

x が小さい場合の変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算†

吉田 年 雄** 二宮 市 三**

x が小さい場合について、第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の新しい数値計算法を提案している。 $K_\nu(x)$ の定義式 $K_\nu(x) = (\pi/2) \cdot (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)) / \sin \nu\pi$ に、第1種変形ベッセル関数 $I_{-\nu}(x)$ および $I_\nu(x)$ のべき級数展開を代入し、適当に項をまとめ、桁落ちを生ずる部分を所要の精度を有する最良近似式にて計算することにより、 $K_\nu(x)$ を精度良く、しかも能率的に計算している。例えば、 $(0, 0.5]$ では、 $\nu=0$ を中心とする展開として得られる $K_\nu(x) = (\pi/(2 \sin \nu\pi)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\}$ により計算を行う。ただし、 $A_k(\nu, x)$ の式中には、関数 $(1/\Gamma(k+1-\nu) - 1/\Gamma(k+1+\nu))/k!$ を含むが、そのまま式どおりに計算を行うと桁落ちを生ずる。そこで、これに対する最良近似式を新たに作成し、それによりその関数値を計算する。また、 $B_k(\nu, x)$ には、 $\phi_1(\nu, x) = (x/2)^{\nu-1}$ および $\phi_2(\nu, x) = 1 - (x/2)^\nu$ を含むが、そのまま計算すると桁落ちを生ずるときには、 $f(t) = e^t - 1$ なる関数の最良近似式により、 $\phi_1(\nu, x) = f(-\nu \ln(x/2))$ 、 $\phi_2(\nu, x) = -f(\nu \ln(x/2))$ として計算を行う。このようにして、桁落ちが無く、しかも能率的に $K_\nu(x)$ の値を計算する方法を述べている。

1. ま え が き

ν 次の第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ は、 ν 次と $-\nu$ 次の第1種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ と $I_{-\nu}(x)$ を用いて次式のように定義される¹⁾。

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \quad (1)$$

ただし、次数 ν が整数 n のときには、 $\nu \rightarrow n$ の極限で与えられる。本論文では、実数次数の $K_\nu(x)$ に対して、 $x \geq 0$ かつ x が小さいときに有用な計算法を提案する。なお、

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \quad (2)$$

なる関係があるので、 $\nu \geq 0$ の場合のみ扱う。

$x(\geq 0)$ が小さい場合の計算法としては、M. Goldstein & R. M. Thaler の方法²⁾がある。その方法は、 $0 \leq \nu < 1$ に対して、 $K_\nu(x)$ を

$$K_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m I_{\nu+2m}(x) \quad (3)$$

として計算するものである。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= -\frac{1}{2\nu} \left[\frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} - \left(\frac{2}{x}\right)^{2\nu} \Gamma^2(1+\nu) \right] \\ \delta_1 &= \Gamma^2(1+\nu) \left(\frac{2}{x}\right)^{2\nu} \frac{(\nu+2)}{(1-\nu)} \\ \delta_m &= \frac{(\nu+2m)(2\nu+m-1)(\nu+m-1)}{m(\nu+2m-2)(m-\nu)} \delta_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$(m=2, 3, \dots)$

である。 $I_{\nu+2m}(x)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) の値は、漸化式を用いる方法によって求められたものを使う。また、式(3)によって計算された $K_\nu(x)$ の値と漸化式を用いる方法によって計算された $I_\nu(x)$ および $I_{\nu+1}(x)$ の値を使えば、Wronskian 関係式

$$K_\nu(x)I_{\nu+1}(x) + K_{\nu+1}(x)I_\nu(x) = 1/x \quad (5)$$

より、 $K_{\nu+1}(x)$ の値が得られる。さらに、漸化式

$$K_{\nu+1}(x) = (2\nu/x)K_\nu(x) + K_{\nu-1}(x) \quad (6)$$

から、 $n \geq 2$ の $K_{\nu+n}(x)$ の値を計算することができ、 $\nu=0$ のときには、 δ_0 の計算は桁落ちをとまなうので、展開式

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -\left[A - \nu \left(\frac{S_2}{2} + A^2 - \frac{\pi^2}{12} \right) + \nu^2 \left(\frac{S_3}{3} + AS_2 + \frac{2A^3}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu^3 \left(\frac{S_4}{4} + \frac{2AS_3}{3} + \frac{S_2^2}{4} + A^2S_2 + \frac{A^4}{3} - \frac{7\pi^4}{720} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] \end{aligned} \quad (7)$$

を代りに用いる。ただし、 $A = \gamma + \ln(x/2)$ (γ : オイラーの定数)、 $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-n}$ である。以上が Goldstein & Thaler の方法である。

