Vol.2016-AL-158 No.20
2016/6/25

媒介中心性を考慮したシュタイナー木構築法

藤田 実沙[1,a)]　木村 貴幸[2,b)]　神野 健哉[2,c)]

概要：ノード V，エッジ E，エッジのコスト関数 c からなる無向グラフ $G = (V, E, c)$ とターミナル $T \in V$ が与えられたとき，T の全てを連結する閉路のない部分グラフをシュタイナー木と呼ぶ．特に，入力されたグラフに対する最小コストのシュタイナー木を求める問題をシュタイナー木問題と呼ぶ．シュタイナー木問題は $\mathcal{NP}$ 完全な組合せ最適化問題であるため，近似解を求めるのが一般的である．
本研究では，シュタイナー木問題に対してネットワーク中心性を考慮した解構築手法を提案する．ネットワーク中心性のうち媒介中心性は，ネットワーク中の全最短経路に多く使用されるノードやエッジを中心とするネットワーク評価指標である．媒介中心性が高いノードやエッジをシュタイナー木に含むことにより，コストの小さいシュタイナー木を得ることができると考えられる．本稿では，媒介中心性を考慮したシュタイナー木構築手法の性能を，ベンチマーク問題を用いて評価する．数値実験の結果から，媒介中心性を考慮することにより，従来法と比較してコストの小さいシュタイナー木を得られることを確認した．

キーワード：組合せ最適化，シュタイナー木問題，ネットワーク中心性，媒介中心性

A Construction Method for the Steiner Tree Problem Based on Betweenness Centrality

Misa Fujita[1,a)]　Takayuki Kimura[2,b)]　Kenya Jin'no[2,c)]

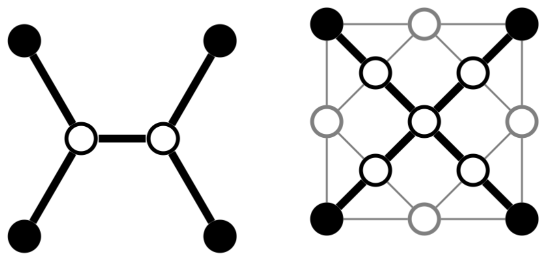
Abstract: Given an undirected weighted graph $G = (V, E, c)$ and a set $T \in V$, where V is the set of nodes, E is the set of edges, c is a cost function, and T is a subset of terminal nodes, a subgraph that doesn't have a loop and connecting all of T is called a Steiner tree. Finding the smallest cost of the Steiner tree is called a Steiner tree problem in graphs. The Steiner tree problem in graphs is one of the $\mathcal{NP}$-complete combinatorial optimization problems, approximation methods are then usually applied to obtain the small cost of Steiner tree.
In this study, we propose a construction method for the Steiner tree problem in graphs using network centrality. Betweenness centrality is an example of the network centrality that shows how many times a node or an edge appears on the all of the shortest paths in the network. Therefore, if nodes or edges which have high betweenness centrality are included in the Steiner tree, obtained cost of the Steiner tree may become small. We then evaluate the performance of the proposed method by solving benchmark problems. Results of numerical simulations indicate that shorter Steiner trees are obtained using the betweenness centrality effectively.

Keywords: Combinatorial optimization, Steiner tree problem, Network centrality, Betweenness centrality

1. はじめに

ノード V，エッジ E，エッジのコスト関数 c からなる無向グラフ $G = (V, E, c)$ とターミナル $T \in V$ が与えられたとき，T の全てを連結する閉路のない部分グラフをシュタイナー木と呼ぶ．あるネットワークに対して複数存在する

[1] 日本工業大学大学院 工学研究科 電子情報メディア工学専攻
4-1 Gakuendai, Miyashiro, Minami-Saitama, Saitama 345–8501, Japan
[2] 日本工業大学 工学部 電気電子工学科
4-1 Gakuendai, Miyashiro, Minami-Saitama, Saitama 345–8501, Japan
[a)] e1112407@estu.nit.ac.jp
[b)] tkimura@nit.ac.jp
[c)] jinno@nit.ac.jp



