamma\vdash M:\{x:A[\alpha:=B]\}\Delta}\ \textbf{TypeApp-InEnv}$$

$$\frac{}{\Gamma\vdash id:\Gamma}\ \textbf{Id}$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:A\quad \Gamma\vdash N:\{x:B\}\Delta}{\Gamma\vdash (M/x)\cdot N:\{x:A\}\Delta}\ \textbf{Extn}$$

$$\frac{\Gamma\vdash N:\Delta\quad \Delta\vdash M:A}{\Gamma\vdash M\circ N:A}\ \textbf{Comp}$$

型付けの簡単な例をあげておく．項

$$(f\ f)\circ((\lambda f.id)(\lambda x.x))$$

という項を考える．項 $\lambda f.id$ は 1 引数関数で，引数であたえられた値を変数 f に束縛した環境を返り値とする関数である．よって，項 $(\lambda f.id)(\lambda x.x)$ の値は，変数 f に恒等関数 $\lambda x.x$ を束縛した環境である．よって，この環境での $(f\ f)$ は，恒等関数に恒等関数を引数として適用することを意味する．前者の f と後者の f は異なる型を持たなければならず，多相的でなければ型が付かない．

ここで与えた型体系では，項 $(\lambda f.id)(\lambda x.x)$ は，

$$\{f:\beta\}\{x:\gamma\}\rho\vdash(\lambda f.id)(\lambda x.x):\{f:\alpha\to\alpha\}\rho$$

という型付けになり，型抽象して，

$$\{f:\beta\}\{x:\gamma\}\rho\vdash(\lambda f.id)(\lambda x.x):\{f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\}\rho$$

という型を持つ．この環境で評価される項 $(f\ f)$ は，前者の f の型として $(\alpha'\to\alpha')\to(\alpha'\to\alpha')$ というふうに instantiate して，後者の f の型として $\alpha'\to\alpha'$ というふうに instantiate すると，

$$\{f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\}\rho\vdash(f\ f):\alpha'\to\alpha'$$

というふうに型付けされ，

$$\{f:\beta\}\{x:\gamma\}\rho\vdash(f\ f)\circ((\lambda f.id)(\lambda x.x)):\alpha'\to\alpha'$$

という型になる．このように，多相環境計算では，let 多相性（ML 多相性）は，環境に関する多相性により表現することができる．

定義 5 （簡約） 簡約関係 $M\to N$ は，以下の規則により定義される．

$(\lambda x.M)N\to M\circ(N/x)\cdot id$	**Beta**
$((\lambda x.M)\circ L)N\to M\circ(N/x)\cdot L$	**BetaClos**
$id\circ M\to M$	**IdL**
$M\circ id\to M$	**IdR**
$x\circ(M/x)\cdot N\to M$	**VarRef**
$y\circ(M/x)\cdot N\to y\circ N$	**VarSkip**
$(M\circ N)\circ L\to M\circ(N\circ L)$	**Assoc**
$(MN)\circ L\to(M\circ L)(N\circ L)$	**DApp**
$((M/x)\cdot N)\circ L\to((M\circ L)/x)\cdot(N\circ L)$	**DExtn**

$$\frac{N\to N'}{C[N]\to C[N']}\ \textbf{Context}$$

ここで，$C[-]$ は，文脈（穴あき項）を表す．穴 $[-]$ が 1 カ所だけ出現する項であり，$C[N]$ は，その穴に項 N をはめこんだものを意味する．

定義 6 （部分簡約：β 簡約と σ 簡約） β 簡約 $\underset{\beta}{\to}$ は，簡約の部分関係であり，規則 **Beta**，**BetaClos**，**Context** により定義されるものである．

σ 関係 $\underset{\sigma}{\to}$ は，簡約の部分関係であり，規則 **Beta**，**BetaClos** 以外の規則により定義されるものである．

明らかに，

$$\to\,=\,\underset{\beta}{\to}\cup\underset{\sigma}{\to},\quad \underset{\beta}{\to}\cap\underset{\sigma}{\to}=\emptyset$$

が成り立つ．

以下に簡約の例をあげておく．項 $\lambda y.\lambda x.id$ は，引数を 2 つとり，それらの値を変数 x，y に束縛し，その環境を返り値として返すという関数である．下の例では，そのような関数に項 M，N を適用している．

$$\begin{aligned}&(\lambda y.\lambda x.id)MN\\ \underset{\beta}{\to}\ &((\lambda x.id)\circ((M/y)\cdot id))N\\ \underset{\beta}{\to}\ &id\circ((N/y)\cdot(M/x)\cdot id)\\ \underset{\sigma}{\to}\ &(N/y)\cdot(M/x)\cdot id\end{aligned}$$

定義 7 （総称包摂 $\le$） まず，総称包摂 $\le$ を定義する準備として，関係 $\preceq$ を以下のように定義する．

- $\forall\alpha.A\preceq A[\alpha:=B]$,
- $A\preceq\forall\alpha.A$.

総称包摂（generic subsumption）$A \leq B$ は，型の間の二項関係であり，以下の条件と反射則と推移則をみたす最小のものである．

- $A \preceq B$ ならば $A \leq B$,
- $A \preceq B$ ならば $\{x : A\}\Gamma \leq \{x : B\}\Gamma$.

たとえば，

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \leq \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha),$$
$$\forall\alpha.\{f : \alpha \to \alpha\}\rho \leq \forall\alpha.\{f : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)\}\rho,$$
$$\{f : \forall\alpha.\alpha \to \alpha\}\rho \leq \{f : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)\}\rho$$

が成り立つ．しかしながら，

$$\{f : \forall\alpha.\alpha \to \alpha\}\rho \not\leq \{f : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)\}\rho$$

であるから，

$$\{e : \{f : \forall\alpha.\alpha \to \alpha\}\rho\}\rho' \not\leq \{e : \{f : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)\}\rho\}\rho'$$

となってしまう．

総称包摂の両辺が関数型の場合，右辺は左辺の型変数を単に instantiate したものとなることがいえる．

補題 1 $(A \to B) \leq (A' \to B')$ ならば，$(A \to B)\overline{[\alpha_n := A_n]} \equiv (A' \to B')$ をみたす型変数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ と型 $A_1, \ldots, A_n$ が存在する．

環境型上では以下のことがいえる：

補題 2 $\{x : A\}\Gamma \leq \{x : A'\}\Gamma'$ ならば，$A \preceq A'$，かつ，$\Gamma \leq \Gamma'$.

次に定義する制限つき総称包摂 $A \leq_\Gamma B$ は，右辺が左辺の型抽象となる場合において，束縛型変数が Γ の自由型変数ではないという制限を課したものである．

定義 8 （制限付き総称包摂） まず，準備として，関係 $\preceq_\Gamma$ を以下のように定義する．

- $\forall\alpha.A \preceq_\Gamma A[\alpha := B]$,
- $\alpha \notin \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ ならば $A \preceq_\Gamma \forall\alpha.A$.

型 A，B，環境型 Γ の間の制限付き総称包摂（restricted generic subsumption）$A \leq_\Gamma B$ は，以下の条件と反射則と推移則をみたす最小のものである．

- $A \preceq_\Gamma B$ ならば $A \leq_\Gamma B$,
- $A \preceq_\Gamma B$ ならば $\{x : A\}\Delta \leq_\Gamma \{x : B\}\Delta$.

