

ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームでの 協調率に関する Random Graph の優位性

當眞 ジェイソン翔^{1,a)} 佐藤 尚^{2,b)}

概要: 本研究では、ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおいてネットワーク構造がもたらすプレイヤー間の協調率について議論する。塚本らは、特定のベキ乗指数をもつ Scale-Free Network を採用したネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおいて協調が促進されると主張した。しかし、彼らが実験で用いた囚人のジレンマゲームの利得行列は通常用いられていないものであった。また、Scale-Free Network 以外のネットワーク構造で、塚本らと同様の実験を行った研究は見当たらない。そこで本研究では、ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおいて、様々なネットワーク構造の違いが各プレイヤーの協調状態にどのような影響を及ぼすのかを調べることを目的とする。シミュレーション実験の結果、最も協調率が高かったネットワークは Random Graph であることが分かった。更に、初期配置時の協調者が 4 割以上存在する Random Graph では、最終的には協調率が 6 割を超えるということが分かった。

キーワード: 複雑ネットワーク, ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲーム, 協調率, ゲーム理論, グラフ理論, マルチエージェント・システム

1. 序論

世の中には、軍拡競争など、囚人のジレンマゲームを用いて表される事象が多く存在する。囚人のジレンマゲームは、人間社会における利害の対立と協力の可能性を考察するモデルである [1]。囚人のジレンマゲームには拡張されたモデルが多く存在し、格子空間上での n 人版囚人のジレンマゲーム [2] やネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲーム [3] はその拡張モデルの一例である。その中でもネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームは、ネットワーク上の頂点を「プレイヤー」、そして、辺を「ゲームを行う関係」と考えることで他の拡張モデルを表現することが出来る。よって、本研究では、多くの拡張モデルを表現可能であるネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームを研究対象とする。ここで、現実世界の問題をネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームに写像するにあたり、どのようなネットワーク構造だと協調が起きやすいかということを知る必要がある。

塚本らによる先行研究 [4] では、特定のベキ乗指数をもつ

Scale-Free Network[6] を採用したネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおいて協調が促進されると主張している。しかし、彼らが実験で用いていた囚人のジレンマゲームの利得行列は通常用いられていないものであった。また、Scale-Free Network 以外のネットワーク構造で、塚本らと同様の実験を行った研究は見当たらない。

そこで本研究では、ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおいて、ネットワーク構造の違いが各プレイヤーの協調状態にどのような影響を及ぼすのかを調べることを研究目的とする。具体的には、様々なネットワーク構造を用いてネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームの実験を行うことで、それらのネットワーク構造での協調の起きやすさを明らかにする。

2. ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームと 4 種類のネットワーク構造

2.1 囚人のジレンマゲームとそのルール

囚人のジレンマゲームは、2 者間のジレンマ状態を表現できるゲーム理論のモデルである [1]。2 人のプレイヤーを A, および B とし、それぞれが C (協調) と D (裏切り) の 2 種類の手を選択できるものとする。各プレイヤーはそれぞれ同時に上記 2 種類の手のうちどちらかを選択し、表 1 で表される利得行列に従って各プレイヤーは得点を得る。また、利得行列は、表 1 の右横に示した 2 つの制約を満た

¹ 東京大学
The University of Tokyo

² 沖縄工業高等専門学校
National Institute of Technology, Okinawa College

a) jayson-toma@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

b) stakashi@okinawa-ct.ac.jp

さなければならぬ [7].

表 1 囚人のジレンマゲームの利得行列.