(a) 幾何学的シュタイナー木問題
The Steiner tree problem

(b) グラフ的シュタイナー木問題
The Steiner tree problem in graphs

図 1 2 種類のシュタイナー木問題
Fig. 1 Two types of the Steiner tree problems

シュタイナー木のうち最小コストのシュタイナー木を最小シュタイナー木と呼び，最小シュタイナー木を求める問題をシュタイナー木問題と呼ぶ [1]．**図 1**(a) のように，シュタイナー木問題には，T のみが与えられノードを新たに自由に追加しつつ最小シュタイナー木を構築する幾何学的シュタイナー木問題と，図 1(b) のように，与えられた $G=(V,E,c)$ と T から使用するノードとエッジを選択することにより最小シュタイナー木を構築するグラフ的シュタイナー木問題の 2 種類がある．本研究ではグラフ的シュタイナー木問題を扱う（以降，グラフ的シュタイナー木問題を単にシュタイナー木問題と呼ぶ）．シュタイナー木問題において，$V \setminus T$ のノード（図 1(b) の灰色の白抜き円）をシュタイナー候補点，シュタイナー候補点のうちシュタイナー木に含まれるノード（図 1(b) の黒色の白抜き円）をシュタイナー点と呼ぶ．

シュタイナー木問題は VLSI 回路の設計 [2] や通信ネットワークにおけるマルチキャストツリーの構築 [3]，生物学の系統樹の構築 [4] など様々な現実の問題への応用が可能である．

シュタイナー木問題は $\mathcal{NP}$ 完全な組合せ最適化問題である [5]．また，シュタイナー木問題の厳密解を求めるアルゴリズムは，1972 年に Dreyfus らにより提案されている [6]．ノード数を $|V|$ としたとき，この手法は $O(|V|^3)$ の計算量を必要とする．そのため，厳密解を求めるのではなく，シュタイナー木問題では現実的な時間で満足のいく近似解を求めるのが一般的である．

シュタイナー木問題の近似解を得るアルゴリズムは，1980 年に Takahashi らにより提案された手法 [7] を始めとして，多数提案されている．現在最も広く使用されているのは 1980 年に Kou らにより提案された KMB 法 [8] である．KMB 法ではターミナル間の最短経路と最小全域木に基づいてシュタイナー木を構築する．最短経路構築アルゴリズム [9] と最小全域木構築アルゴリズム [10] 共に計算量は $O(|V|^2)$ となるため，KMB 法の計算量も $O(|V|^2)$ となる．KMB 法は少ない計算量でコストの小さいシュタイナー木を得ることができるが，ターミナル間の最短経路が複数存在した場合，各ターミナルを繋ぐ最短経路のエッジがシュタイナー木内で共有されないと，得られるシュタイナー木のコストが大きくなるという問題点がある．

そこで本研究では，複雑ネットワーク理論におけるネットワーク評価指標の 1 つである，ネットワーク中心性を用いたシュタイナー木構築法を提案する．シュタイナー木問題はターミナル間の最短経路が可能な限り共有される木を求める問題と捉えることができる．また，ネットワーク中の全最短経路上に多く現れるノードやエッジを中心とする媒介中心性 [11] を用いることで，共有するエッジを多く持つシュタイナー木，すなわちコストの小さいシュタイナー木を得ることができると予想される．

そこで本稿では，媒介中心性を用いたシュタイナー木構築法を提案し，ベンチマーク問題を用いてその性能を評価した．具体的には，各グラフのエッジコストと，ノード及びエッジ媒介中心性を用いたシュタイナー木構築法の性能について評価した．数値実験の結果から，ノード媒介中心性と比較してエッジ媒介中心性を用いた場合，コストの低いシュタイナー木を得ることを確認した．

2. シュタイナー木問題

シュタイナー木問題は，ノード V，エッジ E，エッジのコスト関数 c からなる無向グラフ $G=(V,E,c)$ とターミナル $T \in V$ が与えられたとき，T の全てを連結する最小コストの木を求める問題である [1]．ターミナル数 $|T|=2$ のときは最短経路問題となり，また $|T|=|V|$ のときは最小全域木問題となる．どちらも $O(|V|^2)$ で厳密解を求められることが知られている [9], [10]．よって，$2<|T|<|V|$ のときがシュタイナー木問題となる．また，$c \to R_+$ とする．

