

要素間補間による共回転系弾性体シミュレーションの高速化

福原吉博[†] 齋藤隼介[†] 成田史弥[†] 森島繁生[‡][†] 早稲田大学 [‡] 早稲田大学理工学総合研究所

1. はじめに

弾性体は肌や布、ゴムなど多くの物体の運動を記述するモデルであり、コンピュータグラフィックスにとって欠かせないものである。しかし、弾性体シミュレーションには大きな計算コストを要するため、多くの高速化の研究がなされてきた。

共回転系弾性体は大変形に対して頑強であるという特徴から、頻繁に使用されている弾性体モデルの1つである。共回転系弾性体のシミュレーションの過程では、各ステップにおいてモデルを構成する全要素の回転行列が必要である。そのため、毎ステップごとに全要素に対して、特異値分解を実行し、回転行列を計算しなければならない。特異値分解についてはMcAdamsら[2]の手法など高速な計算方法が提案されているが、膨大な要素からなるモデルの全要素に対して特異値分解を行うには、依然として大きな計算コストを要する。

そこで、本稿ではサンプリングされた代表要素の回転行列から残りの要素の回転行列を滑らかに補間することにより、特異値分解の工程の計算時間を削減し、シミュレーションを高速化する手法を提案する。

2. 背景

2.1. 共回転系弾性体

共回転系弾性体を変形させたときに蓄えられる歪みエネルギー E は、式(1)のように表すことができる。

$$E = \int_{\Omega} \mu \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})\|_F^2 d\mathbf{x} \quad (1)$$

\mathbf{F} は変形勾配テンソル、 μ はラメ定数であり、 \mathbf{R} は極分解 $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{S}$ によって得られる回転行列である。また、McAdamsら[2]の手法に従って近似を行った。ここで、モデルを m 個の要素に離散化し、定数項を無視すると、式(1)の歪みエネルギーは以下のような行列を用いた形式で書き表すことができる。

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i\|_F^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{r} \quad (2)$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n}$ は弾性体の全頂点の位置であり、 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{9m}$ は、 $\mathbf{R} = (\text{vec}(\mathbf{R}_1) \dots \text{vec}(\mathbf{R}_m))$ である。よって、外力を \mathbf{f}_{ext} とすると、エネルギーは式(3)のように表せる。

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{r} + \mathbf{x}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (3)$$

式(3)の最小化問題を解くことで共回転系弾性体のシミュレーションを行うことができる。

2.2. Local/Global optimization

式(3)の最小化問題の解法として、Sokineら[4]によって提案されたLocal/Global optimizationを説明する。Local/Global optimizationではLocal stepとGlobal stepの2つのステップを繰り返し、目的関数の最小化を行う。

Local stepでは \mathbf{x} を固定し、 \mathbf{r} について E を最小化する。具体的には、 \mathbf{x} を固定した状態で、すべての要素に対して特異値分解 $\mathbf{F}_i = \mathbf{U}_i \Sigma_i \mathbf{Q}_i$ を行い、 $\mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{U}_i^T$ によって E を最小化する回転行列 $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m$ を計算する。

Global stepでは \mathbf{r} を固定し、 \mathbf{x} について E を最小化する。 E の \mathbf{x} についての偏微分は

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{L}\mathbf{x} - 2\mathbf{J}\mathbf{r} + \mathbf{f}_{ext} \quad (4)$$

であるので、固定された \mathbf{r} に対して E を最小化する \mathbf{x} は以下の式(5)によって与えられる。

$$\mathbf{x} = (2\mathbf{L})^{-1} (2\mathbf{J}\mathbf{r} - \mathbf{f}_{ext}) \quad (5)$$

