一般の遷移確率に対する関数ルーターモデルの全訪問時間

白髪 丈晴[1,a)]

概要：ランダムウォークの脱乱択化とは決定的過程でランダムウォークを模倣しようとする試みである. ローターールーターモデルと呼ばれる単純ランダムウォークを模倣する決定的過程に対し, いくつかの全訪問時間の研究が為されているが, 一般の遷移確率を模倣する決定的過程の全訪問時間に対する研究は知られていない. 本論文では, 無理数の遷移確率も含み一般の遷移確率を模倣しうる SRT ルーターモデルの全訪問時間の解析を行い, 全訪問時間の上界を導出した. この上界は一般の遷移確率を模倣する決定的過程に対する初の全訪問時間の上界であり, 更に既存のローターールーターモデルに対する結果も改善している.

The Cover Time of Functional Router Models for General Transition Probabilities

Takeharu Shiraga[1,a)]

1. はじめに

1.1 ランダムウォークの全訪問時間に対する既存研究

ランダムウォークはグラフ上の基本的な確率過程である. ランダムウォークにおいて, 各トークンはランダムに選択された隣接頂点へ遷移を繰り返す. 全訪問時間とはトークンによってグラフ上の全ての頂点が訪問されるまでにかかる時間の期待値である. 全訪問時間はランダムウォークに対する重要な指標の一つであり, 多くの研究が為されている.

Aleliunas ら [3] は単純ランダムウォーク (トークンは隣接頂点を一様ランダムに選択し遷移する) に対し研究を行い, 任意の連結グラフに対し全訪問時間が $2m(n-1)$ で抑えられることを示した. ここで m はグラフの枝数, n はグラフの頂点数を表す. Feige は任意のグラフに対し, 全訪問時間の下界が $\bigl(1-o(1)\bigr)n\log n$, 上界が $\bigl(1+o(1)\bigr)(4/27)n^3$ となることを示した [16], [17].

より高速な全訪問時間を実現するため, 複数トークンのランダムウォークによる全訪問時間の研究も為されている. Broder ら [8] は k 個のトークンの単純ランダムウォーク (k-単純ランダムウォーク) のトークンの初期配置が定常分布から始まる場合の全訪問時間の研究を行った. 任意の初期配置に対する全訪問時間に対しては, Alon ら [4] が任意のグラフ, $k \leq \log n$ に対し k-単純ランダムウォークの全訪問時間の上界が $\bigl((\mathrm{e}+o(1))/k\bigr)t_{\mathrm{hit}}\log n$ となることを示した. ここで, t_{hit} は到達時間を表す. Elsasser と Sauerwald [15] はより大きな k に対しこの上界を改善し, 任意のグラフ, $k \leq n$ に対し $\mathrm{O}\bigl(t^* + (t_{\mathrm{hit}}\log n)/k\bigr)$ を示している. ここで, t^* は混交時間を表す.

池田ら [21] は工夫した遷移確率を用いることで全訪問時間の改善を実現した. 彼らは β-ランダムウォークと呼ばれる, 無理数の遷移確率を含むランダムウォークを設計し, その全訪問時間が任意のグラフに対し $\mathrm{O}(n^2\log n)$ であることを示した. また, 野中らはメトロポリス・ヘイスティング法に基づくメトロポリス・ウォークを設計し, その全訪問時間が任意のグラフに対し $\mathrm{O}(n^2\log n)$ であることを示している.

一般の遷移確率, 複数トークンのランダムウォークの全訪問時間に対し分かっていることは少ない. Elsasser と Sauerwald [15] は任意の遷移確率行列, 任意の $n^{\varepsilon} \leq k \leq n$ に対し下界 $\Omega\bigl((n\log n)/k\bigr)$ を与えている. ここで ε は $0<\varepsilon<1$ を満たす定数である.

1 九州大学
IPSJ, Chiyoda, Tokyo 101–0062, Japan
a) takeharu.shiraga@inf.kyushu-u.ac.jp

1.2 決定的過程の全訪問時間に対する既存研究

決定的なグラフ探索という観点から, 単純ランダムウォークのアナロジーであるロータールーターモデルに対し, 近年多くの研究が為されている. このモデルでは, 各頂点 u は u 上のトークンを隣接頂点に 1 つずつ順番に振り分ける. 言い換えると, u は隣接頂点 v に $1/\delta(u)$ の比率でトークンを遷移させる. ここで, $\delta(u)$ は隣接頂点の個数である.

Yanovski ら [31] は単一トークンのロータールーターモデルの振る舞いに対し研究を行い, 高々 $2mD$ ステップ後に, トークンがオイラー閉路の巡回に陥ることを示した. ここで D はグラフの直径を表す. Bampas ら [6] は任意のグラフに対しオイラー閉路の巡回に陥るまで $\Omega(mD)$ かかる例の構成例を示した. これらの結果は単一トークンのローター ルーターモデルの全訪問時間が一般に $\Theta(mD)$ であることを示している. ロータールーターモデルの全訪問時間解析の他のアプローチとして, ロータールーターモデルにおけるトークンの訪問頻度 $X_v^{(T)}$ とランダムウォークの特徴量を結びつける手法が開発されている. ここで $X_v^{(T)}$ は頂点 v がトークンに時刻 T までに訪問された回数を示す. Holroyd と Propp [20] は $X_v^{(T)}$ と対応するランダムウォークの定常分布 π に対し, $|\pi_v - X_v^{(T)}/T| \leq K\pi_v/T$ を示した. ここで K は T に依存しない定数である. この定理は $X_v^{(T)}/T$ が T が増加するに従って π_v に収束することを表している. この事実を用いて, Friedrich と Sauerwald [19] は多くのグラフ構造に対しロータールーターモデルの全訪問時間の上界を与えている.