シュタイナー木問題における決定変数 $x(e_i)$ を式 (1) で定義する．

$$x(e_i)=\begin{cases} 0 & (e_i \in E_{\mathrm{ST}}) \\ 1 & (\mathrm{otherwise}) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，e_i は i 番目のエッジ，E_{ST} はシュタイナー木に含まれるエッジ集合である．また，シュタイナー木問題の目的関数を式 (2) で定義する．

$$\min \sum_{i=1}^{|E|} c(e_i)x(e_i). \tag{2}$$

ここで，$|E|$ は総エッジ数，$c(e_i)$ は i 番目のエッジのコストである．つまり，エッジ e_i がシュタイナー木に含まれるとき $x(e_i)=1$ となるためエッジ i のコスト $c(e_i)$ が加算される．反対に，エッジ e_i がシュタイナー木に含まれないとき $x(e_i)=0$ となるためエッジ i のコスト $c(e_i)$ は加算されない．

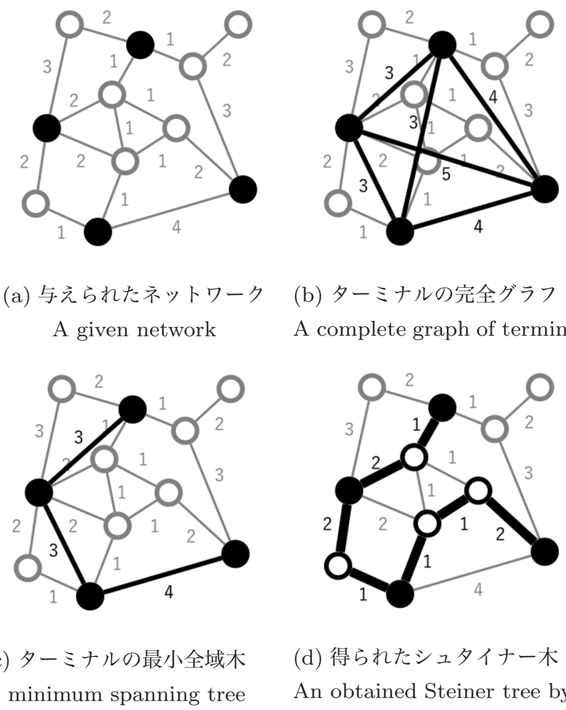
シュタイナー木問題の制約条件は，シュタイナー木が連

結であることとシュタイナー木が T の全てを含むことである．

3. KMB 法

本稿では，シュタイナー木構築法として最も広く使用されている KMB 法 [8] に基づいたシュタイナー木構築手法を提案する．そこでまず KMB 法によるシュタイナー木構築手法について述べる．KMB 法では，ターミナル間の最短経路と最小全域木を用いてシュタイナー木を構築する．まず，全ターミナル間の最短経路を求め，最短距離を計算する．次に，ターミナル間の最短距離をエッジのコストとしたターミナルのみの完全グラフを作成する（**図 2**(b)）．完全グラフとは，各ノードが他の全ノードと直接接続しているグラフである．次に，この完全グラフの最小全域木を構築する（図 2(c)）．最小全域木とは，全てのノードを接続する最小コスト木である．最後に，最小全域木に含まれる各エッジを 2 ターミナル間の最短経路に置き換え，シュタイナー木を構築する（図 2(d)）．

KMB 法は少ない計算量でシュタイナー木を得られる．しかし，ターミナル間に複数の最短経路が存在した場合，選択経路によっては木の構築に多くのエッジを使用することになり，得られるシュタイナー木のコストが増加してしまう．この問題を解決するためには，ターミナル間を繋ぐ最短経路同士でなるべく同じエッジを使用する必要がある．



(a) 与えられたネットワーク A given network
(b) ターミナルの完全グラフ A complete graph of terminals
(c) ターミナルの最小全域木 A minimum spanning tree of terminals
(d) 得られたシュタイナー木 An obtained Steiner tree by using the KMB algorithm

図 2 KMB 法のアルゴリズム
Fig. 2 KMB algorithm

4. 媒介中心性

媒介中心性 [11] は，ネットワーク中の全最短経路上に多く含まれるノードまたはエッジをネットワークの中心と捉えるネットワーク中心性評価指標である．ノード v の媒介中心性 $\mathrm{vbc}(v)$ は式 (3) で定義される．

$$\mathrm{vbc}(v) = \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{|V|}\sum_{g=1}^{s-1}\frac{P_{v(s,g)}}{P_{(s,g)}}}{(|V|-1)(|V|-2)/2}. \tag{3}$$