以後、計算における桁落ちについて考察を行うが、本論文では、 $a+b$ なる加算において、

$$\max(|a|, |b|) / |a+b| \geq 2 \quad (8)$$

であるとき、桁落ちが生ずるとのことにする。(これは、2進数で1桁以上の桁落ちが生じた場合に相当する。) 図1は、 $0 \leq \nu \leq 0.5$ 、 $0 \leq x \leq 0.5$ について、式(4)の δ_0 の計算における桁落ちの有無を実際に計算して求めたものである。この図からわかるように、桁落ちが有るところは、 ν が十分に小さいところだけではな

† Computation of Modified Bessel Functions $K_\nu(x)$ with Small Argument x by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

** 名古屋大学工学部情報工学

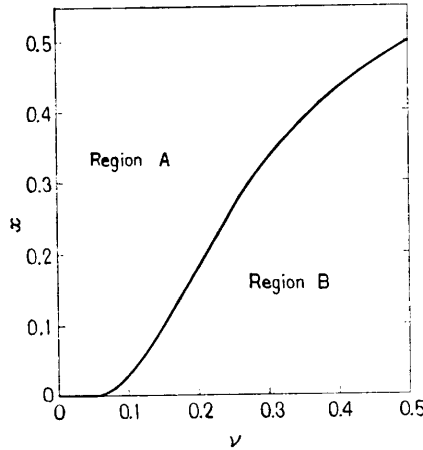


図 1 δ_0 の計算において、桁落ちを生ずる領域 A および桁落ちを生じない領域 B

Fig. 1 Region A where the cancellation occurs and region B where it does not occur.

く、例えば、 $x=0.5$ では、 $\nu=0.5$ でも桁落ちする。したがって、このようなところでは、式(7)により δ_0 を計算する必要があるが、 ν は十分には小さくないので、多くの展開項を計算しなければならない。また、 $\nu=1$ では、 δ_0 と δ_1 は反対符号をもち、絶対値が大きくなる。したがって、式(3)の計算において桁落ちが生じ、要求精度で $K_\nu(x)$ の値を求めることができない。これらのことが Goldstein & Thaler の方法の欠点である。以下に、 x が小さい場合に対して、Goldstein & Thaler の方法と比べ、桁落ちが無く、能率が良い方法を提案する。

2. 計 算 法

式(1)に $I_{-\nu}(x)$ および $I_\nu(x)$ の級数展開を代入し、適当に項をまとめて得られた計算式において、桁落ちする部分を所要の精度を有する近似式で計算することにより、 $K_\nu(x)$ の値を求めるといのが本計算法の骨子である。

本方法は、 $0 \leq \nu \leq 2.5$ では、Wronskian 関係式および漸化式による計算を経由せず、直接に $K_\nu(x)$ の値を計算する。 $\nu > 2.5$ では、 ν の小数部分を μ とするとき、 $\mu \leq 0.5$ ならば $K_{\mu+1}(x)$ と $K_{\mu+2}(x)$ を、 $\mu > 0.5$ ならば $K_\mu(x)$ と $K_{\mu+1}(x)$ を直接求め、漸化式(6)により $K_\nu(x)$ の値を計算する。

$x=0$ すなわち $K_\nu(x)=\infty$ のとき、および $K_\nu(x)$ の値がオーバー・フローしている値のときには、以下に述べる計算は無駄になるので行わないことにする。そのため、与えられた ν と x の値より、 $K_\nu(x)$ の値が

オーバー・フロー値かどうかを簡単に判定する必要がある。ここでは、 $K_\nu(x)$ の積分表示式³⁾ $K_\nu(x) = (\Gamma(\nu + 1/2) 2^\nu / (\sqrt{\pi} x^\nu)) \int_0^\infty (t^2 + 1)^{-\nu-1/2} \cos xt dt$ から得られる関係式

$$K_\nu(x) \leq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \tag{9}$$

を用いて、 $K_\nu(x)$ の値がオーバー・フロー値かどうかを近似的に評価する。 $\nu \leq 1$ のときには、 $K_\nu(x) \leq K_1(x) \leq 1/x$ であるので、入力 x の逆数 $1/x$ がオーバー・フロー値でない限り、 $K_\nu(x)$ の値はオーバー・フロー値にならない。 x が小さいとき、

$$K_\nu(x) \doteq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \tag{10}$$

であるので (例えば、 $K_{50}(1) = 3.4 \times 10^{77}$, $0.5 \cdot \Gamma(50) \cdot 2^{50} = 3.8 \times 10^{77}$ であり、上式はかなり良い近似である)、 $\nu > 1$ のときには、 x_M を浮動小数点として許される最大数とすれば、

$$\ln \Gamma(\nu) - \ln 2 - \nu \ln \frac{x}{2} > \ln x_M \tag{11}$$

のとき、 $K_\nu(x)$ の値はオーバー・フロー値であるとみなすことにする。

本論文で述べる方法では、次式で与えられる $I_{-\nu}(x)$ および $I_\nu(x)$ の級数展開⁴⁾ を利用する。

$$I_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1! \Gamma(2-\nu)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2! \Gamma(3-\nu)} + \dots \right\} \tag{12}$$