以上の2つのステップを繰り返し行うことにより E の最小化を行い、最終的な頂点の位置 \mathbf{x} を求める。

3. 提案手法

本手法では前章で説明したLocal/Global optimizationのLocal stepで行っていた回転行列の計算を要素間補間を用いて近似的に行うことにより、シミュレーションを高速化する。まず、事前計算として回転行列を厳密に計算する代表要素 e_{s0}, \dots, e_{sl} のサンプリングと、要素間補間に用いる重み w の計算を行っておく。Local stepにおいて回転行列を求める際は、初めに代表要素の回転行列を特異値分解によって計算する。次に、残りの要素の回転行列をクォータニオンブレンドを用いて要素間補間することで、全要素の回転行列を計算する。以下では、各ステップを説明していく。

3.1. サンプリング

特異値分解を行う代表要素を決定するために、各要素の重心に対してSchlömerら[3]のfarthest pointsを用いたサンプリングを行った。その結果、得られた l 個の代表要素を e_{s1}, \dots, e_{sl} と表す。また、全要素数に対する代表要素の割合を r_s と表す。サンプリング結果の例を図1に示す。ただし、サンプリングされた代表要素の重心を赤い球で示している。

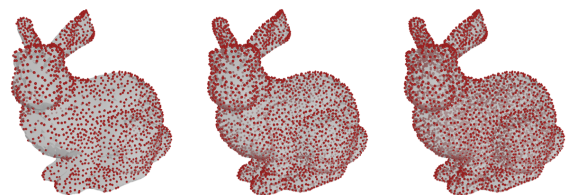


図1 サンプリング結果：5% (left), 10% (middle), 15% (right)

[†] Waseda University

[‡] Waseda Research Institute for Science and Engineering

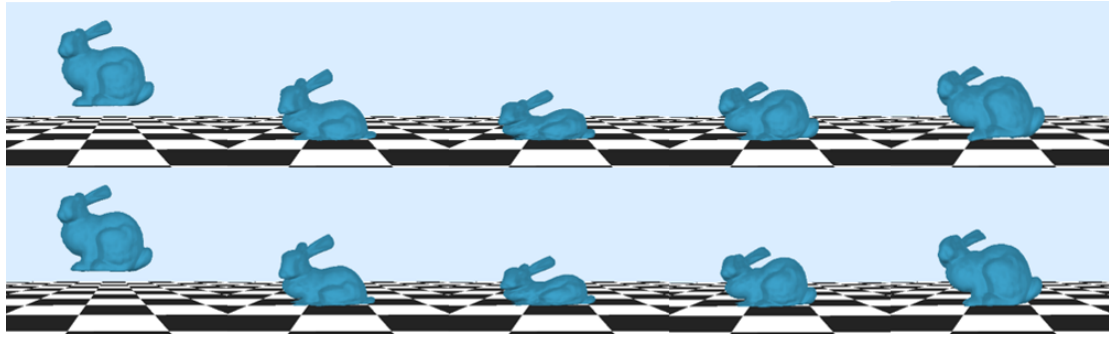


図2 シミュレーション結果：Local/Global (top), Our Method ($r_s = 5\%$) (bottom)

3.2. 代表要素の回転行列の計算

代表要素 e_{s1}, \dots, e_{sl} のそれぞれに対して、特異値分解 $F_{si} = U_{si} \Sigma_{si} Q_{si}$ を行い、 $R_{si} = Q_{si}^T U_{si}^T$ によって回転行列 R_{s1}, \dots, R_{sl} を計算する。

3.3. 回転行列の要素間補間

代表要素 e_{s1}, \dots, e_{sl} の回転行列をクォータニオンに変換したものを、 $\hat{q}_{s0}, \dots, \hat{q}_{sl}$ とする。このとき、要素 e_i の回転行列を式 (6) に従って補間する。

$$\hat{q}_i = \sum_{j=1}^l (-1)^{s_j} w_j^{(i)} \hat{q}_{sj} \quad (6)$$

ここで、 s_j は最短経路による補間を行うための整数であり Kavan ら [1] の手法に従って、式 (7) のように定める。

$$s_j = \begin{cases} 0 & \langle \hat{q}_{s1}, \hat{q}_{sj} \rangle \geq 0 \text{ のとき} \\ 1 & \langle \hat{q}_{s1}, \hat{q}_{sj} \rangle < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (7)$$