全訪問時間の高速化の為, $k>1$ トークンのロータールーターモデルに対する研究が Dereniowski ら [13] によって為されている. 彼らは任意のグラフ, $k = \mathrm{O}\big(\mathrm{poly}(n)\big)$ もしくは $2^{\mathrm{O}(D)}$ に対し全訪問時間の上界 $\mathrm{O}(mD/\log k)$ を示し, 下界として $\Omega(mD/k)$ を満たす例を与えている. Kosowski と Pajak [24] は上記の上界を改善し, 任意のグラフに対し $\mathrm{O}\big(t^* + (\Delta/\delta)(mt^*/k)\big)$ を示した. ここで Δ/δ は最大/最小次数を表す.

単純ランダムウォークに対応するロータールーターモデルを超えた, 一般の遷移確率に対応する決定的過程に対する研究も近年為されている. これは各頂点 u が u 上のトークンを隣接頂点 v に $P_{u,v}$ の比率で決定的に遷移させるモデルである. ここで $P_{u,v}$ は対応するランダムウォークの u から v への遷移確率を表す (詳細は 2.2 節を参照されたい). Holroyd と Propp [20] はスタックウォーク (白髪らはこれを SRT ルーターモデルと呼んだ [28]) を設計し, このモデルにおけるトークンの訪問頻度と到達時間の関連を示した. 白髪ら [28] は関数ルーターモデルと呼ぶより一般的なモデルを定義し, SRT ルーターモデルと対応するランダムウォークの単一頂点誤差に対し上界を与えている. しかし, 既存研究において, 一般の遷移確率に対応する決定的過程の全訪問時間に対する研究は知られていない.

1.3 本研究の成果

これまでの全訪問時間の研究が単純ランダムウォークを模倣するロータールーターモデルに対する研究だったのに対し, 本論文は一般の遷移確率に対応する決定的過程, さらには複数トークンの場合の全訪問時間に対し研究を行う. そして, 定理 4.1 によって, 任意のエルゴード的かつ可逆な遷移確率行列（無理数の値も含みうる）に対応する決定的過程の全訪問時間の上界を与えることに成功した. 具体的には, $k \geq 1$ に対し上界 $\mathrm{O}\big(t^* + m't^*/k\big)$ を与えた. ここで $m' = \max_{u\in V}(\delta(u)/\pi_u)$ である. これは, 知り得る限り初の一般の遷移確率に対応する決定的過程の全訪問時間の上界である. この上界はロータールーターモデルに対し, $k=1$ の場合, $t^* = \mathrm{O}(D)$ のとき既存の $\mathrm{O}(mD)$[31] と一致する. また, t^* が小さい, もしくは k が大きい場合, $\mathrm{O}(mD/\log k)$[13] を改善している. そして, 正則グラフでないグラフに対し, 既存の $\mathrm{O}\big(t^* + (\Delta/\delta)(mt^*/k)\big)$[24] を Δ/δ の項に対し改善している.

証明では, まず SRT ルーターモデルの訪問頻度 $X_v^{(T)}$ と対応する (一般の) ランダムウォークの特徴量を結びつける. このアプローチは [19], [20], [24] の拡張となっている. 具体的には, $|\pi_v - (X_v^{(T)}/kT)| < K\pi_v/T$ が任意のエルゴード的かつ可逆な遷移確率行列に対し成り立つことを示した. ここで π_v は遷移確率行列の定常分布であり, K は T に依存しない定数である. この上界は [20] の結果の $k>1$ トークン, 一般の遷移確率に対する拡張となっている.

1.4 ランダムウォークの脱乱択化に対する関連研究

関連の深い話題として, 複数トークンの決定的過程のトークン配置と対応するランダムウォークのトークン配置の単一頂点誤差の研究が行われている. Rabani ら [27] は拡散モデルと呼ばれる決定的過程と対応する確率過程の単一頂点誤差の研究を行い, また解析のフレームワークを構築した. 特定のグラフ構造上での単一頂点誤差は広く研究されている. 例えば, 整数格子点上 [11], [12], [14], 木上 [10], d 次元超立方体上 [1], [18] などである. Berenbrink ら [7] は近年, d 正則グラフ上で既存の上界を改善した.

一般の遷移確率を扱うため, 有向多重グラフ上での研究が [22], [23] で行われている. SRT ルーターモデルは [28], [29] で扱われている. 彼らは SRT ルーターモデルと一般のマルコフ連鎖の差を単一頂点誤差, 総変動距離といった指標で研究している.