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1! \Gamma(2+\nu)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2! \Gamma(3+\nu)} + \dots \right\} \tag{13}$$

$I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)$ に上式を代入し、適当に項をまとめ、工夫を加えることにより、計算式を作成する。そのとき、区間 $[0, 0.5]$, $(0.5, 1.5]$ および $(1.5, 2.5]$ によって計算式が異なる。

以下で用いる $\phi_1(\nu, x)$ および $\phi_2(\nu, x)$ をつぎのように定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\nu, x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} - 1 \\ \phi_2(\nu, x) &= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

2.1 [0, 0.5] での計算法 ($\nu=0$ を中心とする展開)

ここで考える ν の範囲は, $0 \leq \nu \leq 0.5$ とする 式 (12), (13) および (14) から, 次式が得られる.

$$I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\} \quad (15)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} A_k(\nu, x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left\{ \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \right\} \\ B_k(\nu, x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left\{ \frac{1}{k!} \left(\frac{\phi_1(\nu, x)}{\Gamma(k+1-\nu)} + \frac{\phi_2(\nu, x)}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である. 式(15)は, $\nu=0$ を中心とする展開であると考えられる. さて, $\phi_1(\nu, x)$ と $\phi_2(\nu, x)$ は同符号であるので, 上式の $B_k(\nu, x)$ において, その加算では桁落ちは無い. しかし, 式(14)で定義されている $\phi_1(\nu, x)$ および $\phi_2(\nu, x)$ は, その右辺のとおり計算できるのは, $(x/2)^* < 1/2$, あるいは, $(x/2)^* > 2$ の場合だけである. $1/2 \leq (x/2)^* \leq 2$, すなわち, $-\ln 2 \leq \nu \ln(x/2) \leq \ln 2$ のときには桁落ちをする. 桁落ち無しに $\phi_1(\nu, x)$ および $\phi_2(\nu, x)$ を求めるには, 関数

$$f(t) = e^t - 1 = \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (17)$$

について, $[-\ln 2, \ln 2]$ において所要の相対精度を有する最良近似式があればよい. なぜならば, その最良近似式により,

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\nu, x) &= f\left(-\nu \ln \frac{x}{2}\right) \\ \phi_2(\nu, x) &= -f\left(\nu \ln \frac{x}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を計算すればよいからである. 表1および表2には, それぞれ, 単精度 (8D) および倍精度 (18D) 用として, つぎの形の最良近似式の係数が示されている.

$$f(t) \doteq \frac{2t \sum_{k=0}^M p_k t^{2k}}{\sum_{k=0}^N q_k t^{2k} - t \sum_{k=0}^M p_k t^{2k}} \quad (19)$$

式(16)の $A_k(\nu, x)$ においても, $\nu=0$ のとき, () 中の第1項と第2項の減算では桁落ちをするが, この場合にも, 関数 $(1/\Gamma(k+1-\nu) - 1/\Gamma(k+1+\nu))/k!$ について, 所要の精度をもつ最良近似式があれば, その関数値を桁落ち無しで求めることができる. ただし, 式(16)の $A_k(\nu, x)$ の { } の部分を $\tilde{A}_k(\nu)$ と表わしたとき, $\tilde{A}_k(\nu)$ に対して,

$$\tilde{A}_k(\nu) = \frac{1}{(k+\nu)(k-\nu)} \left[\frac{\nu}{k!} \left\{ \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} + \frac{1}{\Gamma(k+\nu)} \right\} + \tilde{A}_{k-1}(\nu) \right] \quad (k \geq 1) \quad (20)$$

なる関係が成り立つので, $k \geq 2$ の $\tilde{A}_k(\nu)$ は $\tilde{A}_{k-1}(\nu)$ を用いれば桁落ち無しに求められる. ($k=1$ の場合の $\tilde{A}_1(\nu)$, すなわち, $\tilde{A}_1(\nu)$ は, 式(20)からは求められない. なぜならば, この場合には, 式(20)の [] 中の第1項と第2項 $\tilde{A}_0(\nu) (\leq 0)$ の加算において桁落ちを生ずるからである.) したがって, $\tilde{A}_0(\nu)$ および $\tilde{A}_1(\nu)$ の $[0, 0.5]$ における最良近似式があればよい. 表3および表4には, それぞれ, 単精度および倍精度用として, つぎの形の最良近似多項式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_0(\nu) &\doteq \nu \sum_{k=0}^M p_k \nu^{2k} \\ \tilde{A}_1(\nu) &\doteq \nu \sum_{k=0}^N q_k \nu^{2k} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

の係数が示されている.

