

2次三角形要素による有限要素解析結果の表示

——面積座標による——†

山下英生^{††} 中田健二^{††} 中前栄八郎^{††}

有限要素解析法は、多くの分野で場の解析手段として広く用いられている。その解析による出力データは、一般に膨大な量となるため、解析者が容易に認識し、検討できるよう自動的にそれを表示することは重要な問題である。

本論文では、2次元平面解析場を三角形要素に分割し、要素内を2次試験関数で近似した場合の等ポテンシャル線図の能率よい表示方法を提案する。その主な特徴は、次の通りである。1) 解析に使用した2次試験関数を用いて、三角形要素内の等ポテンシャル線を求めている。したがって、その表示結果が正確である。2) 等ポテンシャル線の計算に面積座標を導入している。この結果、描こうとするポテンシャル線が要素内に存在するかどうかの判定が容易になる。3) 等ポテンシャル線上に発生させる点列の点間隔を三角形要素の大きさに関係なく、できるだけ等間隔になるよう制御している。4) 点間隔は入力データにより指定できる。この結果、不必要に密な点列の発生を防ぐことができ、能率のよい、しかも十分滑らかな表示結果が得られる。

本論文では、等ポテンシャル線作図アルゴリズムを説明し、磁界解析例に適用した結果を示し、本手法が有限要素解析結果の表示に有効なことを示している。

1. ま え が き

周知のように、有限要素法は、各分野の場の解析手段として広く使用されており、その2次元平面場の解析結果の一表示法としては、等高線表示法がよく用いられる。解析領域をメッシュ（一般には三角形要素）に分割し、その要素内を1次試験関数で近似した場合、要素内の等高線は直線で表わされる¹⁾。有限要素解析結果の精度を一層上げる方法の一つは、要素内を高次の試験関数で近似することであるが、計算機の記憶容量と処理時間および得られる解の精度の関係から、その経済的な次数は、2次または3次と考えられる²⁾。

本論文では、3つの頂点からなる1次節点と3辺の中点からなる2次節点の6節点による2次試験関数を用いた場合の、解析結果の表示方法について述べる。

この場合の最も簡単な表示方法は、三角形要素の各2次節点間を直線で結ぶことにより得られる4つの三角形について、その各三角形内を1次近似と仮定し、文献1)の手法を適用することである。この方法では、折角の2次近似の結果を滑らかに表示できない。滑らかな曲線で表示する方法には、A) 1本ずつの等

高線に着目し、それが三角形要素の辺と交わる点を解析領域全体に亘って求め、その点列を滑らかな曲線（たとえばスプライン曲線）で補間する方法、B) 個々の三角形要素について、解析に使用した2次試験関数による曲線を用いる方法が考えられる。

ここでは、解析結果を忠実に表現することを目的として、B)による能率の良い一方法を提案する。その主な特徴は、(1)三角形要素内の等高線は、解析に使用した2次試験関数を用いて求められるから、表示結果が正確である。(2)等高線の計算に面積座標を用いることにより、描こうとする等高線の要素内の存否の判定が容易である。(3)等高線上に発生させる点列の間隔をなるべく等しくなるよう制御している。(4)点間隔は入力データにより指定できる。などである。

以下、本手法の概要、できるだけ等間隔な点列を発生する方法とそのアルゴリズムおよび適用例を述べ、本手法の有用性を示す。

なお、本論文は磁界解析結果の表示を対象にしたものであり、本文中において“等ポテンシャル線”の言葉を使用しているが、これは“等高線”と同意語である。また、本手法は、もちろん軸対称3次元場の2次試験関数による有限要素解析結果の表示にも適用できる。

2. 等ポテンシャル線表示法の概要

2.1 考 え 方

† Expression of Results of Finite Element Analysis Using Second Order Triangular Elements —by Using Area Coordinates— by HIDEO YAMASHITA, KENJI NAKATA and EIYACHIRO NAKAMAE (Faculty of Engineering, Hiroshima University).