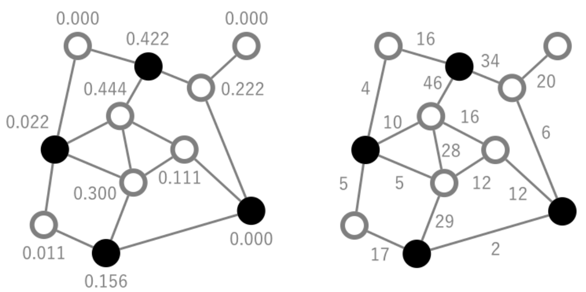
ここで，s は最短経路の始点，g は最短経路の終点，$P_{(s,g)}$ は s, g 間の最短経路数，$P_{v(s,g)}$ は s, g 間の最短経路のうちノード v を通る数である．つまり，ネットワークの全最短経路上に頻繁に存在するノードほど中心性は大きくなる．本稿では無向グラフを扱うため，始点と終点の組合せ数で正規化したノード媒介中心性値を用いる．

次に，エッジ e の媒介中心性 $\mathrm{ebc}(e)$ を式 (4) で定義する．

$$\mathrm{ebc}(e) = \sum_{s=1}^{|V|}\sum_{g=1}^{s-1}\frac{P_{e(s,g)}}{P_{(s,g)}}. \tag{4}$$

ここで，$P_{e(s,g)}$ はノード s, g 間の最短経路のうちエッジ e を通る回数である．どちらの媒介中心性も $O(|V|^2)$ の計算量で算出可能である [12]．

図 2(a) のネットワークにおけるノード媒介中心性とエッジ媒介中心性を**図 3**(a)，(b) にそれぞれ示す．どちらもネットワーク中心性においても中央に存在するノードとエッジの中心性が高くなっている．また，右上端のノードに隣接するノードのノード媒介中心性は 0.222 である．位置的にはネットワークの端にあるものの，他のネットワークの端にあるノードよりも中心性が高くなっている．あるネットワークに対して 1 本のエッジのみで接続しているノードがある場合，そのノードに隣接するノードのノード媒介中心性と，そのノードを接続するエッジのエッジ媒介中心性は高い値となる．



(a) ノードの媒介中心性 The node betweenness centrality
(b) エッジの媒介中心性 The edge betweenness centrality

図 3 2 種類の媒介中心性
Fig. 3 Two types of betweenness centrality

5. 媒介中心性を用いたシュタイナー木構築法

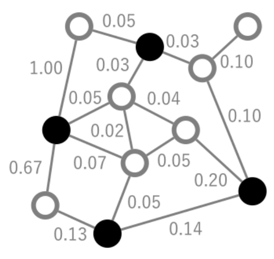
本章では，グラフの媒介中心性 [11] をエッジのコストとして新たに定義し，KMB 法を実行した際の性能を確認する．媒介中心性が高いエッジほどシュタイナー木に含まれやすくするため，エッジ媒介中心性を用いる場合は，エッジ媒介中心性の逆数をエッジのコストとした（**図 4**(b)）．また，ノード媒介中心性を用いる場合は，まず各エッジを結ぶ両端ノードのノード媒介中心性の平均値を求め，その逆数を算出し，これをネットワーク中で最も高い値で正規化した値をエッジのコストとした（図 4(a)）．

性能評価として SteinLib[13] のベンチマーク問題 LIN の lin03 を用いた．本稿では，以下の 3 つの手法を評価した．

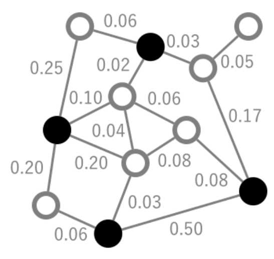
- KMB 法 [8]
- ノード媒介中心性をエッジコストとした KMB 法
- エッジ媒介中心性をエッジコストとした KMB 法

3 つの手法により得られたシュタイナー木の構造を**図 5** に示す．図 5 において，(a) は最小シュタイナー木，(b) は KMB 法，(c) はノード媒介中心性をエッジコストとした場合，(d) はエッジ媒介中心性をエッジコストとした場合のシュタイナー木である．

図 5 から，ノードとエッジそれぞれの媒介中心性のみを用いてシュタイナー木を構築する手法（図 5(c),(d)）は単純な KMB 法（図 5(b)）よりもコストの大きい解を得ている．これは，ネットワーク中の全最短経路を用いて媒介中心性が算出されることが原因と考えられる．ターミナルがネットワークの一部分に集中している場合には，ターミナル集合から離れた位置に媒介中心性が高いノードやエッジが存在することがある．このような場合，媒介中心性が高いノードやエッジを含むように最短経路を構築すると，ターミナル集合から離れたノードやエッジがシュタイナー木に含まれることになり，得られる木のコストが増加してしまう．