このようにして, $A_k(\nu, x)$ および $B_k(\nu, x)$ は桁落ち無しで求められる. いま考えている $0 \leq \nu \leq 0.5$ のときには, $A_0(\nu, x) \leq 0$, $A_k(\nu, x) \geq 0$ ($k=1, 2, \dots$) である. また, $x \leq 2$ のとき, $B_k(\nu, x) \geq 0$, $x > 2$ のとき, $B_k(\nu, x) < 0$ ($k=0, 1, 2, \dots$) である. したがって, 式(15)の加算において桁落ちの可能性はある. 実際に数値的に桁落ちの有無を調べた結果, 図2の領域Iで桁落ちが生じないことがわかった. 式(15)の和を構成している項は k が大きくなるにつれて十分に小さくなるので, 要求精度内に収束するまでに, 多くの項の和を取る必要は無い. 例えば, $x=0.5$ のとき, 式(15)の k は, 単精度では5まで, 倍精度では8~9まで取ると, その精度内に収束している. x が小さくなると, 必要とする項数は, これより少なくて済む.

このように計算された式(15)の値と式(1)より, $K_{\nu}(x)$ の値は, 図2の領域Iにおいて, $\nu=0$ を除いて, 所要の相対精度で計算することができる. その際,

$$g(\nu) = \frac{2}{\pi} \sin \nu \pi \quad (22)$$

なる関数の最良近似式を利用して計算すると能率が良い. 表5および表6には, それぞれ, 単精度および倍精度用として, $|\nu| \leq 0.5$ における最良近似多項式

$$g(\nu) \doteq \nu \sum_{k=0}^M p_k \nu^{2k} \quad (23)$$

の係数が示されている.

$\nu=0$ のときの $K_{\nu}(x)$ は, 式(1)の $\nu \rightarrow 0$ の極限として得られる次式

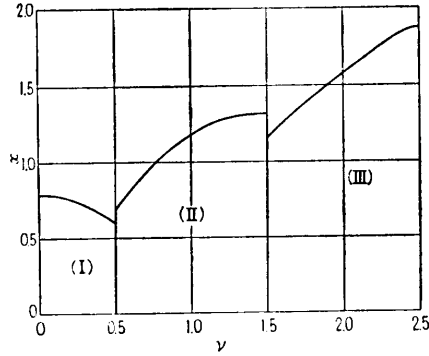


図 2 本方法において桁落ちが生じない領域 (I), (II) および (III)

Fig. 2 Region (I), (II) and (III) where the cancellation does not occur in this method.

$$K_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \left\{ -\left(\gamma + \ln \frac{x}{2}\right) + \Phi_k \right\} \quad (24)$$

により特別に計算することができる。ただし、 $\Phi_0=0$, $\Phi_k = \sum_{m=1}^k (1/m)$ ($k \geq 1$) である。なお、 $K_\nu(x)$ の積分表

示式³⁾ $K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh \nu t dt$ および $\cosh \nu t$ のべき級数展開を用いれば、 $\nu < 1$ のときには、

$$\frac{K_\nu(x) - K_0(x)}{K_0(x)} < \nu^2 \frac{K_1(x) - K_0(x)}{K_0(x)} \quad (25)$$

なる関係式が得られるので、要求する相対精度が ϵ であれば、

$$\nu < \epsilon^{1/2} \left\{ \frac{K_0(x)}{K_1(x) - K_0(x)} \right\}^{1/2} \quad (26)$$

のときには、その精度内で $K_\nu(x)$ と $K_0(x)$ は一致する。式(26)の { } の中を実際に計算することにより、

$$\left\{ \frac{K_0(x)}{K_1(x) - K_0(x)} \right\}^{1/2} > 1.723x \quad (27)$$

が成り立つことがわかる。したがって、

$$\nu < 1.723x\epsilon^{1/2} \quad (28)$$

のときには、 $K_\nu(x)$ の値は式(24)により計算することができ、前述の方法よりも能率的である。

2.2 (0.5, 1.5] での計算法 ($\nu=1$ を中心とする展開)