この制限付き総称包摂の定義より，明らかに，以下の性質が成り立つことが分かる．

命題 1 $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ かつ $A \leq_\Gamma B$ ならば，$A \leq_\Delta B$．$A \leq_\Gamma B$ ならば，$A \leq B$

命題 2 $\Gamma \vdash M : A$ とする．$A \leq_\Gamma A'$ ならば，型付け規則 **TypeAbs**，**TypeApp**，**TypeAbsInEnv**，**TypeAppInEnv** を何回か適用して $\Gamma \vdash M : A'$ を導くことができる．

上で与えた型付けは，項の構造に関して帰納的に定義したものではない．たとえば，$\Gamma \vdash (MN) : A$ という型付けがあるとき，その導出木の最後に適用された型付け規則は必ずしも，**App** であるとは限らず，**TypeAbs**，**TypeApp**，**TypeAbsInEnv**，**TypeAppInEnv** など，普遍型・普遍環境型の抽象や具体化に関する規則であることがありうる．しかし，下から上（根から葉の方向）へたどると，かならず，**App** の規則が適用されていることがいえる．これが以下の generation lemma（生成補題）である．

補題 3 （生成補題 generation lemma） 以下の 1〜6 が成り立つ．

1. $\Gamma \vdash x : A$ ならば，$A' \leq A$，かつ，$\{x : A'\} \in \Gamma$ をみたす型 A' が存在する．
2. $\Gamma \vdash \lambda x.M : A$ ならば，$\{x : A_1\}\Gamma' \vdash M : A_2$，$\Gamma \equiv \{x : C\}\Gamma'$ $(A_1 \to A_2) \leq A$ をみたす A_1，A_2，C が存在する．
3. $\Gamma \vdash (MN) : B$ ならば，$\Gamma \vdash M : A \to B'$，$\Gamma \vdash N : A$，$B' \leq B$ をみたす型 A，B' が存在する．
4. $\Gamma \vdash id : A$ ならば，$\Gamma \leq A$ が成り立つ．
5. $\Gamma \vdash (M/x) \cdot N : A$ ならば，$\Gamma \vdash M : B$，$\Gamma \vdash N : \{x : C\}\Delta$，$\{x : B\}\Delta \leq A$ をみたす型 B，C，環境型 Δ が存在する．
6. $\Gamma \vdash M \circ N : A$ ならば，$\Gamma \vdash N : \Delta$，$\Delta \vdash M : A'$，$A' \leq A$ をみたす型 A'，環境型 Δ が存在する．

（証明の方針） 型付けの導出の長さに関する帰納法のもとで，項 M の構造に関して場合分けを行えばよい．

生成補題は，項の構造と型付け導出木の構造との対応を表したものである．たとえば，この補題の 5 は，型付け導出木が，

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \Gamma \vdash M : B & & \Gamma \vdash N : \{x : C\}\Delta\end{matrix}}{\Gamma \vdash (M/x) \cdot N : \{x : B\}\Delta}\ \mathbf{Extn}}{\begin{matrix}\vdots\ (*)\\ \Gamma \vdash (M/x) \cdot N : A\end{matrix}}$$

という形をしていて，$(*)$ の部分では，**TypeAbs**，**TypeApp**，**TypeAbsInEnv**，**TypeAppInEnv** の規則が何回か適用されていることを意味している．

補題 4 $\Gamma \vdash C[N] : A$ ならば，$\Delta \vdash N : B$ をみたす Δ，B が存在する．

補題 5 $\Gamma \vdash C[N] : A$，$\Delta \vdash N : B$，$\Delta \vdash N' : B$ ならば，$\Gamma \vdash C[N'] : A$.

補題 4，5 の証明の概略 $\Gamma \vdash C[N] : A$ の導出の構造に関する帰納法を用いればよい．

補題 6 （右具体化，right instantiation lemma） $\Gamma \vdash M : A'$，かつ，$A' \leq_\Gamma A$ ならば，$\Gamma \vdash M : A$.

（証明の概略） 制限付き総称包摂 $A' \leq_\Gamma A$ の定義と，型付け規則 **TypeAbs**，**TypeApp**，**TypeAbsInEnv**，**TypeAppInEnv** より明らか．

補題 7 （左汎化，left generalization lemma） $\Delta \vdash M : A$，かつ，$\Gamma \leq \Delta$ ならば，$\Gamma \vdash M : A$.

（証明の概略） 型付け $\Delta \vdash M : A$ の導出の構造に関する帰納法による．

また，型変数の具体化について以下の補題が成り立つ．型付けの導出の構造に関する帰納法により，証明は容易である．

補題 8 $\Gamma \vdash M : A$ ならば，$\Gamma[\overline{\alpha_n := A_n}] \vdash M : A[\overline{\alpha_n := A_n}]$

定理 1 （主部簡約定理） $\Gamma \vdash M : A$，かつ，$M \to M'$ ならば，$\Gamma \vdash M' : A$ が成り立つ．

（証明） $\Gamma \vdash M : A$ の導出のサイズに関する帰納法により証明する．簡約 $M \to M'$ を導く最後の規則に関して場合分けを行う．

規則 **Context** の場合：$M \equiv C[N]$，$M' \equiv C[N']$，$N \to N'$ と仮定する．補題 4 より，$\Delta \vdash N : B$ をみたす Δ，B が存在する．帰納法の仮定より，$\Delta \vdash N' : B$. そして，補題 5 より，$\Gamma \vdash C[N'] : A$ が成り立つ．

規則 **BetaClos** の場合：$M \equiv ((\lambda x.M_1) \circ L)M_2$，$M' \equiv M_1 \circ (M_2/x) \cdot L$ とおく．$\Gamma \vdash M : A$ と補題 3 より，

$\Gamma \vdash (\lambda x.M_1) \circ L : B \to A'$,$\Gamma \vdash M_2 : B$,$A' \leq_\Gamma A$

なる型 A'，B が存在する．そして，型付けの前者と補題 3（generation lemma）より，

$$\Gamma \vdash L : \{x : C\}\Delta,\ \{x : C\}\Delta \vdash \lambda x.M_1 : D,$$
$$D \leq_{\{x:C\}\Delta} (B \to A')$$

をみたす型 C，D，環境型 Δ が存在する．型付けの後者と補題 3 により，

$$\{x : B'\}\Delta \vdash M_1 : A'', (B' \to A'') \leq_{\{x:B'\}\Delta} D$$

をみたす型 B'，A'' が存在する．

$\Gamma \vdash M_2 : B$ と $\Gamma \vdash L : \{x : C\}\Delta$ とに，型付け規則 **Extn** を適用して，$\Gamma \vdash (M_2/x) \cdot L : \{x : B\}\Delta$ を得る．

命題 1 より，$B' \to A'' \leq D \leq B \to A'$ を得る．これに，補題 1 を適用すると，$(B \to A') \equiv (B' \to A'')[\overline{\alpha_n := A_n}]$ をみたす型変数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ と型 $A_1, \ldots, A_n$ が存在することが分かる．

補題 8 により，$\{x : B'\}\Delta \vdash M_1 : A''$ に型代入 $[\overline{\alpha_n := A_n}]$ を適用して，$\{x : B\}\Delta \vdash M_1 : A'$ を得る．

型付け規則 **Comp** を適用して，$\Gamma \vdash M_1 \circ (M_2/x) \cdot L : A'$ を得る．これと $A' \leq_\Gamma A$ について補題 6 を適用して，$\Gamma \vdash M_1 \circ (M_2/x) \cdot L : A$ を得る．

規則 **DExtn** の場合：$M \equiv ((M_1/x) \cdot M_2) \circ L$，$M' \equiv ((M_1 \circ L)/x) \cdot (M_2 \circ L)$ とおく．仮定 $\Gamma \vdash M : A$ と補題 3 より，$\Gamma \vdash L : \Delta$，$\Delta \vdash (M_1/x) \cdot M_2 : A'$，$A' \leq_\Gamma A$ をみたす環境型 Δ と型 A' が存在する．後者の型付けと補題 3 より，$\Delta \vdash M_1 : D$，$\Delta \vdash M_2 : \{x : C\}\Phi$，$\{x : D\}\Phi \leq_\Delta A'$ をみたす環境型 Φ と型 C，D が存在する．

$\Gamma \vdash L : \Delta$ と $\Delta \vdash M_1 : D$ に，型付け規則 **Comp** を適用して，$\Gamma \vdash M_1 \circ L : D$．一方，$M_2$ についても同様に，$\Gamma \vdash M_2 \circ L : \{x : C\}\Phi$．型付け規則 **Extn** により，$\Gamma \vdash ((M_1 \circ L)/x) \cdot (M_2 \circ L) : \{x : D\}\Phi$.

