誌上討論

伊澤・小田両氏への回答

紀　一　誠†

1. はじめに

本誌 Vol. 20, No. 1 (1979) ショートノート[1]において伊澤・小田両氏よりいただいた小著‘資源切り出し型待ち行列の解析’[2] に関する御注意について本稿でお答えし，関連するいくつかの問題について述べる．

以下の議論において，用語および記号は文献 2)のそれを用いさせていただく．また，文献 1)で議論されているモデルⅠ，Ⅱとの整合性を保つため，文献 2)で定義されるモデルについて次の如くの若干の拡張をしモデルを整理しておく．

文献 2)のモデルの設定⑥項では，“呼の資源保留時間 H はパラメータ μ なる指数分布に従うものとする”としているが，これを，“呼の資源保留時間 H は，資源保留呼数が m のときパラメータ μ_m なる指数分布に従うものとする”と拡張しておく．また，加えて，トラフィックが十分大きく待ち行列中に十分多数の呼が確率 1 で存在するようなモデルを過密輻輳状態にある資源切り出し型待ち行列モデルと称することにする．

いずれの場合も μ_m の設定のしかたにより，次の 2 種類のモデルを設定することができる．

1) Processor Sharing 型 (P.S. 型)

$\mu_m=\mu/m$, $(m=1, 2, \cdots, \mu_0=0)$ とした場合．

資源保留呼が m 個のときにはサービス率を $1/m$ に減少し m 個を並列処理する．個々の呼の処理時間は m 倍に延長される．この方式は Processor Sharing 方式といわれるもので，M/M/1 の拡張とみなされるものである．

この方式のモデルを P.S. 型の資源切り出し型待ち行列モデルと称することにする．文献 1)でモデルⅡとしているものがこれである．

2) Many Servers 型 (M.S. 型)

$\mu_m=\mu$ $(m=1, 2, \cdots, \mu_0=0)$ とした場合．

H は m に依存せず，文献 2)で最初に定義されたモデルそのものになる．この方式は Many Servers System M/M/S の拡張とみなせるものであるが，S が定数ではなく確率変数である点で通常の M/M/S とは異なっている．これを M.S. 型の資源切り出し型待ち行列モデルと称することにする．文献 1)でモデルⅠとしているものがこれである．

2. 文献 2)の補題 1 について

文献 2)では過密輻輳状態ではない一般の M.S. 型待ち行列モデルを扱っている．解析の大略は，系の状態を $(j, k)\equiv$(系内呼数，資源保留呼数) として平衡方程式を作り，次の補題 1 を用いて系内呼数の定常分布を求めるものである．

補題 1[2]：任意時点で次が成り立つ．

$$r(j, k)=P_r\{\text{資源保留呼数}=k\,|\,\text{系内呼数}=j\}$$
$$=\begin{cases}F_k(c)-F_{k+1}(c), & 1\leqq k\leqq j-1\\ F_j(c) & , \ k=j\end{cases} \qquad (1)$$

文献 1)の御指摘は，Simulation による数値実験結果から (1) 式の成立が疑問とされたものであった．

(1) は P.S. 型の場合にはこのまま成り立つが，M.S. 型の場合には，“任意時点”とある部分を“呼の退去直後時点”と修正しないと成立しない．

今，呼は到着順に番号付けられており，n 番目の呼の退去時点を t_n とし，$r^+(j, k)=P_r\{K(t_n+0)=k\,|\,J(t_n+0)=j\}$ とする．$J(t_n+0)=j$ のとき，j 個の系内呼の切り出し要求 $\{X_i\}$ は $i.i.d.r.v.$ であるから，$K(t_n+0)=\max\{k\,|\,S(k)\leqq c\}$ で定義される確率変数となり，$r^+(j, k)$ は (1) の右辺に等しくなる．(1) 式の左辺 $r(j, k)$ を $r^+(j, k)$ と修正したものを，補題 1 (修正) としておく．P.S. 型の場合には $r(j, k)=r^+(j, k)$ であるが M.S. 型の場合には一般に $r(j, k)\fallingdotseq r^+(j, k)$ である．文献 1)の Simulation 結果のうち，P.S. 型モデル (モデルⅡ) ではほとんど誤差がみられないのに対して M.S. 型 (モデルⅠ) で誤差が大きくなるのはこの理由による．従って，M.S. 型に関

† 日本電気(株)情報処理営業支援本部第 1 システム支援部

する文献2)の解析結果は厳密解とはなっておらず，$r(j,k)\fallingdotseq r^{+}(j,k)$ とした意味での近似解となっている．$\{f_{\omega}\}$ が deterministic な場合に厳密解と一致するのはこのときの $\{f_{\omega}\}$ が $r(j,k)=r^{+}(j,k)$ となる特殊な分布となっているためであり，一般に成り立つことではない．