近年, Chalopin ら [9] は複数トークンのロータールーターモデルの周期的挙動について研究を行い, 周期的な状態に陥るまでの時間の上下界を与えている.

2. 準備

2.1 ランダムウォーク/マルコフ連鎖

$V = \{1, 2, \ldots, n\}$ を有限状態 (頂点) 集合, $P \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n\times n}$ を

V 上の遷移確率行列とする. 即ち, P は $\sum_{v\in V} P_{u,v} = 1$ を任意の $u \in V$ に対し満たす. ここで $P_{u,v}$ は P の (u, v) 成分を表す. 任意のエルゴード的 *1 な P は唯一の定常分布 $\pi \in \mathbb{R}^n_{>0}$ (即ち, $\pi P = \pi$) を持ち, かつ極限分布が π に一致する (即ち, 任意の V 上の確率分布 ξ に対し $\lim_{t\to\infty} \xi P = \pi$ が成り立つ) ことが知られている. ここで, 定常分布への収束を厳密に定義するため, 総変動距離と混交時間の定義を導入する. 今, ξ, ζ を V 上の確率分布とする. このとき, ξ と ζ の総変動距離 $\mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(\xi, \zeta)$ は以下のように定義される.

$$\mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(\xi,\zeta) \overset{\text{def.}}{=} \max_{A\subseteq V}\left|\sum_{v\in A}(\xi_v-\zeta_v)\right| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V}|\xi_v-\zeta_v| \tag{1}$$

そして P の混交時間 $\tau(\varepsilon)$ は $\varepsilon > 0$ に対し

$$\tau(\varepsilon) \overset{\text{def.}}{=} \max_{u\in V}\min\left\{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(P^t_{u,\cdot},\pi)\leq\varepsilon\right\} \tag{2}$$

と定義され, 便宜上

$$t^* \overset{\text{def.}}{=} \tau(1/4), \tag{3}$$

と定義する. t^* はよく P の特徴付けに使われる (cf.[25]).

本論文では, P はエルゴード的かつ可逆と仮定する. P が可逆とは, 任意の $u, v \in V$ に対し $\pi_u P_{u,v} = \pi_v P_{v,u}$ が成り立つことをいう. 例えば, β-ランダムウォーク [21] やメトロポリスウォーク [26] の遷移確率行列は可逆である.

2.1.1 複数トークンのランダムウォークの記法

今, $\mu^{(0)} = (\mu^{(0)}_1, \ldots, \mu^{(0)}_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を V 上の $k \geq 1$ トークンの初期配置とする. 各時刻 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, $v \in V$ 上の各トークンは独立に確率 $P_{v,u}$ で $u \in V$ へランダムに遷移する. ここで $\mu^{(t)} = (\mu^{(t)}_1, \ldots, \mu^{(t)}_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ を時刻 t のトークンの期待配置とする. 即ち, $\mu^{(t)} = \mu^{(0)} P^t$ が成り立つ. ここで, 混交時間の定義より $t \geq \tau(\varepsilon)$ ならば $\mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(\mu^{(t)}/k, \pi) \leq \varepsilon$ が成り立つことに注意する.

2.2 SRT ルーターモデル

任意の実数の遷移確率を含むランダムウォークを模倣するため, 超一様分布列 (cf. [5], [30]) に基づく決定的過程が [20] や [28] で提案されており, それぞれスタックウォーク, SRT ルーターモデルと呼ばれている. 本節ではこのモデルの定義を行う. $\mathcal{N}(v)$ を v の隣接頂点の集合 ($\mathcal{N}(v) = \{u \in V \mid P_{v,u} > 0\}$) とする. SRT ルーターモデルでは, k 個のトークンは与えられた P に対し各 $v \in V$ 上に定義される SRT ルーター $\sigma_v : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathcal{N}(v)$ に従って遷移を繰り返す.

今, $\sigma_v(i)$ は与えられた $\sigma_v(0), \ldots, \sigma_v(i-1)$ に対し, 再帰的に以下のように定義される. まず, $T_i(v) = \{u \in \mathcal{N}(v) \mid |\{j \in [0, i) \mid \sigma_v(j) = u\}| - (i+1)P_{v,u} < 0\}$ とする. ここで $[z, z') = \{z, z+1, \ldots, z'-1\}$ である ($[z, z) = \emptyset$). このとき, $\sigma_v(i)$ を

$$\frac{\left|\{j\in[0,i)\mid\sigma_v(j)=u\}\right|+1}{P_{v,u}}$$

を最小化する $u^* \in T_i(v)$ と定義する. そのような $u \in T_i(v)$ が複数あった場合, 予め決めておいた順序に従って選ぶ. このとき, $\sigma_v(0), \sigma_v(1), \ldots$ は以下の性質を満たすことが知られている.

命題 2.1. *[5], [30]* 任意の $P, v, u \in V$, 整数 $z > 0$ に対し,

$$\left|\left|\{j\in[0,z)\mid\sigma_v(j)=u\}\right|-z\cdot P_{v,u}\right|<1$$

が成り立つ.