$\{x : D\}\Phi \leq_\Delta A'$ ではあったが，このことは残念ながら $\{x : D\}\Phi \leq_\Gamma A'$ を意味しない．すなわち，Γ の自由型変数のうち，Δ には自由に出現しないもので，$\{x : D\}\Phi$ に自由に出現していて，A' では抽象化されるものがあるかもしれないためである：

$$\mathsf{Ftv}(\{x : D\}\Phi) \cap (\mathsf{Ftv}(\Gamma) - \mathsf{Ftv}(\Delta)) \stackrel{?}{=} \emptyset.$$

しかしながら，$\Delta \vdash (M_1/x) \cdot M_2 : A'$ の導出木において，$\mathsf{Ftv}(\Gamma) - \mathsf{Ftv}(\Delta)$ の前述のような型変数は名前替えすることができる☆.

よって，この場合においては，$\{x : D\}\Phi \leq_\Gamma A'$ が成り立つ．よって，$\{x : D\}\Phi \leq_\Gamma A' \leq_\Gamma A$ より，補題 6 により，$\Gamma \vdash ((M_1 \circ L)/x) \cdot (M_2 \circ L) : A$.

規則 **DApp** の場合：上記の **DExtn** と同様.

規則 **VarRef** の場合：$M \equiv x \circ (M'/x) \cdot L$ とおく．仮定 $\Gamma \vdash M : A$ と補題 3 より，$\Gamma \vdash (M'/x) \cdot L : \{x : A''\}\Delta$，$\{x : A''\}\Delta \vdash x : A'$，$A' \leq_\Gamma A$，$A'' \leq_{\{x:A''\}\Delta} A'$ をみたす，環境型 Δ と型 A'，A'' が存在する．この 2 つの型付けのうち前者のものと，補題 3 より，$\Gamma \vdash L : \{x : C\}\Delta'$，$\Gamma \vdash M' : A'''$，$\{x : A'''\}\Delta' \leq_\Gamma \{x : A''\}\Delta$ をみたす環境型 Δ' と型 A'''，C が存在する．

$\{x : A'''\}\Delta' \leq_\Gamma \{x : A''\}\Delta$ に補題 2 を適用して，($\Delta' \leq_\Gamma \Delta$ と) $A''' \leq_\Gamma A''$ を得る．

制限付き総称包摂の定義より，$A'' \leq_{\{x:A''\}\Delta} A'$ は，型変数の抽象化はなく，具体化だけだということが分かる．よって，$A'' \leq_\Gamma A'$ も成り立つ．したがって，$A''' \leq_\Gamma A'' \leq_\Gamma A' \leq_\Gamma A$ を得る．これと，$\Gamma \vdash M' : A'''$ に，補題 6 を適用して，$\Gamma \vdash M' : A$ を得る．

規則 **VarSkip** の場合：上記の規則 **VarRef** の場合と同様.

規則 **IdR** の場合：$M \equiv M' \circ id$ とする．仮定 $\Gamma \vdash M : A$ と補題 3 より，$\Gamma \vdash id : \Delta$，$\Delta \vdash M' : A'$，

☆ 名前替えする型変数は，Δ において自由に出現しないし，A' においても抽象化されていて自由に出現しない．よって，$\Delta \vdash (M_1/x) \cdot M_2 : A'$ の導出木の途中の judgement における自由な型変数の名前替えがおこっても，結論である $\Delta \vdash (M_1/x) \cdot M_2 : A'$ においては束縛型変数の名前替えがおこっているにすぎない.

$A' \leq_\Gamma A$ をみたす環境型 Δ と型 A' が存在する．型付けのうち前者のものに補題 3 を適用すると，$\Gamma \leq_\Delta \Delta$ ということが分かる．したがって，$\Delta \vdash M' : A'$ に補題 7 を適用することができて，$\Gamma \vdash M' : A'$ を得る．さらに，$A' \leq_\Gamma A$ であるから補題 6 を適用して，$\Gamma \vdash M' : A$ を得る．

規則 **IdL** の場合：規則 **IdR** と同様．

[証明終]

後で使用する定義と性質をあげておく．

前述の型付け $\Gamma \vdash M : A$ は，項の構造とはギャップがあった．補題 3 をふまえると，項の構造と一致する型付けを定義することができる．

定義 9 （構文主導型付け） 構文主導型付け (syntax-directed typing) $\Gamma \rhd M : A$ は以下の規則により定義される．

$$\frac{A \leq_{\{x:A\}\Gamma} A'}{\{x : A\}\Gamma \rhd x : A'} \ \textbf{SDT-Var}$$

$$\frac{\{x : A\}\Gamma \rhd M : B \quad (A \to B) \leq_{\{x:C\}\Gamma} D}{\{x : C\}\Gamma \rhd \lambda x.M : D} \ \textbf{SDT-Abs}$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : A \to B \quad \Gamma \rhd N : A \quad B \leq_\Gamma B'}{\Gamma \rhd (MN) : B'} \ \textbf{SDT-App}$$

$$\frac{\Gamma \leq_\Gamma \Gamma'}{\Gamma \rhd id : \Gamma'} \ \textbf{SDT-Id}$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : A \ \Gamma \rhd N : \{x : B\}\Delta \ \{x : A\}\Gamma \leq_\Gamma D}{\Gamma \rhd (M/x) \cdot N : D} \ \textbf{SDT-Extn}$$

$$\frac{\Gamma \rhd N : \Delta \quad \Delta \rhd M : A \quad A \leq_\Gamma A'}{\Gamma \rhd (M \circ N) : A'} \ \textbf{SDT-Comp}$$

命題 3 $\Gamma \vdash M : A \Leftrightarrow \Gamma \rhd M : A$

($\Rightarrow$ の証明) 補題 3 による．

($\Leftarrow$ の証明) 制限付き総称包摂の定義と，型付け規則 **TypeAbs**，**TypeApp**，**TypeAbsInEnv**，**TypeAppInEnv** から，$\Gamma \vdash M : A$，かつ，$A \leq_\Gamma A'$ ならば，$\Gamma \vdash M : A$ である．このことを用いれば，$\Gamma \rhd M : A$ の構造に関する帰納法により証明される．

3. 強正規化可能性定理

本章では，強正規化可能性定理を証明することを目標とする．環境計算F_{env}から多相 λ 計算 F への変換を与え，F_{env}の強正規化可能性定理は，多相 λ 計算 F の強正規化可能性定理に帰着することにより証明する．環境は，F の直積（ペア）に変換する．F_{env} の各変数は，非負整数にコーディングされるものと考えられ，変数名による環境への参照は，多重直積に対する射影の適用に変換される．

以下では，変数は全順序関係 $<$ が定義されていると仮定する．

定義 10 （型変換） 変数の有限集合 $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_N\}$(ただし $x_1 < \cdots < x_N$) に対して，F_{env}の型から F への型への変換 $[\![-]\!]_\mathcal{V}$ を以下のように定義する．

$$[\![\alpha]\!]_\mathcal{V} \equiv \alpha,$$
$$[\![A \to B]\!]_\mathcal{V} \equiv [\![A]\!]_\mathcal{V} \to [\![B]\!]_\mathcal{V},$$
$$[\![\forall\alpha.A]\!]_\mathcal{V} \equiv \forall\alpha.[\![A]\!]_\mathcal{V},$$
$$[\![\{\overline{y_n : A_n}\}\rho]\!]_\mathcal{V} \equiv B_1 \times \cdots \times B_N \times 1,$$

ただし，$\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \mathcal{V}$ であり，

$$B_i \equiv [\![A_j]\!]_\mathcal{V} \quad (x_i \equiv y_j \text{のとき})$$
$$B_i \equiv 1 \quad (\text{その他})$$

をみたすものとする．型 1 は $\forall\alpha.\alpha \to \alpha$ を表す（参照：定義 20)．

たとえば，変数集合 $\mathcal{V}$ として，$\{w, x, y, z\}$ $(w < x < y < z)$ を考える．このとき，型 $\{x : A\}\{z : B\}\rho$ の変換は，

$$[\![\{x : A\}\{z : B\}\rho]\!]_\mathcal{V} \equiv 1 \times [\![A]\!]_\mathcal{V} \times 1 \times [\![B]\!]_\mathcal{V} \times 1$$