†† 広島大学工学部第2類（電気系）

2次元平面場および軸対称3次元場の有限要素解析において、三角形要素内を2次試験関数により近似する場合、一般に、三角形要素内の任意の点のポテンシャル値は、図1に示す6節点のポテンシャル値 $\phi_i (i=1\sim 6)$ を用いた2次式により近似される。この式から求まる等しいポテンシャル値 ϕ_0 の点列を直線で結ぶことにより、近似度のよい等ポテンシャル線を能率よく表示する方法について述べる。

三角形要素内の任意の点0のポテンシャル値 ϕ 、面積座標変数 $\zeta_i (i=1\sim 3)$ 、および三角形要素の面積 Δ の間には、(1)~(3)式の関係がある²⁾。

$$\phi = \beta_1 \zeta_1^2 + \beta_2 \zeta_2^2 + \beta_3 \zeta_3^2 + \beta_4 \zeta_2 \zeta_3 + \beta_5 \zeta_3 \zeta_1 + \beta_6 \zeta_1 \zeta_2 \quad (1)$$

ここで、 $\beta_1 = \phi_1, \beta_2 = \phi_2, \beta_3 = \phi_3$

$$\beta_4 = -\phi_2 - \phi_3 + 4\phi_4$$

$$\beta_5 = -\phi_3 - \phi_1 + 4\phi_5$$

$$\beta_6 = -\phi_1 - \phi_2 + 4\phi_6$$

また、 $1 = A_1/\Delta + A_2/\Delta + A_3/\Delta$

$$= \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \quad (2)$$

なお、 $0 \leq \zeta_i \leq 1$ (3)

ここで、 $A_i (i=1\sim 3)$ は、三角形要素を要素内の任意の1点0で3個の三角形に分割したときの各三角形の面積である(図1参照)。(2)式より、 $\zeta_i (i=1\sim 3)$ のうち独立なものは2つであるから、あるポテンシャル値 ϕ_0 の値をもつ等ポテンシャル線を得るには、 ϕ_0 と ζ_i のうちのいずれか1つ(たとえば $i=1$)を与え、(1)、(2)式より $\zeta_i (i=2$ または $3)$ に関する2次方程式を立て、これを解くことにより(3)式を満たす面積座標値を求め^{*}、ある ζ_i (たとえば $i=1$)に種々の値を与え、 ϕ_0 の値の点列を三角形要素の辺上およびその内部に発生させればよい^{**}。その点列を順次直線

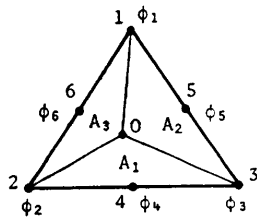


図1 三角形要素
Fig. 1 Triangular element.

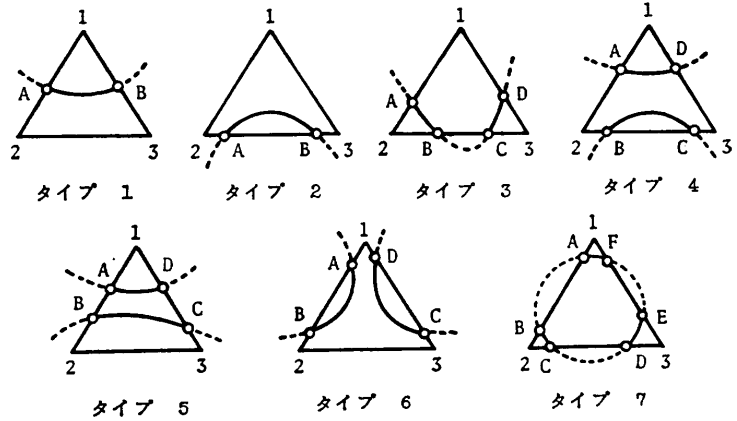


図2 等ポテンシャル線の現われ方

Fig. 2 Appearance of equi-vector potential lines.