今, $\chi^{(0)} = \mu^{(0)}$, そして $\chi^{(t)} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を時刻 t の SRT ルーターモデルにおける k トークンの配置とする ($\sum_{v\in V} \chi^{(t)}_v = k$). このとき, SRT ルーターモデルは以下のように動作する. まず $t = 0$ のとき, 各頂点 v は $\chi^{(0)}_v$ 個のトークンを $\sigma_v(0), \sigma_v(1), \ldots, \sigma_v(\chi^{(0)}_v - 1)$ に従って近傍へ振り分ける. 言い換えると, 各頂点 v は $|\{j \in [0, \chi^{(0)}_v) \mid \sigma_v(j) = u\}|$ 個のトークンを u へ遷移させ, $\chi^{(1)}_u = \sum_{v\in V} |\{j \in [0, \chi^{(0)}_v) \mid \sigma_v(j) = u\}|$ となる. 次の時刻 ($t = 1$) では, 各頂点 v は $\chi^{(1)}_v$ 個のトークンを $\sigma_v(\chi^{(0)}_v), \sigma_v(\chi^{(0)}_v+1), \ldots, \sigma_v(\chi^{(0)}_v+\chi^{(1)}_v-1)$ に従って近傍へ振り分ける. 今, 時刻 t で v から u へ遷移するトークン数を $Z^{(t)}_{v,u}$ とすると,

$$Z^{(t)}_{v,u} = \left|\left\{j\in[0,\chi^{(t)}_v)\mid\sigma_v(X^{(t)}_v+j)=u\right\}\right|, \tag{4}$$

となる. ここで $X^{(T)} = \sum_{t=0}^{T-1} \chi^{(t)}$ ($X^{(0)}_v = 0$) とする, そして, $\chi^{(t+1)}$ は任意の $u \in V$ に対し

$$\chi^{(t+1)}_u = \sum_{v\in V} Z^{(t)}_{v,u} = \sum_{v\in\mathcal{N}(u)} Z^{(t)}_{v,u} \tag{5}$$

と定義される. なお, 定義より任意の $v \in V$ に対し

$$\sum_{u\in V} Z^{(t)}_{v,u} = \sum_{u\in\mathcal{N}(v)} Z^{(t)}_{v,u} = \chi^{(t)}_v \tag{6}$$

が成り立つ. ここで, SRT ルーターモデルに対し, 命題 2.1 に基づき以下の命題が成り立つ.

命題 2.2. 任意の P と $T \geq 0$ に対し

$$\left|\sum_{t=0}^{T}(Z^{(t)}_{v,u}-\chi^{(t)}_v P_{v,u})\right|<1$$

が成り立つ.

Proof. $Z^{(t)}_{v,u}$ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{T} Z^{(t)}_{v,u} &= \sum_{t=0}^{T}\left|\left\{j\in[0,\chi^{(t)}_v)\mid\sigma_v(X^{(t)}_v+j)=u\right\}\right|\\ &= \sum_{t=0}^{T}\left|\left\{j\in[X^{(t)}_v,X^{(t)}_v+\chi^{(t)}_v)\mid\sigma_v(j)=u\right\}\right|\\ &= \left|\left\{j\in[0,X^{(T+1)}_v)\mid\sigma_v(j)=u\right\}\right|\end{aligned}$$

*1 P が既約 ($\forall u, v \in V, \exists t > 0, P^t_{u,v} > 0$) かつ非周期的 ($\forall v \in V, \mathrm{GCD}\{t \in \mathbb{Z}_{>0} \mid P^t_{v,v} > 0\}$) のとき, P はエルゴード的であるという.

が成り立ち, また $\sum_{t=0}^{T} \chi_v^{(t)} P_{v,u} = X_v^{(T+1)} P_{v,u}$ である. 従って, $z = X_v^{(T+1)}$ と置くことで命題 2.1 より命題 2.2 が得られる. □

3. 訪問頻度の解析

SRT ルーターモデルの全訪問時間の解析の前に, 本節では $|X_w^{(T)} - M_w^{(T)}|$ の上界の解析を行う. ここで, $M^{(T)} = \sum_{t=0}^{T-1} \mu^{(t)}$ ($M_v^{(0)} = 0$) である. 今, $\delta(v) = |\mathcal{N}(v)|$, $\Delta = \max_{v \in V} \delta(v)$ と定義する.

定理 3.1. P はエルゴード的かつ可逆と仮定する. このとき,

$$\left| X_w^{(T)} - M_w^{(T)} \right| \le 3\pi_w t^* \max_{u \in V} \frac{\delta(u)}{\pi_u} = \mathrm{O}\left(\frac{\pi_{\max}}{\pi_{\min}} t^* \Delta \right)$$

が任意の $w \in V$ と $T > 0$ に対し成り立つ.

定理 3.2 より, [20] の定理 4 に似た以下の系が導かれる.