$\alpha = \nu - 1$ と置く。ここで考える ν の範囲は $0.5 < \nu \leq 1.5$ とする。したがって、 $-0.5 < \alpha \leq 0.5$ である。つぎの関係

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^{2-\nu} &= \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\alpha} = \frac{x}{2}(1 + \phi_1(\alpha, x)) \\ \left(\frac{x}{2}\right)^\nu &= \left(\frac{x}{2}\right)^{1+\alpha} = \frac{x}{2}(1 - \phi_2(\alpha, x)) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

が成り立つことより、式(12)および(13)は、

$$\left. \begin{aligned} I_{-\nu}(x) &= \frac{x}{2}(1 + \phi_1(\alpha, x)) \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}}{\Gamma(-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{3!\Gamma(3-\alpha)} + \dots \right\} \\ I_\nu(x) &= \frac{x}{2}(1 - \phi_2(\alpha, x)) \left\{ \frac{1}{(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(3+\alpha)\Gamma(3+\alpha)} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と書き直すことができる。上式より、 $\nu=1$ を中心とする展開

$$\begin{aligned} I_{-\nu}(x) - I_\nu(x) &= C_{-1}(\alpha, x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{C_k(\alpha, x) + D_k(\alpha, x)\} \quad (31) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_{-1}(\alpha, x) &= -\frac{\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^{-1-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \\ C_k(\alpha, x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \left\{ \frac{1}{k!(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k+1+\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)} \right\} \quad (k \geq 0) \\ D_k(\alpha, x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \left\{ \frac{1}{k!(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2(\alpha, x)}{(k+1+\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)} \right\} \quad (k \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

2.1 と同様な議論が成り立つ。 $D_k(\alpha, x)$ において、その加算では桁落ちは無い。式(32)の $C_k(\alpha, x)$ の { } の部分を $\tilde{C}_k(\alpha)$ と表わしたとき、 $\tilde{C}_k(\alpha)$ に対して、

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k(\alpha) &= \frac{1}{(k+1+\alpha)(k-\alpha)} \left[\frac{\alpha}{k!} \frac{1}{(k+1)\Gamma(k-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha)} \right] + \tilde{C}_{k-1}(\alpha) \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (33)$$

なる関係式が成立する。これにより、 $-0.5 < \alpha < 0$ のときには、 $k \geq 1$ の $\tilde{C}_k(\alpha)$ は $\tilde{C}_{k-1}(\alpha)$ を用いれば、 $0 < \alpha \leq 0.5$ のときには、 $k \geq 2$ の $\tilde{C}_k(\alpha)$ は $\tilde{C}_{k-1}(\alpha)$ を用いれば、桁落ち無しに求められる。表7および表8には、それぞれ、単精度および倍精度用として、[-

0.5, 0] における $\tilde{C}_0(\alpha)$ の最良近似多項式

$$\tilde{C}_0(\alpha) \doteq \alpha \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \quad (34)$$

の係数が示されている。また、表 9 および表 10 には、それぞれ、単精度および倍精度用として、[0, 0.5] における $\tilde{C}_0(\alpha)$ および $\tilde{C}_1(\alpha)$ の最良近似多項式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}_0(\alpha) &\doteq \alpha \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \\ \tilde{C}_1(\alpha) &\doteq \alpha \sum_{k=0}^N q_k \alpha^k \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

の係数が示されている。

式(31)の加算では、図 2 の領域 II で桁落ちが生じないことがわかった。したがって、 $K_\nu(x)$ の値は、図 2 の領域 II において、 $\nu=1(\alpha=1)$ を除いて、式(1)と(31)から計算できる。式(31)の k は、 $x=0.5$ のときには、単精度では 4 まで、倍精度では 8 まで取れば、その精度内に収束している。

$\alpha=0(\nu=1)$ の場合には、式(1)の $\nu \rightarrow 1$ の極限として得られる次式により計算することができる。

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \left\{ \gamma + \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\Phi_k + \Phi_{k+1}) \right\} \quad (36)$$

2.3 (1.5, 2.5] での計算法 ($\nu=2$ を中心とする展開)

$\alpha = \nu - 2$ と置く。ここで考える ν の範囲は $1.5 < \nu \leq 2.5$, すなわち、 $-0.5 < \alpha \leq 0.5$ とする。2.2 と同様にして、 $\nu=2$ を中心とする展開

$$I_{-\nu}(x) - I_\nu(x) = E_{-2}(\alpha, x) + E_{-1}(\alpha, x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{ E_k(\alpha, x) + F_k(\alpha, x) \} \quad (37)$$