		プレイヤー-Bの手	
		C (協調)	D (裏切り)
プレイヤー-Aの手	C (協調)	R	T
	D (裏切り)	S	P

囚人のジレンマの利得行列が満たすべき制約

(1) $T > R > P > S$

(2) $2R > T + S$

ここで、プレイヤー B の C (協調) と D (裏切り) の 2 種類の手のどちらを選択するかを決定する戦略を固定した時のプレイヤー A の戦略を考える。プレイヤー B が C (協調) を選択すると、プレイヤー A は協調すると R (Reward), 裏切ると T (Temptation) という利益を得る。表 1 に示される制約 (1) より $T > R$ であるから、プレイヤー A は裏切った方が高い利益を得る。もし、プレイヤー B が D (裏切り) を選択する場合、プレイヤー A は協調すると S (Sucker), 裏切ると P (Punishment) という利益を得る。同制約 (1) より $P > S$ であるから、プレイヤー A は裏切った方が高い利益を得る。これはプレイヤー A とプレイヤー B の立場を入れ替えても同様であるから、両プレイヤーは裏切りに誘引される。このとき、2 人のプレイヤーの利益は、どちらも協調したときの利益より低く、協調が生まれづらいことが分かる。

2.2 先行研究における利得行列の問題点

塚本ら [4] が実験で用いた利得行列は、Nowak らの研究 [2] に従って、表 2 のように利得行列で $P = 0$ としていた。しかし、これでは必ずしも裏切りの方に引き寄せられない。なぜならば、対戦相手が裏切りを選択すると、自身が協調しても、しなくても得られる得点は 0 になってしまうからである。また、この利得の設定では、囚人のジレンマゲームの利得行列が満たすべき制約 (1) 「 $T > R > P > S$ 」を満たしていないことになる。Nowak らは、この利得行列の設定について、論文で「我々は特別に (しかし囚人のジレンマゲームの本質を残しながら) この利得行列を用いた」[2] と主張している。しかし、その根拠となる理論の説明や、シミュレーションの結果は Nowak らの論文には示されていない。

2.3 ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームとそのルール

一般的な囚人のジレンマゲームでは 2 人のプレイヤーでゲームをプレイさせる。このプレイヤーの人数を 2 人よりも更に多くしたものが n 人版囚人のジレンマゲームである。

表 2 塚本らの研究 [4] での囚人のジレンマゲームの利得行列.

		プレイヤー-Bの手	
		C (協調)	D (裏切り)
プレイヤー-Aの手	C (協調)	1	1.4
	D (裏切り)	0	0

囚人のジレンマの利得行列が満たすべき制約

(1) $T > R > P > S$

(2) $2R > T + S$

更に加えて、各プレイヤー間の関係性をネットワークで表現したものがネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームである。

このネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームでは、まず、頂点集合 V と辺集合 E からなるネットワーク $G(V, E)$ を用意する。このネットワークの頂点は n 個用意するものとし、各頂点をプレイヤーとする。次に、ネットワーク上の辺で繋がっている全ての頂点間で囚人のジレンマゲームを行う [3]。本研究では、塚本ら [4] が提案したモデルを採用する。以下にそのモデルの動作手順を示す。

- (1) 実験に用いるネットワーク $G = G(V, E)$ を用意する。同時に、囚人のジレンマゲームに用いる利得行列 M を用意する。 M は 2×2 の実行列で、次式で与えられる。

$$M = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $M_{00} = R$ は自身と相手が強調した際の報酬 (Reward), $M_{01} = S$ は自身が協調、相手が裏切った際の報酬 (Sucker), $M_{10} = T$ は自身が裏切り、相手が協調した際の報酬 (Temptation), $M_{11} = P$ は自身と相手が裏切った際の報酬 (Punishment) を表す。

- (2) $\forall v \in V$ にラベル l_v を割当てる。このラベルは頂点を取る戦略を表す。ここで、 $l_v \in \{0, 1\}$ である。 $l_v = 0$ である場合、頂点 v は C (協調) という戦略を取ることを表す。 $l_v = 1$ である場合、頂点 v は D (裏切り) という戦略を取ることを表す。ここで、全ての頂点のラベルは、確率 p で 0 に、確率 $1-p$ で 1 になるものとする。
- (3) 以下の処理 (4), (5), (6) を N 回繰り返す:
- (4) $v \in V$ に隣接している頂点の集合を $\text{adj}(v)$ と書くことにする。このとき、 v のスコア s_v を次式を用いて算出する。

$$s_v = \sum_{u \in \text{adj}(v)} M_{l_v l_u} \quad (2)$$

- (5) $\forall v \in V$ のラベルを次式を用いて書き換える。以下の式で l'_v は頂点 v の新しいラベルを表すものとする。

$$l'_v = l_x, \text{ where } x \in \underset{u \in v \text{Adj}(v)}{\text{argmax}} s_u \quad (3)$$