系 3.2. P はエルゴード的かつ可逆と仮定する. このとき,

$$\left| \pi_w - \frac{X_w^{(T)}}{kT} \right| \le \frac{3t^*}{2T} + \frac{3\pi_w t^* \max_{u \in V} \frac{\delta(u)}{\pi_u}}{kT} = \frac{K\pi_w}{T}$$

が任意の $w \in V$ と $T > 0$ に対し成り立つ. ここで $K = \mathrm{O}(\frac{t^*}{\pi_w} + \frac{t^* \Delta}{\pi_{\min} k})$ は T に依存しない定数である.

[20] の定理 4 は単一トークンのロータールーターモデルに対し上界を与えているのに対し, 系 3.2 が k トークンの SRT ルーターモデルに対し上界を与えている.

系 3.2 は, $T \ge 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi_w \Delta}{\pi_{\min} k}\right) t^* \varepsilon^{-1}$ ならば $\left|\pi_w - \frac{X_w^{(T)}}{kT}\right| \le \varepsilon$ が成り立つことも示している.

定理 3.1 を示すため, まず以下の補題を示す. 以下の議論では, P はエルゴード的かつ可逆と仮定する.

補題 3.3. 任意の $w \in V$ と $T > 1$ に対し,

$$\begin{aligned} & X_w^{(T)} - M_w^{(T)} \\ &= \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} \sum_{t'=0}^{T-t-2} (Z_{v,u}^{(t')} - \chi_v^{(t')} P_{v,u})(P_{u,w}^t - \pi_w) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 補題 3.3 を示すために, まず以下の補題を導入する.

補題 3.4. *[28] (補題 4.1.)* 任意の $w \in V$ と $T > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} & \chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)} \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{u \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} (Z_{v,u}^{(t)} - \chi_v^{(t)} P_{v,u})(P_{u,w}^{T-t-1} - \pi_w) \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

$X^{(T)}, M^{(T)}$ の定義と補題 3.4 より,

$$X_w^{(T)} - M_w^{(T)} \tag{7}$$

$$= \sum_{t'=0}^{T-1} (\chi^{(t')} - \mu^{(t')}) = \sum_{t'=1}^{T-1} (\chi^{(t')} - \mu^{(t')})$$

$$= \sum_{t'=1}^{T-1} \sum_{t=0}^{t'-1} \sum_{u \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} (Z_{v,u}^{(t)} - \chi_v^{(t)} P_{v,u})(P_{u,w}^{t'-t-1} - \pi_w) \tag{8}$$

が成り立つ. (2 番目の等式は $\chi^{(0)} = \mu^{(0)}$ より成り立つ.) 簡単の為, $\phi_u^{(t)} = \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} (Z_{v,u}^{(t)} - \chi_v^{(t)} P_{v,u})$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} (8) &= \sum_{t'=1}^{T-1} \sum_{t=0}^{t'-1} \sum_{u \in V} \phi_u^{(t)} (P_{u,w}^{t'-t-1} - \pi_w) \\ &= \sum_{u \in V} \sum_{t'=1}^{T-1} \sum_{t=0}^{t'-1} \phi_u^{(t'-t-1)} (P_{u,w}^{t} - \pi_w) \end{aligned} \tag{9}$$

が成り立つ. 従って, 注意深く式変形を行うことで以下が得られる.

$$\begin{aligned} & \sum_{t'=1}^{T-1} \sum_{t=0}^{t'-1} \phi_u^{(t'-t-1)} (P_{u,w}^{t} - \pi_w) \\ &= \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{t'=t+1}^{T-1} \phi_u^{(t'-t-1)} (P_{u,w}^{t} - \pi_w) \\ &= \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{t'=0}^{T-t-2} \phi_u^{(t')} (P_{u,w}^{t} - \pi_w). \end{aligned} \tag{10}$$

式 (9) と式 (10) を組み合わせると,

$$\begin{aligned} (9) &= \sum_{u \in V} \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{t'=0}^{T-t-2} \phi_u^{(t')} (P_{u,w}^{t} - \pi_w) \\ &= \sum_{u \in V} \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{t'=0}^{T-t-2} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} (Z_{v,u}^{(t')} - \chi_v^{(t')} P_{v,u})(P_{u,w}^t - \pi_w) \end{aligned}$$

が成り立ち, 題意を得る. □

定理 3.1 の証明. $T = 1$ のとき自明であるため, 以下では $T > 1$ を仮定する. 補題 3.3 と命題 2.2 より,

$$\begin{aligned} & \left| X_w^{(T)} - M_w^{(T)} \right| \\ &= \left| \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} \sum_{t'=0}^{T-t-2} (Z_{v,u}^{(t')} - \chi_v^{(t')} P_{v,u})(P_{u,w}^t - \pi_w) \right| \\ &\le \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} \left| \sum_{t'=0}^{T-t-2} (Z_{v,u}^{(t')} - \chi_v^{(t')} P_{v,u}) \right| \left| P_{u,w}^t - \pi_w \right| \\ &< \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} \left| P_{u,w}^t - \pi_w \right| \\ &= \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{u \in V} \delta(u) \left| P_{u,w}^t - \pi_w \right| \end{aligned} \tag{11}$$

が成り立つ. ここで P の可逆性より,

$$(11) = \sum_{t=0}^{T-2}\sum_{u\in V}\delta(u)\left|\frac{\pi_w}{\pi_u}(P^t_{w,u}-\pi_u)\right|$$
$$\le \pi_w \max_{u\in V}\frac{\delta(u)}{\pi_u}\sum_{t=0}^{T-2}\sum_{u\in V}\left|P^t_{w,u}-\pi_u\right| \tag{12}$$

が成り立つ. 総変動距離の定義 (1) より,

$$\sum_{t=0}^{T-2}\sum_{u\in V}\left|P^t_{w,u}-\pi_u\right| = 2\sum_{t=0}^{T-2}\mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(P^t_{w,\cdot},\pi) \tag{13}$$

が成り立つ. ここで, 以下の補題を導入する.