が得られる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} E_{-2}(\alpha, x) &= \frac{\alpha(\alpha+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ E_{-1}(\alpha, x) &= -\frac{\alpha\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ E_k(\alpha, x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} \left\{ \frac{1}{k!(k+2)(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} - \frac{1}{(k+2+\alpha)(k+1+\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$F_k(\alpha, x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} \left\{ \frac{1}{k!(k+2)(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{\phi_2(\alpha, x)}{(k+2+\alpha)(k+1+\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)} \right\} \quad (k \geq 0)$$

式(38)の $E_k(\alpha, x)$ の $\{ \}$ の部分を $\tilde{E}_k(\alpha)$ と表わしたとき、 $\tilde{E}_k(\alpha)$ に対して、

$$\tilde{E}_k(\alpha) = \frac{1}{(k+2+\alpha)(k-\alpha)} \left[\frac{\alpha}{k!} \left\{ \frac{1}{(k+2)(k+1)\Gamma(k-\alpha)} + \frac{1}{(k+1+\alpha)(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha)} \right\} + \tilde{E}_{k-1}(\alpha) \right] \quad (k \geq 1) \quad (39)$$

なる関係式が成立する。これにより、 $-0.5 < \alpha < 0$ のときには、 $k \geq 1$ の $\tilde{E}_k(\alpha)$ は $\tilde{E}_{k-1}(\alpha)$ を用いれば、 $0 < \alpha \leq 0.5$ のときには、 $k \geq 2$ の $\tilde{E}_k(\alpha)$ は $\tilde{E}_{k-1}(\alpha)$ を用いれば、桁落ち無しで求められる。表 11 および表 12 には、それぞれ、単精度および倍精度用として、[-0.5, 0] における $\tilde{E}_0(\alpha)$ の最良近似多項式

$$\tilde{E}_0(\alpha) \doteq \alpha \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \quad (40)$$

の係数が示されている。また、表 13 および表 14 には、それぞれ、単精度および倍精度用として、[0, 0.5] における $\tilde{E}_0(\alpha)$ および $\tilde{E}_1(\alpha)$ の最良近似多項式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_0(\alpha) &\doteq \alpha(\alpha_0 - \alpha) \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \\ \tilde{E}_1(\alpha) &\doteq \alpha \sum_{k=0}^N q_k \alpha^k \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

の係数が示されている。ただし、

$$\alpha_0 = 0.40199647363211402348$$

である。

式(37)の加算では、図 2 の領域 III で桁落ちが生じないことがわかった。したがって、 $K_\nu(x)$ の値は、図 2 の領域 III において、 $\nu=2(\alpha=0)$ を除いて、式(1)と(37)から計算できる。式(37)の k は、 $x=0.5$ のときには、単精度では 3~4 まで、倍精度では 7 まで取れば、その精度内に収束している。

$\alpha=0(\nu=2)$ の場合には、式(1)の $\nu \rightarrow 2$ の極限として得られる次式により計算することができる。

$$K_2(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}}{k!(k+2)!} \cdot \left\{ -\left(\gamma + \ln \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(\Phi_k + \Phi_{k+2}) \right\} \quad (42)$$

表 1 式(19)の p_k および q_k

Table 1 p_k and q_k in Eq. (19).

k	p_k	k	q_k
0	0.8432691503E+03	0	0.1686538301E+04
1	0.2005436580E+02	1	0.1806535880E+03

表 2 式(19)の p_k および q_k

Table 2 p_k and q_k in Eq. (19).

k	p_k
0	0.15462037735227156105D+06
1	0.49551922829320590030D+04
2	0.27015176165734808206D+02
3	0.17839106920989440594D-01

k	q_k
0	0.30924075470454312210D+06
1	0.35680447457909378169D+05
2	0.45039468461939214765D+03

表 3 式(21)の p_k および q_k

Table 3 p_k and q_k in Eq. (21).

k	p_k	k	q_k
0	-0.1154431330E+01	0	0.8455686702E+00
1	0.8400525521E-01	1	-0.3821822049E+00
2	0.8439594495E-01	2	0.3529055707E-01
3	-0.1444323059E-01	3	0.1607910260E-02
4	0.4550852407E-03	4	-0.2878296182E-03

表 4 式(21)の p_k および q_k

Table 4 p_k and q_k in Eq. (21).