となる．ラベル名を自然数でコーディングすれば，直積（型）はラベル付き直積の代用となる．これにより，環境をラベル付き直積として解釈するわけである．

型変換は，型変数の代入に関して以下の性質をみたす．

補題 9 （代入補題）

$$[\![A[\alpha := B]]\!]_\mathcal{V} \equiv [\![A]\!]_\mathcal{V}[\alpha := [\![B]\!]_\mathcal{V}]$$

この補題は，型 A の構造に関する帰納法により容易に証明される．

変数名の有限集合 $\mathcal{V}$ における，名前のコードを対応させる関数は以下のように定義される．

定義 11 （変数のコード） 変数の有限集合 $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_N\}$(ただし $x_1 < \cdots < x_N$) と変数 x_i に対して，変数のコード $[\![x_i]\!]_\mathcal{V}$ を

$$[\![x_i]\!]_\mathcal{V} = i$$

と定義する．

以降では，議論の対象となる項や型に出現する変数をすべて含むように，集合 $\mathcal{V}$ は十分大きくとる．混乱がなければ $\mathcal{V}$ の記述は省略することがある．また，特に断わらない限り，π^N や ι^N で引用される正整数 N は $\mathcal{V}$ の要素の数である．

定義 12 （普遍環境型） 環境型の先頭に型抽象が 0 個以上続く型を普遍環境型と呼ぶ．すなわち，

$$\forall\alpha_1.\cdots\forall\alpha_m.\Gamma \quad (m \geq 0)$$

定義 13 （項の変換） F_{env}の型のついている項 M と，多相 λ 計算 F の項 L から多相 λ 計算の項

$[\![M]\!]_{\mathcal{V}}(L)$ への変換 $[\![-]\!](-)$ は以下により帰納的に定義される．ただし，有限の変数集合 $\mathcal{V}$ は，項 M に出現する変数はすべて含むものとする（以降，$[\![M]\!]_{\mathcal{V}}(L)$ において，この条件は暗黙に仮定されているものとする）．

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!]_{\mathcal{V}}(L) &\equiv \iota^N(\pi^N_{[\![x]\!]_{\mathcal{V}}}(L))(x \text{ が普遍環境型をもつ})\\
&\equiv \pi^N_{[\![x]\!]_{\mathcal{V}}}(L) \text{（その他）}\\
[\![\lambda x.M]\!]_{\mathcal{V}}(L) &\equiv \lambda v.[\![M]\!]_{\mathcal{V}}(\iota^N(\mathsf{update}(\iota^N(L),\\
&\qquad [\![x]\!]_{\mathcal{V}}, v)))\\
[\![MN]\!]_{\mathcal{V}}(L) &\equiv \iota^N([\![M]\!](L)\ [\![N]\!](L))\\
&\qquad ((MN) \text{ が普遍環境型をもつ場合})\\
&\equiv [\![M]\!](L)\ [\![N]\!](L) \text{（その他）}\\
[\![id]\!]_{\mathcal{V}}(L) &\equiv \iota^N(L)\\
[\![(M/x)\cdot N]\!]_{\mathcal{V}}(L) &\\
&\equiv \mathsf{update}(\iota^N([\![N]\!]_{\mathcal{V}}(L)), [\![x]\!]_{\mathcal{V}}, [\![M]\!]_{\mathcal{V}}(L))\\
[\![(M\circ N)]\!]_{\mathcal{V}}(L) &\equiv \iota^N([\![M]\!]_{\mathcal{V}}(\iota^N([\![N]\!]_{\mathcal{V}}(L))))\\
&\qquad ((M\circ N) \text{ が普遍環境型をもつ}\\
&\equiv [\![M]\!]_{\mathcal{V}}(\iota^N([\![N]\!]_{\mathcal{V}}(L))) \text{ (その他)}
\end{aligned}
$$

以下では，混乱がない場合は，ι^N や π^N_i における “N” を随時省略するものとする．

補題 10 $\Gamma \rhd_{F_{env}} M : A$ かつ $\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]_{\mathcal{V}}$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ ならば，$\Delta \vdash_F [\![M]\!]_{\mathcal{V}}(L) : [\![A]\!]_{\mathcal{V}}$.

この補題と命題 3（$\vdash$ と $\rhd$ の等価性）により以下の定理が成り立つ．

定理 2 $\Gamma \vdash_{F_{env}} M : A$ かつ $\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]_{\mathcal{V}}$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ ならば，$\Delta \vdash_F [\![M]\!]_{\mathcal{V}}(L) : [\![A]\!]_{\mathcal{V}}$.

補題 10 を証明する準備として以下の補題を示しておく．

補題 11

- $\Delta \vdash_F M : [\![A]\!]_{\mathcal{V}}$ かつ $A \preceq_\Delta A'$ ならば，$\Delta \vdash_F M : [\![A']\!]_{\mathcal{V}}$.
- $\Delta \vdash_F M : [\![A]\!]_{\mathcal{V}}$ かつ $A \leq_\Delta A'$ とする．A' が普遍環境型の場合，$\Delta \vdash_F \iota^n(M) : [\![A']\!]_{\mathcal{V}}$．その他の場合，$\Delta \vdash_F M : [\![A']\!]_{\mathcal{V}}$．（ただし，$n$ は集合 $\mathcal{V}$ の濃度）

（補題 11 の証明：前半） $A \preceq_\Delta A'$ の構造に関する場合分けにより証明する．

$\forall\alpha.A \leq_\Delta A[\alpha := B]$ の場合：$\Delta \vdash_F M : [\![\forall\alpha.A]\!]$ と仮定する．型の変換の定義より，$[\![\forall\alpha.A]\!] \equiv \forall\alpha.[\![A]\!]$ である．よって，仮定より，$\Delta \vdash_F M : [\![A]\!][\alpha := [\![B]\!]]$ が導かれる．この右辺の型について，補題 9 より，$[\![A]\!][\alpha := [\![B]\!]] \equiv [\![A[\alpha := B]]\!]$ という等式が成り立つ．よって，$\Delta \vdash_F M : [\![A[\alpha := B]]\!]$.

$A \leq_\Delta \forall\alpha.A$ の場合：同様．

（補題 11 の証明：後半） $A \leq_\Delta A'$ の構造に関する帰納法により証明する．

反射律の場合（step case）は明らか．「$A \preceq_\Delta B$ ならば $A \leq_\Delta B$」の場合（base case）は，上記の場合から明らか．

「$A \preceq_\Delta B$ ならば $\{x : A\}\Gamma \leq_\Delta \{x : B\}\Gamma$」の場合（base case）：$\Delta \vdash_F M : [\![\{x : A\}\Gamma]\!]$ と $A \preceq_\Delta B$ を仮定する．$[\![\{x : A\}\Gamma]\!]$ は n 重直積で，$[\![x]\!]_{\mathcal{V}}$ 番目の要素が型 A である．命題 4・命題 5 に述べたとおり，ι を適用すれば，要素ごとに型抽象・型具体化が可能である．前半の証明より，仮定 $A \preceq_\Delta B$ は，型変数の具体化，もしくは，抽象化を意味する．したがって，$\Delta \vdash_F \iota^n(M) : [\![\{x : A\}\Gamma]\!]$ が成り立つ．

推移律の場合（step case）：$\Delta \vdash_F M : [\![A]\!]$，$A \leq_\Delta A' \leq_\Delta A''$ と仮定する．

$A \leq_\Delta A'$ に対する帰納法の仮定より，$\Delta \vdash_F M : [\![A']\!]$，もしくは，$\Delta \vdash_F \iota(M) : [\![A']\!]$.

前者の場合，$A' \leq_\Delta A''$ に対する帰納法の仮定より，$\Delta \vdash_F M : [\![A'']\!]$，もしくは，$\Delta \vdash_F \iota(M) : \iota([\![A'']\!])$.