補題 3.5. *[28]* (補題 *4.2.*) 任意の $v \in V$ と $T > 0$, γ $(0<\gamma<1/2)$ に対し,

$$\sum_{t=0}^{T-1}\mathcal{D}_{\mathrm{tv}}\left(P^t_{v,\cdot},\pi\right) \le \frac{1-\gamma}{1-2\gamma}\,\tau(\gamma)$$

が成り立つ.

従って,

$$(13) \le 2\cdot\frac{1-(1/4)}{1-2\cdot(1/4)}\tau(1/4) = 3t^* \tag{14}$$

が成り立ち, 題意を得る. □

系 *3.2* の証明. 定理 3.1 より,

$$\left|\pi_w - \frac{X^{(T)}_w}{kT}\right| = \frac{\left|kT\pi_w - X^{(T)}_w\right|}{kT}$$
$$\le \frac{\left|kT\pi_w - M^{(T)}_w\right| + \left|M^{(T)}_w - X^{(T)}_w\right|}{kT}$$
$$\le \frac{\left|M^{(T)}_w - kT\pi_w\right|}{kT} + \frac{3\pi_w t^*\max_{u\in V}\frac{\delta(u)}{\pi_u}}{kT}$$

が成り立つ. 従って, $|M^{(T)}_w - kT\pi_w| \le 3kt^*/2$ が成り立てば証明は終了する. 定義より $\sum_{v\in V}\mu^{(0)} = k$ であるため, $\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{u\in V}\mu^{(0)}\pi_w = kT\pi_w$ が成り立ち, また $M^{(T)}_w = \sum_{t=0}^{T-1}\mu^{(t)}_w = \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{u\in V}\mu^{(0)}_u P^t_{u,w}$ が成り立つことに注意すると,

$$\left|M^{(T)}_w - kT\pi_w\right| = \left|\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{u\in V}\mu^{(0)}_u P^t_{u,w} - \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{u\in V}\mu^{(0)}\pi_w\right|$$
$$= \left|\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{u\in V}\mu^{(0)}_u(P^t_{u,w}-\pi_w)\right|$$
$$\le \sum_{u\in V}\mu^{(0)}_u\sum_{t=0}^{T-1}|P^t_{u,w}-\pi_w| \tag{15}$$

が成り立つ. また補題 3.5 と総変動距離の定義 (1) より,

$$\sum_{t=0}^{T-1}|P^t_{u,w}-\pi_w| \le \sum_{t=0}^{T-1}\mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(P^t_{u,\cdot},\pi) \le \frac{3}{2}t^* \tag{16}$$

が成り立つ. 従って, 式 (15) と式 (16) より $|M^{(T)}_w - kT\pi_w| \le 3kt^*/2$ が成り立つため, 題意を得る. □

4. 全訪問時間の上界

訪問頻度の解析と, 可逆なマルコフ連鎖の技術を組み合わせることで SRT ルーターモデルの全訪問時間を得ることが出来る. 今, SRT ルーターモデルの全訪問時間を以下のように定義する.

$$T_{cover} = \min\left\{T\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \mid X^{(T)}_v \ge 1\ (\forall v\in V)\right\} \tag{17}$$

まず, 以下の主定理を示す.

定理 4.1. P はエルゴード的かつ可逆と仮定する. このとき,

$$T_{cover} \le 2t^* + 1 + \frac{12\max_{u\in V}\frac{\delta(u)}{\pi_u}\cdot t^*}{k}$$
$$= \mathrm{O}\left(\max\left\{\frac{t^*\Delta}{\pi_{\min}k}, t^*\right\}\right)$$

が任意の $k\ge 1$ 個のトークンの初期配置に対し成り立つ.

定理 4.1 は (無理数を含みうる) 一般の遷移確率を模倣する決定的過程の全訪問時間に対する初の上界である. G 上の単純ランダムウォークの遷移確率行列を定理 4.1 に当てはめることで, 以下の系を得る.

系 4.2. 任意の G と $k\ge 1$ 個のトークンの初期配置に対し,

$$T_{cover} \le 2t^* + 1 + \frac{24mt^*}{k} = \mathrm{O}\left(\max\left\{\frac{mt^*}{k}, t^*\right\}\right)$$

が G 上の任意のロータールーターモデルに対し成り立つ. ここで t^* は G 上の単純ランダムウォークの混交時間である.