で結べば、三角形要素内の ϕ_0 の等ポテンシャル線が求まる。以上の処理をすべての三角形要素に施すことにより、全解析領域内の ϕ_0 の等ポテンシャル線を表示することができる。

2.2 三角形要素内の等ポテンシャル線の分類

三角形要素を2次試験関数で近似した場合、三角形要素内の ϕ_0 の等ポテンシャル線の現われ方は、以下の3つの条件下で図2の7通りに分類できる。1)ある三角形要素内の ϕ_0 の等ポテンシャル線がそのいずれの辺とも接しない閉曲線となる場合は考慮しない(図3(a)参照)。適切な三角形要素に分割された解析解に対しては、このようなケースは稀であり、これを無視しても解の表示精度に大きな影響はない。2) ϕ_0 の等ポテンシャル線が三角形要素の辺に接する場合は、その接点を2点とみなす(図3(b)参照)。3) ϕ_0 の等ポテンシャル線が三角形要素の頂点を通る場合については、①等ポテンシャル線が要素内を通らない場合(図3(c)参照)は辺との交点数を0、②等ポテンシャル線が要素内を通過する場合(図3(d)参照)

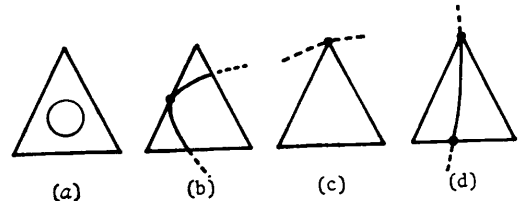


図3 等ポテンシャル線の特異なケース

Fig. 3 Peculiar cases of equi-vector potential lines.

* xy 座標系を用いて表現したい場合は、文献2)の変換を用いればよい。

** 2次方程式の解として点が求まるので、最大2種類の点列が求まる。

表 1 等ポテンシャル線の分類

Table 1 Classification of equi-vector potential line.

ケース	a	b	タイプ番号
(i)	0	2	1
(ii)	1	0	2
(iii)	1	2	3, 4
(iv)	2	0	5, 6
(v)	3	0	7

は辺との交点数を 2 と計数する。

本手法では、各三角形要素内の ϕ_0 の等ポテンシャル線のタイプ (図 2) を判別し、そのタイプに応じた処理を行う。どのタイプに属するかは、以下の 2 つの処理によって決定することができる。

【処理 1】 三角形要素の辺上の ϕ_0 の点 (図 2 の \circ 印) を求める。すなわち、 $i=1\sim 3$ のそれぞれについて、 $\zeta_i=0$ と $\phi=\phi_0$ を (1), (2) 式に代入し、2 次方程式を作成し、(3) 式を満たす根を求める。根が重根のときは図 3 (b) の場合であり、また上述の 2 つの i に対する根が等しい時は図 3 (c) あるいは (d) の場合である。図 3 (c) と (d) の判別方法は Appendix 1 に示す。なお、等ポテンシャル線が頂点において接する場合は、頂点を通過する場合の処理を行う。

【処理 2】 【処理 1】 で求めた各辺上の点の数により、 ϕ_0 の等ポテンシャル線のタイプ (図 2) の判別を

行う。すなわち、【処理 1】 で求めた点が 2 点存在する辺の数を a 、1 点の辺の数を b とすると、三角形要素の 3 辺上の点の数の和 $(2a+b)$ は常に偶数で、かつ最大 6 であるから、 a, b の関係から表 1 の 5 ケースに分類できる。なお、図 2 の各タイプも表に示すように分類できる。また、三角形要素の頂点番号は、各辺とその辺上の交点の数との相対的な位置関係から、図 2 の各タイプに示すように反時計方向に 1, 2, 3 とラベル付けを行い、交点のラベルも頂点 1 を基点として、反時計方向にアルファベット順にラベル付けするものとする。表 1 のケース番号 (iii) と (iv) は、それぞれ 2 個のタイプから成っているから、以下に述べる方法によりこのタイプの判別を行う必要がある。