3. 過密輻輳時の解

補題1（修正）を用いると過密輻輳時の解を容易に得ることができる．任意時点の資源保留呼数を K とする．

1) μ_m が一般の場合

$$P_r\{K=k\}=\frac{F_k(c)-F_{k+1}(c)}{k\mu_k\sum_{l=1}^{c}\{F_l(c)-F_{l+1}(c)\}/l\mu_l} \quad (2)$$

2) P.S. 型の場合

$$P_r\{K=k\}=F_k(c)-F_{k+1}(c),\quad E(K)=\sum_{l=1}^{c}F_l(c) \quad (1)$$

3) M.S. 型の場合

$$P_r\{K=k\}=\frac{F_k(c)-F_{k+1}(c)}{k\mu\left\{F_1(c)-\sum_{k=2}^{c}F_k(c)/k(k-1)\right\}},$$

$$E(K)=\left[F_1(c)-\sum_{k=2}^{c}F_k(c)/k(k-1)\right]^{-1} \quad (4)$$

4. 系内呼数の定常分布について

$r^{+}(j,k)$ が補題1（修正）により与えられるので，呼の退去直後時点を取り出し imbeded Markov chain を作れば退去直後時点の系内呼数の定常分布が得られる．考えている系では退去直後の分布と到着前分布は等しく，到着が指数分布であるから到着直前分布と任意時点分布は一致する．従って，退去直後時点での imbed Markov chain $\{p_{ij}\}$ から任意時点の分布が得られ解析の手掛りとすることができる．

今，μ_m を一般とし，$J(t_m+0)=i$ であり，次の退去時点までに n 個の到着のある確率 $U(i,n)$ を補題1（修正）を用いて求めると（5）式の如くになる．

$$U(i,n)=\frac{i\lambda^{n}\mu_i}{(\lambda+i\mu_i)^{n+1}} +\sum_{l=1}^{n}\lambda^{n}F_{i+l}(c)\left[\frac{(i+l)\mu_{i+l}}{\{\lambda+(i+l)\mu_{i+l}\}^{n-l+1}} -\frac{(i+l-1)\mu_{i+l-1}}{\{\lambda+(i+l-1)\mu_{i+l-1}\}^{n-j+1}}\right]\Big/\prod_{j=0}^{l-1}\{\lambda+(i+j)\mu_{i+j}\} \quad (5)$$

1) P.S. 型の場合

（5）式より $\{p_{i,j}\}$ は次の如くなる．

$$p_{i,j}=\begin{cases}k_j &,\ i=0,1\\ k_{j-i+1}, & i\geqq ?\end{cases} \quad (6)$$

ただし，$k_n=a^{n}/(a+1)^{n+1}$

（6）式は，実は，M/M/1 の退去直後時点についての imbeded Markov chain となっている．従って，P.S. 型の任意時点の系内呼数の定常分布は M/M/1 のそれに一致し，$P(j)=(1-a)a^{j}$ となる．

2) M.S. 型の場合

$\{p_{i,j}\}$ は（6）と同じ型になるが，k_n は次式の如くになり解析は P.S. 型よりはるかに複雑になる．

$$k_n=\frac{ia^{n}}{(a+i)^{n+1}} +a^{n}\cdot\sum_{l=1}^{n}F_{i+l}(c)\left\{\frac{i+l}{(a+i+l)^{n-l+1}} -\frac{i+l-1}{(a+i+l-1)^{n-l+1}}\right\}\Big/\prod_{j=0}^{l-1}(a+i+j),$$

$$k_0=\frac{F_1(c)}{a+1}-\sum_{l=2}^{i}\frac{aF_l(c)}{(a+l)(a+l-1)} \quad (7)$$

P.S. 型は解析は容易であるが現実問題への適応力は弱く，M.S. 型は逆に適応性は高いが解析が複雑である．

5. まとめ

M.S. 型に関する文献2)の補題1の問題点については OR 学会の，計算機システムと確率モデル研究会 (COSMOS) のメンバー方から系の lumpability に関する御注意と併せて御指摘をいただき，訂正稿を準備中に文献1)による御指摘をいただいた．

本稿では触れる余裕が無かったが系の lumpability に関してもいくつかの興味ある問題がみつかっている．これらについては紙幅の都合で省略した本稿中の諸式の詳細と共に追って別稿とさせていただきたい．

最後に，小論2)を熱心に御検討下さった伊澤・小田両氏に感謝いたします．また，数々の貴重な御注意を下さり，部会の話題としても御討論下さったOR学会 COSMOS のメンバーの皆様に感謝いたします．

参考文献

1) 伊澤，小田：紀一誠著“資源切り出し型待ち行列の解析”について，情報処理学会論文誌，Vol. 20, No. 1, pp. 88-90 (1979).
2) 紀 一誠：資源切り出し型待ち行列の解析，情報処理，Vol. 19, No. 2, pp. 151-157 (1978).

（昭和54年3月20日受付）