[24] で示された上界は $\mathrm{O}\big(t^* + (\Delta/\delta)(mt^*/k)\big)$ であった (定理 4.1, 命題 4.2, 定理 4.5). ここで Δ/δ グラフの最大/最小次数を表す. 従って系 4.2 は正則でないグラフに対し上界を改善している. [13] の上界 $\mathrm{O}(mD/\log k)$(定理 3.3, 3.7) と比べると, $t^* = \mathrm{O}\big(D(k/\log k)\big)$ ならば上界を改善出来ている (t^* が小さい, もしくは k が大きい).

定理 4.1 を示すため, まず以下の補題を示す.

補題 4.3. P はエルゴード的かつ可逆と仮定する. このとき, 任意の $u,w\in V$ に対し, $t\ge 2t^*$ ならば

$$P^t_{u,w} \ge \frac{\pi_w}{4}$$

が成り立つ.

Proof. 分離距離 (*separation distance*) [2] は

$$s(t) = \max_{u,v\in V}\left(1-\frac{P^t_{u,v}}{\pi_v}\right). \tag{18}$$

と定義される. この距離は任意の $t,t' \ge 1$ に対し $s(t+t') \le s(t)s(t')$ を満たす (submultiplicativity, [2] の補題 3.7). 更に, 可逆な P に対し以下の補題が成り立つ.

補題 4.4. *[25]* (補題 *19.3.*) P は可逆と仮定する. このとき,

$$s(2t) \le 1-\left(1-\bar{d}(t)\right)^2$$

が任意の $t \geq 0$ に対し成り立つ. ここで $\bar{d}(t) = \max_{u,v \in V} \mathcal{D}_{\mathrm{tv}}(P^t_{u,\cdot}, P^t_{v,\cdot})$ である.

P がエルゴード的ならば

$$\bar{d}(t^*) \leq \frac{1}{2} \tag{19}$$

が成り立つことが知られている ([25] の (4.34) を参照されたい). これらの事実を組み合わせることで,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{P^t_{u,w}}{\pi_w} &\leq s(t) \leq s(2t^*) \leq 1 - (1 - \bar{d}(t^*))^2 \\ &\leq 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

が成り立ち, 題意を得る. □

定理 *4.1* の証明. 補題 4.3 は任意のエルゴード的かつ可逆な P, 任意の $u, w \in V$ と $t \geq 2t^*$ に対して $P^t_{u,w}$ の下界を与える. 従って [24] のように $M^{(T)}_w$ の下界を得ることが出来る. 即ち,

$$\begin{aligned} M^{(T)}_w &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{u \in V} \mu^{(0)}_u P^t_{u,w} \geq \sum_{t=2t^*}^{T-1} \sum_{u \in V} \mu^{(0)}_u P^t_{u,w} \\ &\geq \sum_{t=2t^*}^{T-1} \sum_{u \in V} \mu^{(0)}_u \frac{\pi_w}{4} = \frac{k\pi_w(T - 2t^*)}{4} \end{aligned} \tag{20}$$

が成り立つ. 従って定理 3.1 と式 (20) から,

$$\begin{aligned} X^{(T)}_w &\geq M^{(T)}_w - 3\pi_w t^* \max_{u \in V} \frac{\delta(u)}{\pi_u} \\ &\geq \frac{k\pi_w(T - 2t^*)}{4} - 3\pi_w t^* \max_{u \in V} \frac{\delta(u)}{\pi_u} \end{aligned} \tag{21}$$

が成り立つ. 式 (21) より, 任意の $w \in V$ と

$$T' > 2t^* + \frac{12t^* \max_{u \in V} \frac{\delta(u)}{\pi_u}}{k}.$$

を満たす $T' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$X^{(T')}_w > 0$$

が成り立つことが分かる. この事実と全訪問時間の定義 (22) より $T_{cover} \leq T'$ となり, 題意を得る. □

系 *4.2* の証明. G 上の単純ランダムウォークに対応する SRT ルーターモデルが G 上のロータールーターモデルと対応することと, G 上の単純ランダムウォークに対し $\pi_u = \frac{\delta(u)}{2m}$ であるから $\max_{u \in V} \frac{\delta(u)}{\pi_u} = 2m$ が成り立つことに注意すると,