後者の場合，同様に $A' \leq_\Delta A''$ に対する帰納法の仮定よって，$\Delta \vdash_F \iota(M) : [\![A'']\!]$，もしくは，$\Delta \vdash_F \iota(\iota(M)) : [\![A'']\!]$．命題 6 で述べたとおり，

$$\iota(\iota(M)) \xrightarrow{*} \iota(M)$$

である．多相 λ 計算 F の主部簡約定理により，$\Delta \vdash_F \iota(M) : [\![A'']\!]$ である．

[証明終]

次の補題は，M の構造に関する帰納法により証明される．

補題 12 $\Gamma \vdash_{F_{env}} M : A$ で，A が普遍環境型ならば，$[\![M]\!](L)$ は，ι で始まる項であるか，もしくは，update で始まる項である．

（補題 10 の証明） $\Gamma \rhd_{F_{env}} M : A$ の構造に関する帰納法（すなわち，M の構造に関する帰納法）により証明する．

変数の場合：

$$\frac{A \leq_{\{x:A\}\Gamma} A'}{\{x : A\}\Gamma \rhd x : A'}\ \textbf{SDT-Var},$$

$\Delta \vdash_F L : [\![\{x : A\}\Gamma]\!]$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\{x : A\}\Gamma)$ と仮定する．

型 A' が普遍環境型の場合：$[\![x]\!](L) \equiv \iota(\pi_{[\![x]\!]}(L))$．仮定より，$\Delta \vdash_F \pi_{[\![x]\!]}(L) : [\![A]\!]$. $A \leq_{\{x:A\}\Gamma} A'$ だから，$A \leq_\Delta A'$．よって，補題 11 より，$\Delta \vdash_F \iota(\pi_{[\![x]\!]}(L)) : [\![A']\!]$.

その他の場合：$[\![x]\!](L) \equiv \pi_{[\![x]\!]}(L)$. 仮定より，$\Delta \vdash_F \pi_{[\![x]\!]}(L) : [\![A]\!]$. $A \leq_{\{x:A\}\Gamma} A'$ だから，$A \leq_\Delta A'$．よって，補題 11 より，$\Delta \vdash_F \pi_{[\![x]\!]}(L) : [\![A']\!]$.

λ 抽象の場合：

$$\frac{\{x:A\}\Gamma \rhd M:B \quad (A \to B) \leq_{\{x:C\}\Gamma} D}{\{x:C\}\Gamma \rhd \lambda x.M : D}\ \textbf{SDT-Abs},$$

$\Delta \vdash_F L : [\![\{x:C\}\Gamma]\!]$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\{x:C\}\Gamma)$ と仮定する．前者より，$\Delta \vdash_F \iota(L) : [\![\{x:C\}\Gamma]\!]$ をえて，さらに，

$\{v:[\![A]\!]\}\Delta \vdash_F \mathsf{update}(\iota(L), [\![x]\!], v) : [\![\{x:A\}\Gamma]\!]$

であり，

$\{v:[\![A]\!]\}\Delta \vdash_F \iota(\mathsf{update}(\iota(L), [\![x]\!], v)) : [\![\{x:A\}\Gamma]\!]$

となる．帰納法の仮定より，

$\{v:[\![A]\!]\}\Delta \vdash_F [\![M]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(L), [\![x]\!], v))) : [\![B]\!]$

である．F の型付け規則より，

$\Delta \vdash_F \lambda v.[\![M]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(L), [\![x]\!], v))) : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.

$(A \to B) \leq_{\{x:C\}\Gamma} D$ より，$(A \to B) \leq_\Delta D$. よって，補題 11 より，

$$\Delta \vdash_F \lambda v.[\![M]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(L), [\![x]\!], v))) : [\![D]\!].$$

関数適用の場合：

$$\frac{\Gamma \rhd M : A \to B \quad \Gamma \rhd N : A \quad B \leq_\Gamma B'}{\Gamma \rhd (MN) : B'}\ \textbf{SDT-App},$$

$\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ と仮定する．

帰納法の仮定より，$\Delta \vdash_F [\![M]\!](L) : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$, $\Delta \vdash_F [\![N]\!](L) : [\![A]\!]$ を得る．型付け規則より，

$$\Delta \vdash_F [\![M]\!](L)[\![N]\!](L) : [\![B]\!].$$

$B \leq_\Gamma B'$ より，$B \leq_\Delta B'$.

型 A' が普遍環境型の場合：補題 11 より，

$$\Delta \vdash_F \iota([\![M]\!](L)[\![N]\!](L)) : [\![B']\!],$$

すなわち，

$$\Delta \vdash_F [\![(MN)]\!](L) : [\![B']\!].$$

その他の場合：補題 11 より，

$$\Delta \vdash_F ([\![M]\!](L)[\![N]\!](L)) : [\![B']\!],$$

すなわち，

$$\Delta \vdash_F [\![(MN)]\!](L) : [\![B']\!].$$

恒等環境の場合：

$$\frac{\Gamma \leq_\Gamma \Gamma'}{\Gamma \rhd id : \Gamma'}\ \textbf{SDT-Id},$$

$\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ と仮定する．前者より，$\Delta \vdash_F \iota(L) : [\![\Gamma]\!]$ であるが，$[\![id]\!](L) \equiv \iota(L)$ だったから，$\Delta \vdash_F [\![id]\!](L) : [\![\Gamma]\!]$. $\Gamma \leq_\Gamma \Gamma'$ より，$\Gamma \leq_\Delta \Gamma'$. よって，補題 11 より，$\Delta \vdash_F [\![id]\!](L) : [\![\Gamma']\!]$.

環境拡張の場合：

$$\frac{\Gamma \rhd M : A \quad \Gamma \rhd N : \{x:B\}\Pi \quad \{x:A\}\Delta' \leq_\Gamma D}{\Gamma \rhd (M/x)\cdot N : D},$$

$\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ と仮定する．帰納法の仮定より，

$\Delta \vdash_F [\![M]\!](L) : [\![A]\!]$, $\Delta \vdash_F [\![N]\!](L) : [\![\{x:B\}\Pi]\!]$.

後者から，$\Delta \vdash_F \iota([\![N]\!](L)) : [\![\{x:B\}\Pi]\!]$ であり，よって，

$\Delta \vdash_F \mathsf{update}(\iota([\![N]\!](L)), [\![x]\!], [\![M]\!](L)) : [\![\{x:A\}\Pi]\!]$.

$\{x:A\}\Pi \leq_\Gamma D$ より，$\{x:A\}\Pi \leq_\Delta D$. よって，補題 11 を用いて，

$$\Delta \vdash_F \mathsf{update}(\iota([\![N]\!](L)), [\![x]\!], [\![M]\!](L)) : [\![D]\!],$$

すなわち，$\Delta \vdash_F [\![(M/x)\cdot N]\!](L) : [\![D]\!]$.

環境合成の場合：

$$\frac{\Gamma \rhd N : \Pi \quad \Pi \rhd M : A \quad A \leq_\Gamma A'}{\Gamma \rhd (M \circ N) : A'}\ \textbf{SDT-Comp},$$

$\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]$ かつ $\mathsf{Ftv}(\Delta) \subseteq \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ と仮定する．項 N に関する帰納法の仮定より，$\Delta \vdash_F [\![N]\!](L) : [\![\Pi]\!]$. よって，$\Delta \vdash_F \iota([\![N]\!](L)) : [\![\Pi]\!]$. 項 M に関する帰納法の仮定より，

$$\Delta \vdash_F [\![M]\!](\iota([\![N]\!](L))) : [\![A]\!].$$

$A \leq_\Gamma A'$ より，$A \leq_\Delta A'$.

型 A' が普遍環境型の場合：補題 11 により，$\Delta \vdash_F \iota([\![M]\!](\iota([\![N]\!](L)))) : [\![A']\!]$, すなわち，$\Delta \vdash_F [\![M \circ N]\!](L) : [\![A']\!]$.

その他の場合：補題 11 により，$\Delta \vdash_F [\![M]\!](\iota([\![N]\!](L))) : [\![A']\!]$, すなわち，$\Delta \vdash_F [\![M \circ N]\!](L) : [\![A']\!]$.