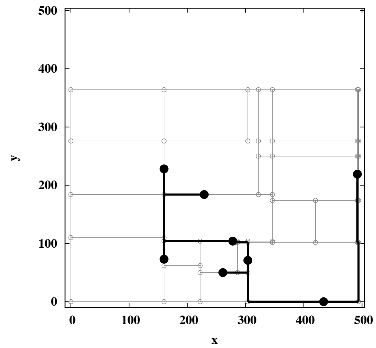


(a) ノードの媒介中心性に基づいたコスト
Edge costs by the node betweenness centrality

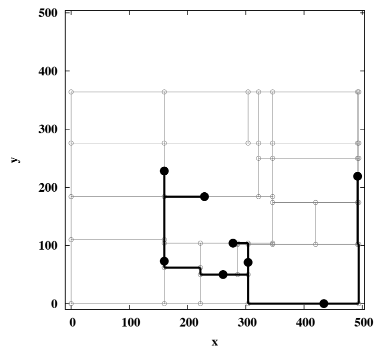


(b) エッジの媒介中心性に基づいたコスト
Edge costs by the edge betweenness centrality

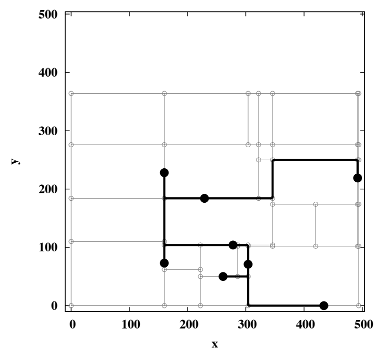
図 4 2 種類の媒介中心性に基づいたエッジコスト
Fig. 4 Edge costs based on the betweenness centrality



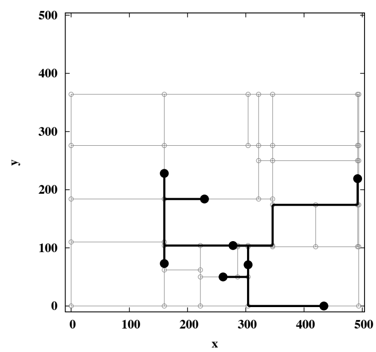
(a) 最小シュタイナー木
A minimum Steiner tree



(b) コストを用いて構築したシュタイナー木
A Steiner tree constructed by the KMB algorithm using given edge cost



(c) ノードの媒介中心性を用いて構築したシュタイナー木
A Steiner tree constructed by the KMB algorithm using node betweenness centrality



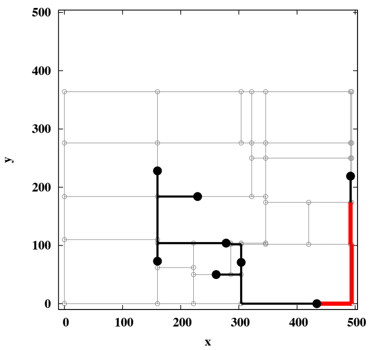
(d) エッジの媒介中心性を用いて構築したシュタイナー木
A Steiner tree constructed by the KMB algorithm using edge betweenness centrality

図 5 lin03 のシュタイナー木
Fig. 5 Steiner trees of lin03

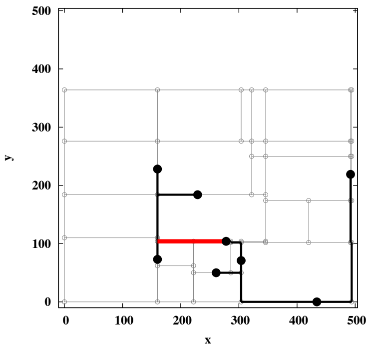
6. コストと媒介中心性を用いたシュタイナー木構築法

前章のシュタイナー木構築法は媒介中心性のみを考慮し，入力するグラフのエッジコストは考慮していない．シュタイナー木問題はターミナル間の最短経路が可能な限り重複する木を求める問題であるため，コストと媒介中心性の両者を考慮することにより，シュタイナー木のコストを小さくすることが可能と考えられる（**図 6**）．