$$T_{cover} \leq 2t^* + 1 + \frac{24mt^*}{k}$$

が定理 4.1 より導かれ, 題意を得る. □

5. まとめと今後の課題

本論文では $k \geq 1$ トークンの SRT ルーターモデルの訪問頻度 $X^{(T)}_v$ と, 任意のエルゴード的かつ可逆な P に対する全訪問時間の上界を与えた. この上界は既存のローターールーターモデルの全訪問時間の上界を多くの場合改善している. 今後の課題として, β-ランダムウォーク, メトロポリスウォークなど “高速な” ランダムウォークを脱乱択化することが挙げられる.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 15J03840 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] H. Akbari and P. Berenbrink, Parallel rotor walks on finite graphs and applications in discrete load balancing, Proc. SPAA 2013, 186–195.
[2] D. Aldous and P. Diaconis, Strong uniform times and finite random walks, Advances in Applied Mathematics, **8** (1987), 69–97.
[3] R. Aleliunas, R. Karp, R. Lipton, L. Lovasz and C. Rackoff, Random walks, universal traversal sequences, and the complexity of maze problems, Proc. FOCS 1979, 218–223.
[4] N. Alon, C. Avin, M. Koucky, G. Kozma, Z. Lotker, M. R. Tuttle, Many random walks are faster than one, Combinatorics, Probability & Computing, **20** (2011), 481–502.
[5] O. Angel, A.E. Holroyd, J. Martin, and J. Propp, Discrete low discrepancy sequences, arXiv:0910.1077.
[6] E. Bampas, L. Gasieniec, N. Hanusse, D. Ilcinkas, R. Klasing, and A. Kosowski, Euler tour lock-in problem in the rotor-router model, Proc. DISC 2009, 423–435
[7] P. Berenbrink, R. Klasing, A. Kosowski, F. Mallmann-Trenn, and P. Uznanski, Improved analysis of deterministic load-balancing schemes, Proc. PODC 2015, 301–310.
[8] A. Broder, A. Karlin, P. Raghavan, E. Upfal, Trading space for time in undirected s–t connectivity, SIAM Journal on Computing **23** (1994) 324–334.
[9] J. Chalopin, S. Das, P. Gawrychowski, A. Kosowski, A. Labourel and P. Uznanski, Lock-in problem for parallel rotor-router walks, arXiv:1407.3200.
[10] J. Cooper, B. Doerr, T. Friedrich, and J. Spencer, Deterministic random walks on regular trees, Random Structures & Algorithms, **37** (2010), 353–366.
[11] J. Cooper, B. Doerr, J. Spencer, and G. Tardos, Deterministic random walks on the integers, European Journal of Combinatorics, **28** (2007), 2072–2090.
[12] J. Cooper and J. Spencer, Simulating a random walk with constant error, Combinatorics, Probability and Computing, **15** (2006), 815–822.
[13] D. Dereniowski, A. Kosowski, D. Pajak, and P. Uznanski, Bounds on the cover time of parallel rotor walks, LIPICS, **25** (STACS 2014), 263–275.
[14] B. Doerr and T. Friedrich, Deterministic random walks on the two-dimensional grid, Combinatorics, Probability and Computing, **18** (2009), 123–144.
[15] R. Elsasser and T. Sauerwald, Tight bounds for the cover time of multiple random walks, Theoretical Computer Science, **412** (2011), 2623–2641.
[16] U. Feige, A tight upper bound for the cover time of random walks on graphs, Random Structures and Algorithms, **6** (1995), 51–54.

[17] U. Feige, A tight lower bound for the cover time of random walks on graphs, Random Structures and Algorithms, **6** (1995), 433–438.

[18] T. Friedrich, M. Gairing, and T. Sauerwald, Quasirandom load balancing, SIAM Journal on Computing, **41** (2012), 747–771.

[19] T. Friedrich and T. Sauerwald, The cover time of deterministic random walks, The Electronic Journal of Combinatorics, **17** (2010), R167. Lecture Notes in Computer Science, **6196** (COCOON 2010), 130–139.

[20] A. E. Holroyd and J. Propp, Rotor walks and Markov chains, M. Lladser, R.S. Maier, M. Mishna, A. Rechnitzer, (eds.), Algorithmic Probability and Combinatorics, The American Mathematical Society, 2010, 105–126.

[21] S. Ikeda, I. Kubo, and M. Yamashita, The hitting and cover times of random walks on finite graphs using local degree information, Theoretical Computer Science, **410** (2009), 94–100.

[22] H. Kajino, S. Kijima, and K. Makino, Discrepancy analysis of deterministic random walks on finite irreducible digraphs, discussion paper.

[23] S. Kijima, K. Koga, and K. Makino, Deterministic random walks on finite graphs, Random Structures & Algorithms, **46** (2015), 739–761.

[24] A. Kosowski and D. Pajak, Does adding more agents make a difference? A case study of cover time for the rotor-router, Proc. ICALP 2014, 544–555.

[25] D. A. Levine, Y. Peres, and E. L. Wilmer, Markov Chain and Mixing Times, The American Mathematical Society, 2008.

[26] Y. Nonaka, H. Ono, K. Sadakane, M. Yamashita, The hitting and cover times of Metropolis walks, Theoretical Computer Science, **411** (2010), 1889–1894.

[27] Y. Rabani, A. Sinclair, and R. Wanka, Local divergence of Markov chains and analysis of iterative load balancing schemes, Proc. FOCS 1998, 694–705.

[28] T. Shiraga, Y. Yamauchi, S. Kijima, and M. Yamashita, Deterministic random walks for rapidly mixing chains, arXiv:1311.3749.

[29] T. Shiraga, Y. Yamauchi, S. Kijima, and M. Yamashita, Total variation discrepancy of deterministic random walks for ergodic Markov chains, Proc. ANALCO 2016, 138–148.

[30] R. Tijdeman, The chairman assignment problem, Discrete Mathematics. **32** (1980), 323–330.

[31] V. Yanovski, I.A. Wagner, and A.M. Bruckstein, A distributed ant algorithm for efficiently patrolling a network, Algorithmica, **37** (2003), 165–186.