- (6) i 番目の協調者の割合 c_i を求める。 c_i は次式で算出さ

れる。

$$c_i = \frac{|\{v|v \in V, l_v = 0\}|}{|V|} \quad (4)$$

(7) 上記 (4), (5), (6) のステップ N 回のうち、最後の L 回での c_i の平均 \bar{c} を求める。この値 \bar{c} を **協調率** と呼ぶ。式で記述すると協調率 \bar{c} は以下のように求められる。

$$\bar{c} = \frac{1}{L} \sum_{i=N-L+1}^N c_i \quad (5)$$

2.4 4 種類のネットワーク構造

2.4.1 Scale-Free Network

Scale-Free Network は、ネットワークの頂点の次数分布が次式で書けるようなネットワークのことを指す [6]。

$$p(k) \propto k^{-\gamma} \quad (6)$$

ここで、ネットワークの頂点の次数とは、その頂点に繋がっている別の頂点の個数を表す。式 (6) における γ はベキ乗指数という正の実数である。次数分布 $p(k)$ は、次数が k である頂点の個数を表す数値である。次数分布の式より、Scale-Free Network では、次数が大きい頂点が少なく、次数が小さい頂点が多いということが分かる。

現実世界において、Scale-Free Network は World Wide Web のページの繋がりのや、映画俳優の共演のネットワーク、タンパク質の反応ネットワーク等を表すネットワーク構造だと言われている [6]。

本研究の Scale-Free Network は、塚本らの研究 [4] と同様に、コンフィギュレーションモデル [8] によって生成される。

2.4.2 Tree Network

Tree Network は、ネットワークの頂点数を n とすると、その n 個の頂点と、 $n-1$ 本の辺によって構成される、**連結**なネットワークである。ここで、ネットワークが連結であるとは、ネットワークの任意の2つの頂点对が、辺をいくつか経由することでたどり着けるということを指す [6]。

現実世界において、Tree Network は、家系図、食物連鎖、連絡網、そして、オペレーティングシステムにおけるファイルシステムの構成など、階層構造があるものを表現する際に使われるネットワーク構造である [12]。

本研究では、Tree Network のモデルうち、Random Tree というモデルと Line Tree というモデルを使用する。

2.4.3 Small-World Network

Small-World Network は、Watts と Strogatz が提案したモデル [9] であり、複雑ネットワークの分野で研究対象とされているネットワーク構造の1つである。単純なモデルであるために、その性質をある程度解析でき、様々な分野で調べられている [6]。

2.4.4 Random Graph

Random Graph は、Erdős と Rényi によって体系的に導入され [10]、複雑ネットワークの分野で研究対象とされているネットワーク構造の1つである。本研究では、生成アルゴリズムとして Chakrabarti らが提案した R-MAT (Recursive Matrix) モデルを使用する [11]。

3. シミュレーション実験

3.1 利得行列およびネットワークを変えて平均協調率を求める実験

第 2.2 節で述べたように、塚本らが彼らの研究で用いていた利得行列は、囚人のジレンマゲームが本来満たすべき制約条件を満たしていなかった [4]。そこで、本来の囚人のジレンマの利得行列を追加して、塚本らの実験と同様の実験を行う。ここでは、この実験を「シミュレーション実験 1」と呼ぶことにする。