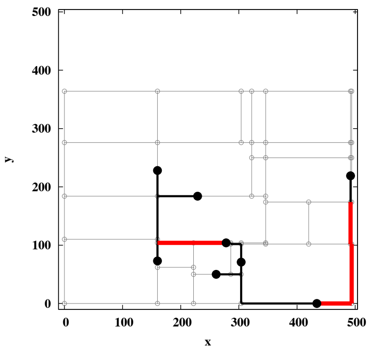
コストの値域は各グラフにより異なる．また同様に，ノード媒介中心性とエッジ媒介中心性の値域も各グラフに依存するため，本研究ではコストとのバランスを考慮し，両者それぞれを正規化した値を用いた．



(a) コストを用いて構築したシュタイナー木
A Steiner tree constructed by the KMB algorithm using given edge cost

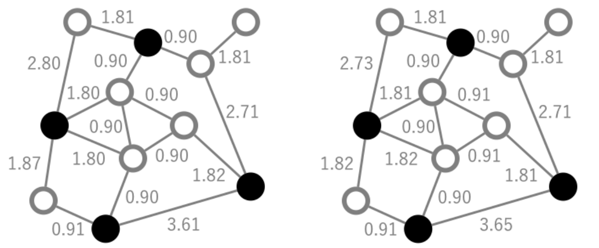


(b) 媒介中心性を用いて構築したシュタイナー木
A Steiner tree constructed by the KMB algorithm using betweenness centrality



(c) コストと媒介中心性を用いて構築したシュタイナー木
A Steiner tree constructed by the KMB algorithm using given edge cost and betweenness centrality

図 6 コストと媒介中心性を用いて構築した lin03 のシュタイナー木
Fig. 6 A Steiner tree of lin03 constructed by the KMB algorithm based on given cost and betweenness centrality



(a) コストとノード媒介中心性に基づいたコスト
Edge costs based on costs and node betweenness centrality

(b) コストとエッジ媒介中心性に基づいたコスト
Edge costs based on costs and edge betweenness centrality

図 7 コストと媒介中心性に基づいたエッジコスト
Fig. 7 Edge costs based on cost and betweenness centrality

図 7 のように，本章ではエッジコストと媒介中心性を考慮したコストを新たに定義し，KMB 法を実行した際の動作を確認する．このエッジのコスト $c_{\mathrm{new}}(e)$ を式 (5) で定義する．

$$c_{\mathrm{new}}(e) = \alpha c_{\mathrm{nor}}(e) + (1 - \alpha)\mathrm{bc}_{\mathrm{nor}}(e). \qquad (5)$$

ここで，$c_{\mathrm{nor}}(e)$ はエッジ e の正規化したコスト，$\mathrm{bc}_{\mathrm{nor}}(e)$ はエッジ e の正規化した媒介中心性，α は両者の重みを決定するパラメータである．

7. 数値実験

KMB 法と，提案手法であるコストと媒介中心性を考慮した KMB 法の性能を数値実験により評価した．性能評価のためのベンチマーク問題として SteinLib[13] の DMXA の 14 問を使用した．各問題につき 20 回シュタイナー木を構築し，その最良値 · 最悪値 · 中央値を比較した．また，提案手法のパラメータ α は予備実験により決定した．数値実験の結果を表 1 に示す．表 1 から，dmxa0903 と dmxa1010，dmxa1516 以外の問題において，最良値と中央値から，従来手法よりも提案手法はコストの小さいシュタイナー木を構築できた．また，dmxa0903 と dmxa1010，dmxa1516 の 3 問において提案手法の性能が劣化した原因は，ターミナルの位置にあると考えられる．媒介中心性の定義から，ネットワークの一部分にターミナルが集中している場合，ターミナル集合から離れたノードやエッジの媒介中心性が高くなることが多い．これらのノードやエッジは，シュタイナー木に含むべきではないのにも関わらず，媒介中心性が高いためにシュタイナー木に含まれてしまう．全ての問題において，最悪値から，従来手法よりも提案手法はコストの小さいシュタイナー木を得ている．よってこのことから，コストと媒介中心性を考慮することにより，コストの