[証明終]

補題 13 $\Delta \vdash_F L : [\![\Gamma]\!]$, $\Gamma \vdash_{F_{env}} M : A$, $\Gamma \vdash_{F_{env}} M' : A$ と仮定する．

- $M \underset{\sigma}{\to} M'$ ならば，$[\![M]\!](\iota(L)) \xrightarrow{*} [\![M']\!](\iota(L))$.
- $M \underset{\beta}{\to} M'$ ならば，$[\![M]\!](\iota(L)) \xrightarrow{+} [\![M']\!](\iota(L))$.

（証明） 簡約の導出の構造に関する帰納法により証明する．

Context の場合： 明らか.

Beta の場合：$M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$, $M' \equiv M_1 \circ (M_2/x)\cdot id$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$\begin{aligned}
&[\![M]\!](L') \\
&\equiv [\![(\lambda x.M_1)M_2]\!](L') \\
&\equiv [\![\lambda x.M_1]\!](L') \ \ [\![M_2]\!](L') \\
&\equiv \lambda v.[\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(L'), [\![x]\!], v))) \ \ [\![M_2]\!](L') \\
&\to [\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(L'), [\![x]\!], \ [\![M_2]\!](L')\ )))
\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}
&[\![M']\!](L') \\
&\equiv [\![M_1 \circ (M_2/x)\cdot id]\!](L') \\
&\equiv [\![M_1]\!](\iota([\![(M_2/x)\cdot id]\!](L'))) \\
&\equiv [\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(L'), [\![x]\!], [\![M_2]\!](L'))))
\end{aligned}$$

よって，$[\![M]\!](L') \to [\![M']\!](L')$.

BetaClos の場合：$M \equiv ((\lambda x.M_1) \circ M_2)M_3$, $M' \equiv M_1 \circ (M_3/x)\cdot M_2$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](L') \\
\equiv\ &[\![((\lambda x.M_1) \circ M_2)M_3]\!](L') \\
\equiv\ &[\![(\lambda x.M_1) \circ M_2]\!](L')\ \ [\![M_3]\!](L') \\
\equiv\ &[\![\lambda x.M_1]\!](\iota[\![M_2]\!](L'))\ \ [\![M_3]\!](L') \\
\equiv\ &\lambda v.[\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(\iota[\![M_2]\!](L')), [\![x]\!], v))) \\
&[\![M_3]\!](L') \\
\to\ &[\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota(\iota([\![M_2]\!](L'))), [\![x]\!], \\
&[\![M_3]\!](L')))) \\
\to\ &[\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota([\![M_2]\!](L')), [\![x]\!], \\
&[\![M_3]\!](L'))))
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&[\![M']\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1 \circ (M_3/x) \cdot M_2]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota([\![(M_3/x) \cdot M_2]\!](L'))) \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota([\![M_2]\!](L')), [\![x]\!], \\
&[\![M_2]\!](L'))))
\end{aligned}
$$

よって，$[\![M]\!](L') \xrightarrow{+} [\![M']\!](L')$.

IdL の場合：$M \equiv id \circ M'$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![id \circ M']\!](L') \\
\equiv\ &[\![id]\!](\iota([\![M']\!](L'))) \\
\equiv\ &\iota(\iota([\![M']\!](L'))) \\
\xrightarrow{+}\ &\iota([\![M']\!](L')).
\end{aligned}
$$

項 M' は普遍環境型だから，補題 12 により，$[\![M']\!](L')$ は ι で始まる項であることが分かる．よって，$\iota([\![M']\!](L')) \xrightarrow{+} [\![M']\!](L')$. したがって，$[\![M]\!](L') \xrightarrow{+} [\![M']\!](L')$，よって，$[\![M]\!](L') \xrightarrow{*} [\![M']\!](L')$.

IdR の場合：$M \equiv M' \circ id$ と仮定する．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](\iota(L)) \\
\equiv\ &[\![M' \circ id]\!](\iota(L)) \\
\equiv\ &[\![M']\!](\iota([\![id]\!](\iota(L)))) \\
\equiv\ &[\![M']\!](\iota(\iota(\iota(L)))) \\
\xrightarrow{+}\ &[\![M']\!](\iota(L)).
\end{aligned}
$$

したがって，$[\![M]\!](\iota(L)) \xrightarrow{*} [\![M']\!](\iota(L))$.

VarRef の場合：$M \equiv x \circ (M'/x) \cdot M''$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](L') \\
\equiv\ &[\![x \circ (M'/x) \cdot M'']\!](L') \\
\equiv\ &[\![x]\!](\iota([\![(M'/x) \cdot M'']\!](L'))) \\
\equiv\ &[\![x]\!](\iota(\mathsf{update}(\iota([\![M'']\!](L'), [\![x]\!], [\![M']\!](L'))))) \\
\equiv\ &\pi_{[\![x]\!]}(\iota(\mathsf{update}(\iota([\![M'']\!](L'), [\![x]\!], [\![M']\!](L'))))) \\
\xrightarrow{+}\ &\pi_{[\![x]\!]}(\mathsf{update}(\iota([\![M'']\!](L'), [\![x]\!], [\![M']\!](L')))) \\
\xrightarrow{+}\ &[\![M']\!](L').
\end{aligned}
$$

したがって，$[\![M]\!](\iota(L)) \xrightarrow{*} [\![M']\!](\iota(L))$.

VarSkip の場合：$M \equiv y \circ (M_1/x) \cdot M_2$，$M' \equiv y \circ M_2$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](L) \\
\equiv\ &[\![y \circ (M_1/x) \cdot M_2]\!](L') \\
\equiv\ &[\![y]\!](\iota([\![(M_1/x) \cdot M_2]\!](L'))) \\
\equiv\ &\pi_{[\![y]\!]}(\iota(\mathsf{update}(\iota([\![M_2]\!](L')), [\![x]\!], [\![M_1]\!](L')))) \\
\xrightarrow{+}\ &\pi_{[\![y]\!]}(\mathsf{update}(\iota([\![M_2]\!](L')), [\![x]\!], [\![M_1]\!](L'))) \\
\xrightarrow{+}\ &\pi_{[\![y]\!]}(\iota([\![M_2]\!](L'))) \\
\equiv\ &[\![y \circ M_2]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M']\!](L').
\end{aligned}
$$

したがって，$[\![M]\!](\iota(L)) \xrightarrow{*} [\![M']\!](\iota(L))$.

Assoc の場合：$M \equiv (M_1 \circ M_2) \circ M_3$，$M' \equiv M_1 \circ (M_2 \circ M_3)$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](L') \\
\equiv\ &[\![(M_1 \circ M_2) \circ M_3]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1 \circ M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L'))) \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota([\![M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L'))))).
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&[\![M']\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1 \circ (M_2 \circ M_3)]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota([\![M_2 \circ M_3]\!](L'))) \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota([\![M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L'))))).
\end{aligned}
$$

よって，$[\![M]\!](L') \equiv [\![M']\!](L)$，すなわち，$[\![M]\!](L') \xrightarrow{*} [\![M']\!](L)$.

DApp の場合：$M \equiv (M_1 M_2) \circ M_3$，$M' \equiv (M_1 \circ M_3)(M_2 \circ M_3)$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](L') \\
\equiv\ &[\![(M_1 M_2) \circ M_3]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1 M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L'))) \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))\ [\![M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L'))).
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&[\![M']\!](L') \\
\equiv\ &[\![(M_1 \circ M_3)(M_2 \circ M_3)]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1 \circ M_3]\!](L')\ [\![M_2 \circ M_3]\!](L') \\
\equiv\ &[\![M_1]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))\ [\![M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L'))).
\end{aligned}
$$

よって，$[\![M]\!](L') \equiv [\![M']\!](L)$，すなわち，$[\![M]\!](L') \xrightarrow{*} [\![M']\!](L)$.