なお、追加する利得行列は、表 2 において、両プレイヤーが裏切ったときの報酬 P のみを変えたものとする。なぜならば、 $0 < P < 0.7$ とすれば、他の成分を変えずとも、2つの制約条件を満たす利得行列になるからである。塚本らは Scale-Free Network のみの平均協調率を算出していたが [4]、本実験では他のネットワーク構造についても平均協調率を求め、協調の起きやすさを調べる。

3.1.1 シミュレーション実験 1 の内容

塚本らのシミュレーション実験 [4] では、ベキ乗指数が異なる 10 種類の Scale-Free Network について、以下の手順を基に**平均協調率**という値を求めていた。

- (1) それぞれの Scale-Free Network について、異なる T 種類の乱数シードを用いてそれぞれ別々に T 回ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームのシミュレーションを行う。
- (2) T 回それぞれの協調率の平均を平均協調率とする。

3.1.2 シミュレーション実験 1 の設定

シミュレーション実験 1 のネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームで使用する各パラメータを示す。

表 3 シミュレーション実験 1 で使用する共通パラメータ

パラメータ	値
利得行列 M	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.4 & \epsilon \end{pmatrix}$
頂点数 *1 n	10000
頂点に C (協調) を割り当てる確率 p	0.5
ステップ数 N	10000
式 (5) における協調率を求める際のステップ数 L	1000
シミュレーション回数 T	10

*1 Scale-Free Network は、その生成アルゴリズム [8] の性質上、頂点数を 10000 丁度にする事ができず、以下の表 4 に示されるように多少の誤差が生じる。しかし、その頂点数の誤差は本シミュレーション実験の結果に影響を与えないことを確かめている。

ここで、表 3 の ε の値としては 0, 0.0001, 0.001, 0.002, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, そして、0.7 の 12 個を用いる。

次に、シミュレーション実験 1 に用いるネットワーク、およびそれらの各ネットワーク専用のパラメータを示す。

- Scale-Free Network … 以下の表 4 に示すパラメータを用いて 10 個の Scale-Free Network を生成する。なお、この 10 個のパラメータは塚本らがシミュレーション実験で用いたものと同じパラメータである。
- Tree Network … 異なる乱数シードを用いて、Random Tree, および Line Tree をそれぞれ別々に 10 個ずつ生成する。
- Small-World Network … 以下の表 5 に示すパラメータを用いて 5 つの Small-World Network を生成する。
- Random Graph … 以下の表 6 に示すパラメータを用いて 6 つの Random Graph を生成する。

表 4 Scale-Free Network の各種パラメータ

γ	k_{\min}	k_{\max}	$n_{k_{\max}}$	頂点数 n
2.1	2	100	1	8742
2.3	2	80	1	10208
2.5	2	60	1	9196
2.7	2	50	1	10550
2.9	2	40	1	9837
3.1	2	35	1	9880
3.3	2	30	1	10604
3.5	2	25	1	10715
3.9	2	20	1	11185
4.5	2	15	1	11356

表 5 Small-World Network の各種パラメータ

N	k	p
10000	10	0
10000	10	0.1
10000	10	0.2
10000	10	0.5
10000	10	1

表 6 Random Graph の各種パラメータ

N	E	a	b	c
10000	40000	0.25	0.25	0.25
10000	40000	0.3	0.3	0.1
10000	40000	0.4	0.2	0.2
10000	40000	0.5	0.2	0.1
10000	40000	0.6	0.15	0.1
10000	40000	0.57	0.19	0.05

3.1.3 シミュレーション実験 1 の結果

第 3.1.2 節で示したパラメータを用いて、5 つのネットワーク構造それぞれについて平均協調率を求めた。ここで、1 つのネットワーク構造を基に複数ネットワークが生成されている場合、それぞれのネットワークの平均協調率の平均を取っている。たとえば、Scale-Free Network は、ベキ乗指数が異なるものを 10 種類用意しており、それら全ての平均協調率のアンサンブル平均を取ったものが次図中で示されている。シミュレーション実験 1 の結果を図 1 に示す。