表 1　数値実験結果
Table 1　Result of numerical simulations

		従来法			提案法							
					ノードの媒介中心性				エッジの媒介中心性			
問題名	最適値	最良値	最悪値	中央値	α	最良値	最悪値	中央値	α	最良値	最悪値	中央値
dmxa0296	344	374	387	374	0.6	**364**	**364**	**364**	0.1	**352**	**352**	**352**
dmxa0368	1017	1036	1046	1046	0.1	**1031**	**1031**	**1031**	0.1	**1031**	**1031**	**1031**
dmxa0454	914	991	1009	1004	0.1	**958**	**958**	**958**	0.1	**966**	**966**	**966**
dmxa0628	275	297	297	297	0.2	**277**	**277**	**277**	0.1	**290**	**290**	**290**
dmxa0734	506	537	541	537	0.2	**537**	**537**	**537**	0.1	**537**	**537**	**537**
dmxa0848	594	637	657	644	0.1	**632**	**632**	**632**	0.1	**627**	**627**	**627**
dmxa0903	580	639	660	660	0.3	645	**645**	**645**	0.1	**626**	**626**	**626**
dmxa1010	1488	1538	1561	1551	0.1	1546	**1546**	**1546**	0.2	1546	**1546**	**1546**
dmxa1109	454	473	498	483	0.2	**473**	**473**	**473**	0.5	478	**478**	**478**
dmxa1200	750	821	834	821	0.1	**769**	**769**	**769**	0.1	**769**	**769**	**769**
dmxa1304	311	329	334	334	0.1	**316**	**316**	**316**	0.1	**316**	**316**	**316**
dmxa1516	508	513	533	523	0.3	528	**528**	528	0.3	528	**528**	528
dmxa1721	780	825	840	830	0.2	**794**	**794**	**794**	0.3	**804**	**804**	**804**
dmxa1801	1365	1484	1540	1530	0.4	**1479**	**1479**	**1479**	0.4	**1492**	**1492**	**1492**

大きい木の構築を抑制できると考えられる．

8. 結論

本稿では，グラフのエッジコストと媒介中心性を考慮したシュタイナー木構築法を提案した．数値実験の結果から，提案手法は，従来手法よりもコストの小さいシュタイナー木を多くの問題において構築できることを確認した．しかし，ターミナルがネットワークの一部分に集中している問題に対して性能が劣化することを確認した．これは，ネットワークの全最短経路を用いて媒介中心性が算出されるため，ターミナルから離れたノードやエッジの中心性が高くなることが原因と考えられる．

今後は，ターミナル集合から離れたノードやエッジを含まずにシュタイナー木を構築するための手法の改良を考えている．

本研究の一部は，平成 28 ～ 30 年度科研費若手研究 (B)(16K21327) の助成を受けたものであり，ここに謝意を表する．

参考文献

[1] B. コルテ，J. フィーゲン：組合せ最適化 第 2 版 理論とアルゴリズム，シュプリンガー・ジャパン (2009).
[2] Kahng, A.B. and Robins, G.:*On optimal interconnections for VLSI*, Springer Science & Business Media(1995).
[3] Korte, B., Promel, H.J. and Steger, A.:*Paths, flows, and VLSI-layout*, Springer-Verlag(1990).
[4] Hwang, F.K., Richards, D.S. and Winter, P.:*The Steiner Tree Problem*, Elsevier(1992).
[5] Karp, R.M.:*Reducibility among combinatorial problems*, Springer(1972).
[6] Dreyfus, S.E. and Wagner, R.A.:*The Steiner problem in graphs*, Networks, Vol.1, No.3, pp.195–207(1971).
[7] Takahashi, H. and Matsuyama, A.:*An approximate solution for the Steiner problem in graphs*, Math. Japonica, Vol.24, No.6, pp.573–577(1980).
[8] Kou, L., Markowsky, G. and Berman, L.:*A fast algorithm for Steiner trees*, Acta Informatica, Vol.15, No.2, pp.141–145(1981).
[9] Dijkstra, E.W.:*A note on two problems in connection with graphs*, Numerical mathmatic, Vol.1, No.1, pp.269–271(1959).
[10] Prim, R.C.:*Shortest connection networks and some generalizations*, Bell system technical journal, Vol.36, No.6, pp.1389–1401(1957).
[11] Girvan, M. and Newman, M.E.J.:*Community structure in social and biological networks*, Proceedings of the national academy of sciences, col.99, No.12, pp.7821–7876(2002).
[12] Brandes, U.:*On variants of shortest-path betweenness centrality and their generic computation*, Social Networks, Vol.30, No.2, pp.136–145(2008).
[13] Koch, T., Matrin, A. and Vob, S.:*SteinLib: An updated library on Steiner tree problems in graphs*, Available from ⟨http://elib.zib.de/steinlib⟩ (accessed 2016-05-16).