k	p_k
0	-0.11544313298030657223D+01
1	0.84005270068191034813D-01
2	0.84395469111041398486D-01
3	-0.14437886491815378875D-01
4	0.43048332451156679331D-03
5	0.40269911828705036634D-04
6	-0.22670104358292808944D-05
7	-0.98776238426034151385D-08

k	q_k
0	0.84556867019693427887D+00
1	-0.38218220277538305603D+00
2	0.35290489100292279828D-01
3	0.16086595510927956739D-02
4	-0.29119228247004372365D-03
5	0.51779746556162874889D-05
6	0.41102145024842494602D-06
7	-0.12731477461044025109D-07

表 5 式(23)の p_k

Table 5 p_k in Eq. (23).

k	p_k
0	0.1999999989E+01
1	-0.3289866163E+01
2	0.1623424809E+01
3	-0.3808527658E+00
4	0.4937647484E-01

表 6 式(23)の p_k

Table 6 p_k in Eq. (23).

k	p_k
0	0.19999999999999999995D+01
1	-0.32898661336964525543D+01
2	0.16234848505666744990D+01
3	-0.38150364824286092286D+00
4	0.52295695609058372680D-01
5	-0.46921617736413729806D-02
6	0.29685560172140792101D-03
7	-0.13944000911328458960D-04
8	0.48986154824370938211D-06

表 7 式(34)の p_k

Table 7 p_k in Eq. (34).

k	p_k
0	-0.3068626593E+00
1	-0.2278433046E+00
2	0.1575111305E+00
3	0.6717767874E-01
4	-0.1456145096E-01
5	-0.5812767492E-02
6	-0.5907183639E-03

表 8 式(34)の p_k

Table 8 p_k in Eq. (34).

k	p_k
0	-0.30886265960613144229D+00
1	-0.22784335098467130270D+00
2	0.15750976926216010113D+00
3	0.67162664251502039160D-01
4	-0.14639370281486078753D-01
5	-0.60117483957686228914D-02
6	-0.80572886065808856963D-03
7	0.28061990966065021388D-05
8	0.13371365754213095809D-03
9	0.23872702623782677178D-04
10	-0.20649523679278956354D-05
11	-0.70459172571796191497D-06
12	-0.12051207634874220492D-06

表 9 式(35)の p_k および q_k
Table 9 p_k and q_k in Eq.(35).

k	p_k	k	q_k
0	-0.1544313300 E +00	0	0.6727843320 E +00
1	-0.4227842919 E +00	1	-0.2306956157 E +00
2	-0.1490901201 E +00	2	-0.1340282193 E +00
3	0.1911144397 E +00	3	0.1934523539 E -01
4	0.5968628835 E -01	4	0.1406674368 E -02
5	-0.1709624380 E -01	5	0.4524841803 E -02
6	-0.7412674342 E -02		

表 10 式(35)の p_k および q_k
Table 10 p_k および q_k in Eq. (35).

k	p_k
0	-0.15443132980306572122D +00
1	-0.42278433509846713480D +00
2	-0.14908846635359689302D +00
3	0.19109110138772440374D +00
4	0.59842979104789786306D -01
5	-0.17645244535566180982D -01
6	-0.64146136227668343416D -02
7	-0.80432871576764548658D -03
8	0.69640444071346389964D -04
9	0.14561300979394098846D -03
10	0.22685847614836062845D -04
11	-0.25336850882634711919D -05
12	-0.97272716138131533477D -06
13	-0.19561795521276792047D -06

k	q_k
0	0.67278433509846713931D +00
1	-0.23069608377461672966D +00
2	-0.13401649360583584227D +00
3	0.19235471456252289185D -01
4	0.18893863149725342687D -02
5	0.34666180547121929299D -02
6	0.10768383803936669489D -02
7	-0.33733329875135593337D -03
8	-0.67151753765360559970D -04
9	-0.27915439928489078634D -05
10	-0.45107150981111861370D -06
11	0.91484986288945542448D -06
12	0.74614712938299685293D -07

表 11 式(40)の p_k
Table 11 p_k in Eq.(40).

k	p_k
0	0.1727843356 E +00
1	-0.4420881392 E +00
2	-0.1746569918 E -01
3	0.1148313954 E +00
4	0.1446840960 E -01
5	-0.4434412425 E -02
6	-0.1569218741 E -02

表 12 式(40)の p_k
Table 12 p_k in Eq.(40).

k	p_k
0	0.17278433509846713940D +00
1	-0.44208825132385035279D +00
2	-0.17469625394936187789D -01
3	0.11478102214985063849D +00
4	0.14165631323854662193D -01
5	-0.53560042920579267192D -02
6	-0.29347974060823458163D -02
7	-0.73950151722901213587D -03
8	0.11328407746503210333D -03
9	0.69975310388564406881D -04
10	0.84094482743235858642D -05
11	-0.42549591382928066333D -06
12	-0.51661111710740746536D -06
13	-0.94390704791859156133D -07