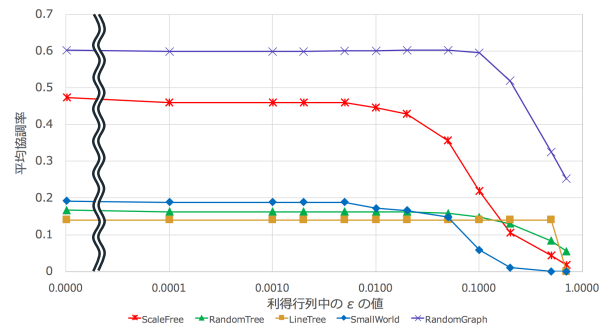


図 1 ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおける、利得行列の Punishment の値 (ε) のみを変更したときの平均協調率の変化。

シミュレーション実験 1 の結果から、どのネットワークも、 ε を増加させると最終的には平均協調率が下がることを確認した。しかし、ネットワークごとに平均協調率の値、平均協調率が減少し始める ε の値、そして、減少時のグラフの傾きが異なることも確認できた。

たとえば、Small-World Network や Line Tree, Random Tree は、Random Graph や Scale-Free Network と比較すると平均協調率が低いことが図 1 から分かる。しかし、Small-World Network と比べると、Line Tree と Random Tree は ε の値に対して平均協調率の減少が始まる ε の値が異なった。Small-World Network では $\varepsilon = 0.005$ 以降のときに平均協調率の減少が起り始めるが、Random Tree で平均協調率の減少が起り始めるのは $\varepsilon = 0.05$ 以降のとき、そして、Line Tree で平均協調率の減少が起り始めるのは $\varepsilon = 0.5$ 以降のときであった。また、どの ε の値に対しても Random Graph が最も高い協調率を示すことが確認できた。

3.2 初期戦略配置比率を変えて平均協調率を求める実験

第 3.1 節では、ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームを行う際に、プレイヤーと見立てる各頂点に C (協調) か D (裏切り) のどちらかを初期のプレイヤーの手として割り当てる際の比率を 1:1 としていた。これは、前述のシミュレーション実験 1 において、それぞれの頂点が協調ラベルを割り当てられる確率 p を 0.5 に固定していたことか

ら明らかである。そこで、協調ラベルを割当てる確率 p を $0.1x$ ($1 \leq x \leq 9$, x は整数) と 9 種類用意して、それぞれの確率について独立にシミュレーション実験を行い、その変化を追うことで、初期戦略比率が協調率に対してどのような影響を及ぼすのかを確かめる。ここでは、この実験を「シミュレーション実験 2」と呼ぶことにする。

3.2.1 シミュレーション実験 2 の設定

シミュレーション実験 2 で使用する各パラメータを表 7 に示す。

パラメータ	値
利得行列 M	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.4 & 0 \end{pmatrix}$
頂点数 *1 n	10000
頂点に C (協調) を割り当てる確率 p	$0.1x$
ステップ数 N	10000
式 (5) における協調率を求める際のステップ数 L	1000
シミュレーション回数 T	10

ここで、表 7 の x の値としては、1 から 9 までの 9 つの整数を用いる。また、シミュレーション実験 2 では、第 3.1 節のシミュレーション実験で利用した全てのネットワーク構造をそのまま利用する。

3.2.2 シミュレーション実験 2 の結果

第 3.2.1 節で示したパラメータを用いて、5 つのネットワーク構造それぞれについて平均協調率を求めた。ここで、1 つのネットワーク構造を基に複数のネットワークが生成されている場合、第 3.1.3 節と同様に、それぞれのネットワーク構造での平均協調率のアンサンブル平均を各ネットワークの平均協調率とする。シミュレーション実験の結果を図 2 に示す。