DExtn の場合：$M \equiv ((M_1/x) \cdot M_2) \circ M_3$，$M' \equiv ((M_1 \circ M_3)/x) \cdot (M_2 \circ M_3)$ と仮定する．$L' \equiv \iota(L)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
&[\![M]\!](L')\\
&\equiv [\![((M_1/x)\cdot M_2)\circ M_3]\!](L')\\
&\equiv [\![(M_1/x)\cdot M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))\\
&\equiv \ \mathsf{update}(\iota([\![M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))), [\![x]\!],\\
&\qquad\qquad [\![M_1]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))).
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&[\![M']\!](L')\\
&\equiv [\![((M_1\circ M_3)/x)\cdot (M_2\circ M_3)]\!](L')\\
&\equiv \ \mathsf{update}(\iota([\![M_2\circ M_3]\!](L')), [\![x]\!],\\
&\qquad\qquad [\![M_1\circ M_3]\!](L')),\\
&\equiv \ \mathsf{update}(\iota([\![M_2]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))), [\![x]\!],\\
&\qquad\qquad [\![M_1]\!](\iota([\![M_3]\!](L')))).
\end{aligned}
$$

よって，$[\![M]\!](L') \equiv [\![M']\!](L)$，すなわち，$[\![M]\!](L') \xrightarrow{*} [\![M']\!](L)$.

[証明終]

次に，σ 簡約の停止性を証明する．

定義 14 (項の大きさ) 項 M の大きさ $|M|(>0)$ を以下のように，項の構造に関して帰納的に定義する．

$$
\begin{aligned}
|x| &\equiv 1,\\
|\lambda x.M| &\equiv 2|M|,\\
|(MN)| &\equiv |M|+|N|+1,\\
|id| &\equiv 1,\\
|(M/x)\cdot N| &\equiv |M|+|N|+1,\\
|(M\circ N)| &\equiv |M|(|N|+1).
\end{aligned}
$$

定理 3 （σ 簡約の停止性） σ 簡約 $\xrightarrow[\sigma]{}$ は停止する．すなわち，$M_1 \xrightarrow[\sigma]{} M_2 \xrightarrow[\sigma]{} \cdots$ という σ 簡約の無限簡約列は存在しない．

（証明） 項の大きさは，1 以上の整数であるので，$M \xrightarrow[\sigma]{} M'$ ならば，$|M| > |M'|$ ということを示せば十分である．このことを簡約の導出の構造に関する帰納法により証明する．

Context の場合：明らか．

IdL の場合：$|id\circ M| = |M|+1 > |M|$.

IdR の場合：$|M\circ id| = 2|M| > |M|$.

VarRef の場合：$|x\circ(M/x)\cdot N| = |M|+|N|+2 > |M|$.

VarSkip の場合：

$|y\circ(M/x)\cdot N| = |M|+|N|+2 > |N|+1 = |y\circ N|$.

Assoc の場合：

$$
\begin{aligned}
&|(L\circ M)\circ N|\\
&\equiv |L\circ M|(|N|+1)\\
&\equiv |L|(|M|+1)(|N|+1)\\
&\equiv |L||M||N|+|L||N|+|L||M|+|L|.
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&|L\circ(M\circ N)|\\
&\equiv |L|(|M\circ N|+1)\\
&\equiv |L|\{|M|(|N|+1)+1\}\\
&\equiv |L||M||N|+|L||M|+|L|.
\end{aligned}
$$

よって，

$$|(L\circ M)\circ N| > |L\circ(M\circ N)|.$$

DApp の場合：

$$
\begin{aligned}
&|(MN)\circ L|\\
&\equiv |MN|(|L|+1)\\
&\equiv (|M|+|N|+1)(|L|+1)\\
&\equiv |M||L|+|N||L|+|L|+|M|+|N|+1.
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&|(M\circ L)(N\circ L)|\\
&\equiv |M\circ L|+|N\circ L|+1\\
&\equiv |M||L|+|M|+|N||L|+|N|+1.
\end{aligned}
$$

よって，

$$|(MN)\circ L| > |(M\circ L)(N\circ L)|.$$

DExtn の場合：

$$
\begin{aligned}
&|((M/x)\cdot N)\circ L|\\
&= (|M|+|N|+1)(|L|+1)\\
&= |M||L|+|N||L|+|L|+|M|+|N|+1.
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&|(((M\circ L)/x)\cdot(N\circ L))|\\
&= \{|M|(|L|+1)\}+\{|N|(|L|+1)\}+1\\
&= |M||L|+|M|+|N||L|+|N|+1.
\end{aligned}
$$

よって，

$$|((M/x)\cdot N)\circ L| > |(((M\circ L)/x)\cdot(N\circ L))|.$$

[証明終]

論文 5) において，型なし環境計算において合流性が成り立つことが示されている．

定理 4 （簡約の合流性） $M \xrightarrow{*} M_1$ かつ $M \xrightarrow{*} M_2$ ならば，$M_1 \xrightarrow{*} M'$ かつ $M_2 \xrightarrow{*} M'$ をみたす項 M' が存在する．

よって，簡約の停止性を示せば，強正規化可能性定理が示される．

補題 14 （簡約の停止性） $M_1 \to M_2 \to \cdots$ という無限簡約列は存在しない．

（証明） $M_1 \to M_2 \to \cdots$ という無限簡約列が存在したとする．σ 簡約は停止性をみたしたから，この無限簡約列は β 簡約を無限に含む．補題 10，13 より，各項を変換したものも，多相 λ 計算 F の簡約列となる．

$$[\![M_1]\!](L) \xrightarrow{*} [\![M_2]\!](L) \xrightarrow{*} \cdots$$

補題 13 より，β 簡約は F の $\xrightarrow{+}$ に変換されるので，この簡約列は F の無限簡約列となってしまうが，F は強正規化可能性をみたすので，矛盾である．

よって，F_{env}には無限簡約列は存在しない．

[証明終]

定理 5 （簡約の強正規化可能性定理） 任意の項 M に対して，どのように簡約しても，同じ正規形（これ以上簡約できない形）$\mathsf{SN}(M)$ に至る．

（証明） 正規形の存在は，簡約の停止性（補題 14）より成り立つ．

正規形として V，V' があったとする．

$$M \to \cdots \to V,$$
$$M \to \cdots \to V'$$

合流性により $V \overset{*}{\to} V'''$，$V' \overset{*}{\to} V'''$ なる V''' が存在する．V，V' はこれ以上簡約できない項だったから，$V \equiv V''' \equiv V'$．よって正規形の一意性もいえた．

[証明終]

4. おわりに

本論文では，多相環境計算F_{env}を提唱し，F_{env}を多相 λ 計算 System F 上で解釈することにより強正規化可能性定理を示した．

本論文および論文 5)，6) で研究してきた体系の他に，環境計算の体系としては佐藤らにより提唱された体系として，$\lambda\epsilon$ 計算[8)] がある．彼らの体系における多相型体系およびその体系における強正規化可能性定理に対して，本論文のような手法が適用できるかどうか検討することは興味深い課題であろう．

参考文献

1) Abadi, M., Cardelli, L., Curien, P.-L. and Lévy, J.-J.: Explicit Substitutions, *Journal of Functional Programming*, Vol.1, No.4, pp.375–416 (1991).
2) Girard, J.-Y.: Interpretation fonctionelle et elimination des coupure dans l'arithmetic d'ordre superieur, Ph.D. Thesis, L'université Paris VII (1972).
3) Girard, J.-Y., Taylor, P. and Lafont, Y.: Proofs and Types, *Cambridge Tracts in Computer Science*, Vol.7, Cambridge University Press (1989).
4) Hanson, C.: *MIT Scheme Reference Manual*, 7.7.1 edition, MIT (2002).
5) Nishizaki, S.: Simply Typed Lambda Calculus with First-Class Environments, *Publications of Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University*, Vol.30, No.6, pp.1055–1121 (1995).
6) Nishizaki, S.: Polymorphic Environment Calculus and Its Type Inference Algorithm, *Higher-Order and Symbolic Computation*, Vol.13, No.3 (2000).
7) Kelsey, R.W.C. and Rees, J.: Revised^5 Report on the Algorithmic Language Scheme, *SIGPLAN Notices*, Vol.33, No.9, pp.26–76 (1998).
8) Sato, M., Sakurai, T. and Burstall, R.: Explicit Environments, *Typed Lambda Calculi and Applications* (1999).