表 13 式(41)の p_k および q_k
Table 13 p_k and q_k in Eq.(41).

k	p_k	k	q_k
0	0.4298155469 E +00	0	0.2798170017 E +00
1	-0.3052902738 E -01	1	-0.1466831542 E +00
2	-0.1194102804 E +00	2	-0.8724522397 E -02
3	-0.1141321913 E -01	3	-0.1316672580 E -02
4	0.6298579753 E -02	4	-0.2384444655 E -03
5	0.3940920239 E -02	5	0.2178897456 E -02

表 14 式(41)の p_k および q_k
Table 14 p_k and q_k in Eq.(41).

k	p_k
0	0.42981554921944477657D +00
1	-0.30529377517965230342D -01
2	-0.11940155215597570939D +00
3	-0.11493956562163219922D -01
4	0.66460154130415099486D -02
5	0.32090110790301792830D -02
6	0.68212887548381422097D -03
7	-0.14271712391126333484D -03
8	-0.73237008339282581996D -04
9	-0.80890011072206387422D -05
10	0.65653037227452027230D -06
11	0.6326008221835244652D -06
12	0.92872250224795643391 D -07

k	q_k
0	0.27981700058837792838D +00
1	-0.14668300950441673177D +00
2	-0.87274800572376808150D -02
3	-0.12951884616054425136D -02
4	-0.30250229580839645619D -03
5	0.22366647777872127156D -02
6	0.59128719113983243200D -04
7	-0.87470830430708638354D -04
8	-0.13270883492795490881D -04
9	-0.46149395595010830818D -05
10	0.42386465458798862015D -06
11	0.26663196358923629450D -06
12	0.14451976836712570748D -07

3. むすび

以上において、 x が小さい場合の $K_\nu(x)$ の計算法について述べた。本方法では、式(1)に $I_\nu(x)$ および $I_\nu(x)$ の級数展開を代入して、適当に項をまとめて得られた計算式において、桁落ちする部分を所要の精度を有する最良近似式で計算することにより、丸め程度の誤差でもって $K_\nu(x)$ の値を求めている。この方法は、現在のところ、 x が小さい場合の $K_\nu(x)$ の計算法として、精度および能率の点で最もすぐれていると考えられる。本論文で触れなかった x が小さくない場合の $K_\nu(x)$ の能率的な計算法については、追って報告する予定である。

なお、本論文で示した相対誤差規準に関する最良近似式の係数は、Remes の算法⁵⁾により、名古屋大学大型計算センター FACOM M-200 の4倍精度演算を用いて新たに計算したものである。

おわりに、日頃ご討論頂く本学鳥居達生助教授に感

謝します。

参考文献

- 1) Watson, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, p. 78, Cambridge University Press (1966).
- 2) Goldstein, M. and Thaler, R. M.: Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions, MTAC, 13, pp. 102-108 (1959).
- 3) National Bureau of Standards: Handbook of Mathematical functions, Appl. Math. ser. 55, p. 376, U. S. Government Printing Office, Washington D. C. (1964).
- 4) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 Ⅲ, 岩波全書, p. 170 (1968).
- 5) Ralston, A. and Rabinowitz, P.: A First Course in Numerical Analysis, 2 ed., p. 315, McGraw-Hill Kogakusha (1978).

(昭和55年1月25日受付)

(昭和55年3月21日採録)

訂 正

Vol. 21 No. 3, pp. 238~245 掲載の吉田他の論文「 α が小さい場合の変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算」
 表 1, 表 2 および表 14 の q_k を次のように訂正します.

表 1

k	q_k
0	0.1686538301E+04
1	0.1806535880E+03
2	0.1000000000E+01

表 2

k	q_k
0	0.30924075470454312210D+06
1	0.35680447437909378169D+03
2	0.45039468461939214765D+03
3	0.10000000000000000000D+01

表 11

k	q_k
0	0.27084700053897792837D+00
1	-0.11788010950441671498D+00
2	-0.87274806372381745960D-02
3	-0.12971784015215161194D-02
4	-0.30250220636550835521D-03
5	0.22363048028629021907D-02
6	0.59128683574206475617D-04
7	-0.87490410412585567694D-04
8	-0.1327141847136671965D-04
9	-0.46020102168413289148D-05
10	0.42301808975005405286D-06
11	0.2801273578347447823D-06
12	0.172700037285306714D-07