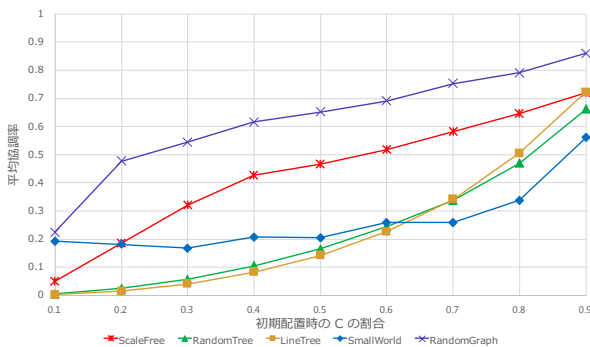


図 2 ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおける、初期配置時の協調者の割合のみを変更しときの平均協調率の変化。

どのネットワーク構造も、初期配置時の協調者の割合が増加するにつれて平均協調率が上がる傾向にあるということが確認できた。また、第 3.1.3 節で示されたシミュレ-

ション実験の結果と同様に、個々のネットワーク構造ごとに平均協調率の値や、平均協調率の上がり方に差があることが確認できた。どの初期配置時の協調者の割合の値に対しても、第 3.1.3 節で示されたシミュレーション実験の結果と同様に、Random Graph が最も高い協調率を示すことが確認できた。特に、初期配置時の協調者の割合が 4 割以上になると、Random Graph の平均協調率が最終的には 6 割を超えることが確認できた。

4. 議論

4.1 Tree Network における平均協調率のロバスト性

第 3.1.3 節のシミュレーション実験 1 の結果 (図 1) を見ると、Tree Network (Line Tree, および Random Tree) の協調率が下降するタイミングと、下降時の折れ線の傾きが他のネットワーク構造より緩やかであった。

この結果は、使用した Tree Network のモデルではハブとなる頂点がなかったためではないか、と考察する。ここで、ハブとは、明確な定義は無いが、次数の大きい頂点を表す。増田ら [6] は「ハブは、多数の頂点と結びついているので、考えているモデルの中で中心的な役割を果たすと解釈される」と述べている。

ハブが存在するネットワークでは、図 3 のように、ハブの頂点が裏切りの戦略をとってしまった場合、ハブの頂点が周りの頂点から得点を搾取しやすく、多くの得点が得られ、裏切りの戦略が伝搬されやすくなる。対して、ハブとなる頂点が存在しない場合、このようなことは起こらない*2。

よって、ハブノードが存在しない Tree Network は、裏切りの戦略の伝搬に対してロバストであることが示唆される。

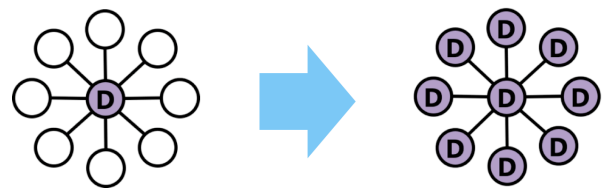


図 3 ハブノードが裏切りの戦略を伝搬させていく様子イメージ図。

4.2 平均協調率を決定する要因となる 2 つのコントロールパラメータ

第 3.1.3 節で、Punishment の報酬の値の増加に対して、全てのネットワーク構造の平均協調率が非増加になるこ

*2 ここで、図 3 の裏切り戦略を取るハブの頂点 (H_D と呼ぶ) を考える。 H_D に繋がっている頂点のうちの一つが別のハブになっており、その頂点は C (協調) の戦略を取るものとする (この頂点は H_C と呼ぶ)。このとき、 H_C に繋がっている、 H_D 以外の頂点の戦略がすべて協調で、 H_D の次数より H_C の次数の方が大きい場合、裏切りの戦略は H_C には伝搬されない。このような状況は理論的には起こりうるが、生起する確率は非常に低いため無視することができる。

とが確認できた。また、第 3.2.2 節に示されるシミュレーション実験 2 の結果から、初期配置時の協調者の割合の増加に対して、シミュレーション実験 2 で用いた全てのネットワーク構造の平均協調率が増加する傾向にあることが確認できた。どちらのパラメータについても、アンサンブル平均を取った結果だけでなく、各々のネットワーク構造の平均協調率についても前述のことが確認できた。よって、Punishment の報酬の値、および初期配置時の協調者の割合が、平均協調率を算出するコントロールパラメータになっているということが示唆される。

