4Z-01

生命系ネットワークの安定性に関する解析研究

山下 祥平　　藤枝 舜祐　　坂田 克己
公立大学法人 前橋工科大学

1．はじめに

転写ネットワークと食物網ネットワークに共通な性質として，伝送経路の非対称性が，系の安定性を強化することがある[1]．今回，転写ネットワークと食物網ネットワークのベクトル場には類似した性質があること，ヤコビ行列のトレースと行列式が作る平面上における解析が有効であり相互作用エッジの有無が系の安定性に影響を及ぼす場合があることが分かった．

発表では，最新の解析結果を含めて，生命系ネットワークの安定性を考察する．

2．ベクトル場の解析

本研究では，転写ネットワークモデルとして

$$\dot{x} = a_x \frac{x^n}{K_{a_x} + x^n} + b_x \frac{K_{b_x}}{K_{b_x} + y^n} - c_x x$$
$$\dot{y} = a_y \frac{y^n}{K_{a_y} + y^n} + b_y \frac{K_{b_y}}{K_{b_y} + x^n} - c_y y$$

x, y：転写因子の発現量［2］

食物網ネットワークモデルとして

$$\dot{x} = x(1 - x - \alpha y) - \frac{\delta y x^2}{\kappa^2 + x^2} - h_x$$
$$\dot{y} = r y(1 - \beta x - y) + \varepsilon \frac{\delta y x^2}{\kappa^2 + x^2} - h_y$$

x, y：バイオマス［3］

について考察する．

ヌルクラインを描くと，二種類のモデル式に共通する図１のような概形が得られた．二種類のモデル式のグラフは，ヌルクラインが右下がりの軌跡を描く，各ヌルクラインの片端は座標軸上の１を末端とし，もう片端は他の座標軸に近づく．また，ヌルクラインは三箇所で交差しており，両端の固定点は安定な定常状態であり，中央の固定点は不安定な定常状態であることが二種類のモデル式に共通している．

以上から，二種類のモデルにおいて，相互作用の影響が等価であることが示唆される．ここで，食物網モデルは x と y の交差項を持っているので，交差項を持たない転写ネットワークモデルを一般化したモデル上で，系の安定性を考察することにした．

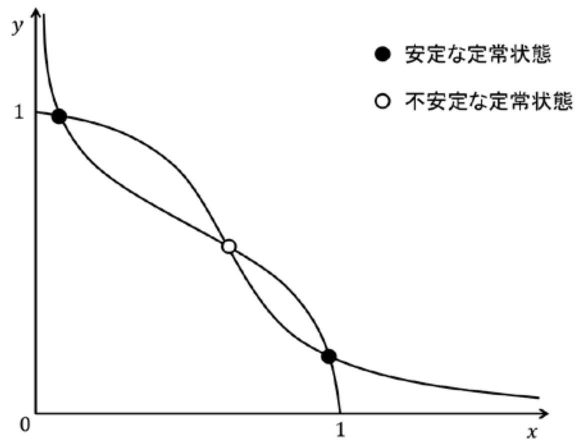

図１　二種類のモデルに共通するヌルクライン概形

3．安定性の解析

転写ネットワークモデルから導いた一般化モデルを用いて，安定性を解析する．

$$\dot{x} = a_x(x) - c_x x + b_x(y)$$
$$\dot{y} = b_y(x) + a_y(y) - c_y y$$

数式の各項は以下を表す．

x, y：各物質の量
$a_x(x),\ a_y(y)$：自己生成項
$b_x(y),\ b_y(x)$：相互作用項
$c_x,\ c_y$：自己分解係数（> 0）

A stability analysis of the transcriptional networks and food webs
Shohei Yamashita　Maebashi Institute of Technology
Shunsuke Fujieda
Katsumi Sakata

一般化モデルからヤコビ行列を求め，ヤコビ行列のトレースと行列式の組み合わせで固定点の安定性を解析する．ヤコビ行列を，

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と記す．図２は，横軸にヤコビ行列のトレースをとり，縦軸に行列式をとった平面グラフである．灰色に塗りつぶした第２象限で，固定点は安定した定常状態を持つ．図２において，縦軸である行列式 $AD - BC$ に着目すると，AD が一定のときは，BC の大小により固定点に対応した平面グラフ上の点が垂直方向に移動する．BC の変化により不安定を安定にできる固定点の領域は左半平面（$A+D < 0$）に限られることが分かる．この例は，安定性の解析を平面上の軌跡の解析に帰着できることを示しており，ヤコビ行列のトレースと行列式が作る平面上における解析が有効であることが示唆された．

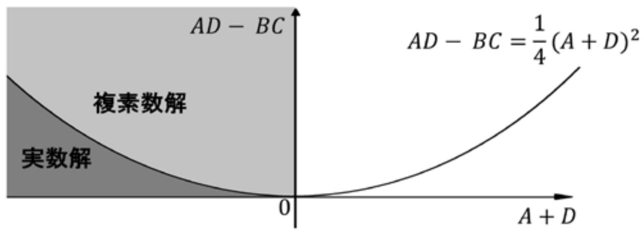

図２　トレース-行列式平面上の固定点解析

一般化モデルに対し，固定点が存在する条件と固定点の安定性を解析した（表１）．ケース１から，自己生成がない場合は，固定点の近傍で変化が緩やかな促進的な相互作用がある時，x と y は安定共存できることが分かる．ケース２から，自己生成があってもそれが固定点の近傍で変化が緩やかな自己生成であれば，安定共存できること，促進的な相互作用に加え抑制的な相互作用でも，固定点の近傍で変化が緩やかな相互作用であれば安定共存できることが分かる．ケース１とケース２から，定常状態の安定性に固定点近傍の相互作用および自己生成の傾斜が影響していることが示唆された．

参考文献

[1] 坂田 克己，大柳 一，齋藤 俊行，汎生物ネットワーク的な動特性の解析，日本応用数理学会 研究部会連合発表会 (2015)

[2] Sui Hung, Yan-Ping Guo, Gillian May, Tariq Enver, Bifurcation dynamics in lineage-commitment in bipotent progenitor cells, Developmental Biology 305, 695-713 (2007)

[3] Richard D. Horan, Eli P. Fenichel, Kevin L. S. Drury, David M. Lodge, Managing ecological thresholds in coupled environmental–human systems, PNAS, 108, 7333-7388 (2011)

表１　固定点が存在する条件と固定点の安定性

ケース	自己分解 c_x, c_y	自己生成 $a_x(x), a_y(y)$	固定点の存在条件	安定解の存在条件
1	$c_x, c_y > 0$	$a_x(x), a_y(y) = 0$	$0 < b_x(y),\ b_y(x)$ の時，固定点は存在する．	$\frac{\partial b_x(y)}{\partial y}\frac{\partial b_y(x)}{\partial x} < c_x\, c_y$ の時,安定解が存在する.
2		$a_x(x), a_y(y) > 0$	$b_x(y) < c_x x,\ b_y(x) < c_y y$ の時，固定点が存在する．	$\frac{\partial a_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(y)}{\partial y} < c_x + c_y$, $\frac{\partial b_x(y)}{\partial y}\frac{\partial b_y(x)}{\partial x} < (c_x - \frac{\partial a_x(x)}{\partial x})(c_y - \frac{\partial a_y(y)}{\partial y})$ の時,安定解が存在する.