式 (6) の計算を代表要素以外のすべての要素に対して行う。これにより、全要素の回転行列が計算出来るので、2.2. 章で説明した方法によりシミュレーションを行うことが出来る。

最後に、要素間補間に用いた重み w の求め方を説明する。本研究では、有限要素法によってポアソン方程式をディリクレ境界条件のもとで解き、得られた解を用いて補間の重み w を決定した。まず、モデルの頂点座標 v_1, \dots, v_n を節点として異なる境界条件のもとでポアソン方程式を l 回解き、解 $u^{(1)} \dots u^{(l)}$ を得る。ただし、 $u^{(i)} \in \mathbb{R}^{3n}$ は、以下のディリクレ境界条件を課したときの解である。

$$u_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & j \in e_{si} \text{ のとき} \\ 0 & j \in e_{sk} \wedge k \neq i \text{ のとき} \end{cases} \quad (8)$$

$j \in e_{si}$ は j が要素 e_{si} の頂点のインデックスに含まれていることを表している。更に、解のそれぞれに対して要素ごとの平均をとり、 $\tilde{u}^{(1)} \dots \tilde{u}^{(l)}$ を得る。このとき、要素 e_i に対する代表要素 e_{sj} の重み $w_j^{(i)}$ を式 (9) によって定めた。

$$w_j^{(i)} = \frac{\tilde{u}_i^{(j)-1}}{\sum_{k=1}^l \left(\tilde{u}_i^{(k)-1} \right)} \quad (9)$$

4. 結果

提案手法を用いたシミュレーションの結果と、従来の Local/Global optimization を適用した結果を比較したものを図2に示す。この結果から、提案手法を用いても従来の Local/Global optimization を適応した場合と類似の結果を得

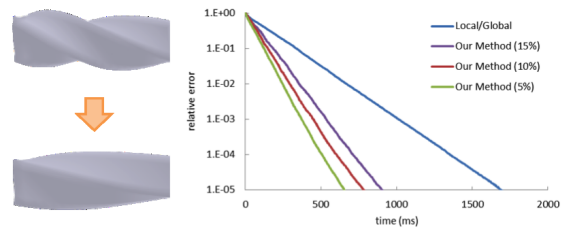


図3 エネルギー関数の収束

られることが確認できる。次に、2375 個の四面体から構成される四角柱のモデルを用いて、提案手法と従来の Local/Global optimization のエネルギーの相対誤差の減少の速度を比較した結果を図3に示す。ただし、提案手法の括弧内の値はサンプリングを行う要素の割合を表している。図3から提案手法を用いた場合、従来の Local/Global optimization を用いた場合よりも収束に要する時間が短縮されていることが確認出来る。

5. まとめと今後の課題

本稿では、回転行列の要素間補間により共回転系弾性体のシミュレーションを高速化する手法を提案した。これにより、従来の Local/Global optimization と比較して、各イテレーションに必要な時間を短縮することが可能となり、解の収束に要する時間の短縮を実現した。しかし、本手法で用いた回転行列の要素間補間は近似計算であり、解の収束点が従来の Local/Global optimization の結果と一致することは保証されていない。今後は代表要素のサンプリングの手法や重み w の計算方法について、より適切な方法を検討していきたい。

参考文献

- [1] Kavan, et al. Geometric Skinning with Approximate Dual Quaternion Blending. *ACM TOG* 27, 4, 105:1–105:23, 2008.
- [2] McAdams, A. et al. Efficient Elasticity for Character Skinning with Contact and Collisions. *ACM TOG* 30, 4, 37:1–37:12, 2011.
- [3] Schlömer, T. et al. Farthest-point Optimized Point Sets with Maximized Minimum Distance. *ACM SIGGRAPH*, 2011.
- [4] Sorkine, O. et al. As-rigid-as-possible Surface Modeling. *ACM SIGGRAPH*, 2007.