5. 結論

本研究では、ネットワーク型 n 人版囚人のジレンマゲームにおいて、ネットワーク構造の違いが各プレイヤーの協調状態にどのような影響を及ぼすのかを調べることを研究目的として、塚本ら [4] のモデル、および複雑ネットワークの分野で使われている 5 種類のネットワーク構造を用いてシミュレーション実験を行った。シミュレーション実験としては、塚本ら [4] が論文で用いた利得行列の Punishment の値を変更した実験、そして、初期の協調者の配置比率を変更した実験の 2 つを行った。

利得行列の Punishment の値を変更した実験では、任意のネットワーク構造について Punishment の値が大きいほど平均協調率は減少していくということが確認できた。しかし、平均協調率の減少の仕方、および減少が起り始める Punishment の値には差異があることも確認できた。また、利得行列の Punishment の値が平均協調率を決定付けるコントロールパラメータの一つになっている可能性を示した。

初期の協調者の配置比率を変更した実験では、どのネットワーク構造でも、初期の協調者の割合に伴い、平均協調率が増加する傾向にあるということが確認できた。このことから、初期の協調者の割合が平均協調率を決定付けるコントロールパラメータの一つになっている可能性を示した。

また、利得行列の Punishment の値を変更する実験でも、初期の協調者の配置比率を変更する実験でも、任意のパラメータについて Random Graph の平均協調率が最も高いものになっているということが確認できた。また、後者の実験では、初期配置時の協調者の割合が 4 割以上だと、最終的な平均協調率が 6 割を超えることが確認できた。

以上のことから、ジレンマ構造を持ち、協調状態を作りづらいネットワーク (会社の部署間の連絡網など) を構成する場合、全構成員のうちの 4 割以上が協調関係にある者で初期配置した Random Graph を採用することで、更にネットワーク内で協調者を増やすことができ、より良い組織にできる可能性があるということが示唆される。

参考文献

- [1] 岡田章, ゲーム理論・入門——人間社会の理解のために, 有斐閣 (2008).
- [2] Nowak,M.A., May,R.M.: “Evolutionary games and spatial chaos”, Nature, Vol.359, pp.826-829 (1992).
- [3] Lierberman,E., Hauert,C., Nowak,M.: “Evolutionary dynamics on graphs”, Nature, Vol.433, pp.312-316 (2004).
- [4] 塚本鋭, 白山晋: “協調を促進させるべき乗指数について”, 人工知能学会論文誌, Vol.26, No.1, pp.34-41 (2011).
- [5] 塚本鋭, 内田誠, 白山晋: “協調の進化に与える初期ネットワーク構造の影響”, 人工知能学会論文誌, Vol.24, No.5 (2009).
- [6] 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワークの科学, 産業図書株式会社 (2005).
- [7] Antol,R., Albert,M.C.: “Prisoner’s Dilemma: A Study in Conflict and Cooperation”, University of Michigan Press (1965).
- [8] Newman,M.: “The structure and function of complex networks, SIAM Review”, Vol.45, pp.167-256 (2003).
- [9] Watts,D.J., Strogatz,S.H.: “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, Nature, Vol.393, pp.440-442 (1998).
- [10] Erdős,P., Rényi,A.: “On random graphs”, Publicationes Mathematicae, 6, pp.290-297 (1959).
- [11] Chakrabarti,D., Zhan,Y., Faloutsos,C.: “R-MAT: A Recursive Model for Graph Mining”, SDM, pp.442-446 (2004).
- [12] Robin,J.W., Introduction to Graph Theory (4th Edition), Pearson (1996). (R. J. ウィルソン 西関 隆夫・西関 裕子 (訳), グラフ理論入門, 近代科学社 (2001).)