付録

A.1 諸定義

定義 15 関数 Dom 環境型 Γ に対し，項変数の有限集合 $\mathsf{Dom}(\Gamma)$ は以下のように定義される．

$$\mathsf{Dom}(\{\overline{x_n : A_n}\}\rho) \equiv \{x_1, \ldots, x_n\}$$

定義 16 （環境型変数への代入） 条件

$$\mathsf{Dom}(\Gamma) \cap \mathsf{PVar}(\rho) \neq \emptyset$$

をみたす，型 A, 環境型変数 ρ, 環境型 Γ に対し，A における ρ の Γ への代入 $A[\rho := \Gamma]$ は以下のように帰納的に定義される．

$$\alpha[\rho := \Gamma] \equiv \alpha$$
$$(A \to B)[\rho := \Gamma] \equiv A[\rho := \Gamma] \to B[\rho := \Gamma]$$
$$(\forall\alpha.A)[\rho := \Gamma] \equiv \forall\alpha.(A[\rho := \Gamma])$$
(ただし,$\alpha \notin \mathsf{Ftv}(\Gamma)$)
$$(\{\overline{x_n : A_n}\}\rho)[\rho := \Gamma] \equiv \{\overline{x_n : A_n[\rho := \Gamma]}\}\Gamma$$
(ただし,$\Gamma \equiv \{\overline{y_m : B_m}\}\rho''$とすると，$\mathsf{PVar}(\rho) \subseteq \mathsf{PVar}(\rho'')$)
$$(\{\overline{x_n : A_n}\}\rho')[\rho := \Gamma] \equiv \{\overline{x_n : A_n}\}\rho'$$
(ただし，$\rho' \not\equiv \rho$)

この定義の前提条件と禁止変数に関する条件により，代入結果である環境型においても，「束縛される項変数は相異なる」という条件が成り立つことに注意せよ．

定義 17 （文脈） F_{env}の文脈（context）は以下の文法により定義される．

$$C[\,] ::= [\,] \mid \lambda x.C[\,] \mid (C[\,]N) \mid (MC[\,]) \mid id \mid (C[\,]/x)\cdot N \mid (M/x)\cdot C[\,] \mid (C[\,]\circ N) \mid (M \circ C[\,])$$

定義 18 （多相 λ 計算 F） 項は以下のように定義される．

$$A ::= \alpha \mid (A \to B) \mid \forall\alpha.A$$

型環境は，定義域が有限である，変数から型への部分関数であり，$\{x_1 : A_1\}\cdots\{x_n : A_n\}$ と表す．メタ変数としては，Γ，Δ などを用いる．

型付けは以下の型付け規則により定義される．

$$\frac{\Gamma \vdash x : A}{\{x : A\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (MN) : B}$$

$$\frac{\{x:A\}\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \alpha \notin \mathsf{Ftv}(\Gamma)}{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash M : A[\alpha := B]}$$

また，簡約関係は，項の間の二項関係であり，以下の規則から定義される．

$$(\lambda x.M)N \to M[x{:=}N]$$
$$\frac{M \to M'}{C[M] \to C[M']}$$

ただし，$C[-]$ は文脈（穴あき項）である．

定義 19 （多相 λ 計算 F における直積） 多相 λ 計算 F において，直積型 $A \times B$ は以下のように表現することができる．

$$A \times B \equiv \forall\alpha.(A \to B \to \alpha) \to \alpha,$$

直積型のコンストラクタ・デストラクタは以下のように定義される．

$$\langle M, N\rangle \equiv \lambda f.fMN,$$
$$\pi_1(M) \equiv M(\lambda x.\lambda y.x),\ \pi_2(M) \equiv M(\lambda x.\lambda y.y).$$

このように表現すると，

$$\pi_1(\langle M, N\rangle) \xrightarrow{*} M,\ \pi_2(\langle M, N\rangle) \xrightarrow{*} N$$

が成り立つ．

本論文では，$\times$ は右結合的とする．すなわち，

$$A_1 \times \cdots \times A_n \equiv A_1 \times (A_2 \times \cdots (A_{n-1} \times A_n)).$$

また，非負整数 $i(< n)$ に対して，

$$\pi_i^n(M) \equiv \pi_1(\pi_2(\cdots \pi_2(M)\cdots))$$

(ただし π_2 は $i-1$ 個) と定義する．π_i^n は，n 重対の $i(\le n)$ 番目の要素を取り出す射影関数を表す．

また，型 $A_1 \times \cdots \times A_n \times 1$ の項 M に対して，

$$\iota^n(M) \equiv \langle \pi_1^n(M), \pi_2^n(M), \ldots, \pi_n^n(M), 1\rangle$$

定義する．

定義 20 （型 1） ここで型 1 は，$\forall\alpha.\alpha \to \alpha$ とする．この型をもつ項としては，$\lambda x.x$ がある．

演算子 update を

$$\begin{aligned}&\mathsf{update}^N(M, i, L)\\ &\equiv \langle \pi_1^n(M), \ldots, \pi_{i-1}^n(M), L, \pi_{i+1}^n(M), \ldots,\\ &\quad \pi_n^n(M), 1\rangle\end{aligned}$$

と定義する．直感的には，n 重直積 M の第 i 番目の要素を L に置き換えたものを意味する．

直積型の項 M が与えられたとき，この項の形のまま，第 i 成分だけを型抽象することは一般にはできない．すなわち，$\Gamma \vdash M : A \times B$ から，$\alpha \notin \mathsf{Ftv}(\Gamma)$ が成り立っていたとしても，必ずしも $\Gamma \vdash M : (\forall\alpha.A) \times B$ を導くことはできないわけである．しかしながら，M の代わりに，$\langle \pi_1(M), \pi_2(M)\rangle$ という項を考えると，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : A}}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \forall\alpha.A} \quad \dfrac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : B}}{\Gamma \vdash \langle \pi_1(M), \pi_2(M)\rangle : (\forall\alpha.A) \times B}$$

は成り立つ．同様にして，この項は，第 2 成分を型抽象した型を持つ．すなわち，

$$\Gamma \vdash \langle \pi_1(M), \pi_2(M)\rangle : A \times (\forall\alpha.B)$$

また，これを n 重直積に一般化すると

命題 4

$$\begin{array}{c}\Gamma \vdash M : \cdots \times A_{i-1} \times A_i \times A_{i+1} \times \cdots\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \iota^n(M) : \cdots \times A_{i-1} \times \forall\alpha.A_i \times A_{i+1} \times \cdots\end{array}$$

をえる．また，具体化も同様である．

命題 5

$$\begin{array}{c}\Gamma \vdash M : \cdots \times A_{i-1} \times \forall\alpha.A_i \times A_{i+1} \times \cdots\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \iota^n(M) : \cdots \times A_{i-1} \times A_i[\alpha{:=}A] \times A_{i+1} \times \cdots\end{array}$$

また，ι は簡約に関して以下の性質をみたす．

命題 6

$$\pi_i^n(\iota^n(M)) \xrightarrow{*} \pi_i^n(M),$$
$$\iota^n(\iota^n(M)) \xrightarrow{*} \iota^n(M).$$

ι^n の “n” の記載は，混乱がない場合は省略することもある．

(平成 16 年 9 月 30 日受付)
(平成 16 年 12 月 27 日採録)

清水　亮

昭和 54 年生．平成 14 年東京工業大学工学部電気電子工学科卒業．平成 16 年東京工業大学大学院理工学研究科国際開発工学専攻修士課程修了．同年新日鉄ソリューションズ株式会社入社．

西崎　真也（正会員）

昭和 42 年生．平成 6 年京都大学大学院理学研究科数理解析専攻博士後期課程修了．同年岡山大学工学部情報工学科助手．平成 8 年千葉大学理学部数学・情報数理学科助教授．平成 10 年東京工業大学大学院情報理工学研究科計算工学専攻助教授，現在に至る．日本ソフトウェア科学会各会員．