(1), (2) 式に示すように、等ポテンシャル線は三角形要素内において一般 2 次曲線で表わされる。したがって、2 次曲線の性質からタイプの判別を次のようにして行う。まず、ケース (iii) の場合について述べる。2 次曲線が楕円または放物線の場合、図 4 (a) から明らかのように必ずタイプ 3 となる。また双曲線の場合は、同図 (b) ~ (d) のいずれかになり、(b), (c) がタイプ 3, (d) がタイプ 4 となる (2 次曲線の分類は Appendix 2 参照)。双曲線のこの 3 種の判別は、以下に述べるアルゴリズム SUB A により判定するこ

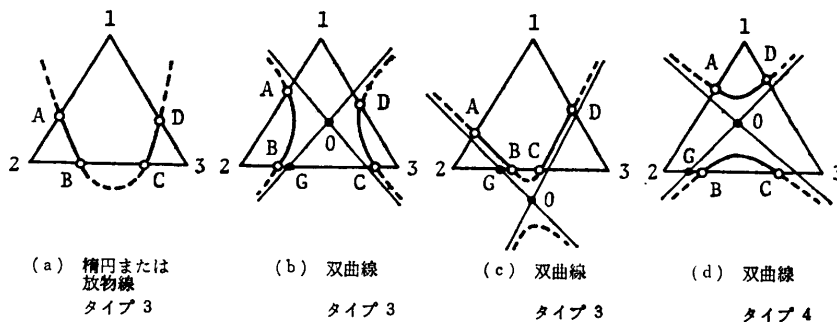


図 4 ケース (iii) のタイプの分類

Fig. 4 Classification into types in case (iii).

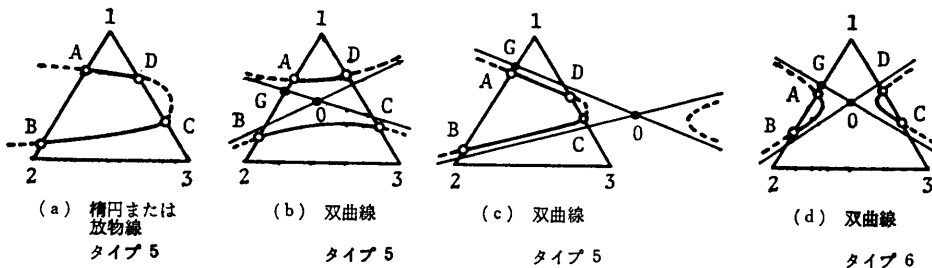


図 5 ケース (iv) のタイプの分類

Fig. 5 Classification into types in case (iv).

とができる。その骨子は次の2点である。(1)いずれか一方の漸近線と三角形要素の辺 $\overline{23}$ の交点と、点BおよびCの相対的な位置(順序)関係。(2)いずれか一方の漸近線が、2点A, Bの間を通るかどうかの判定。

なお、ケース(iv)の場合も、**図5**から明らかなようにケース(iii)と同じ考え方により各タイプに判別される。次にアルゴリズムSUB Aを示す。なお、ケース(iv)の場合は()記号で示す処理をすればよい。

SUB A: (双曲線の場合のタイプの分類)

step 1: 双曲線の漸近線のどちらか一方を la とし、 la と辺 $\overline{23}$ (辺 $\overline{12}$)またはその延長線との交点Gを求め、次のstepへ。

step 2: 点Gが、点B, C(点A, B)の間に存在すればタイプ3(タイプ5)であり、 $ka \leftarrow 0$ としSUB Aの操作を終了。さもなければ次のstepへ。

step 3: 直線 la が2点A, B(2点A, D)の間を通るならばタイプ4(タイプ6)であり、 $ka \leftarrow 1$ としてSUB Aの操作を終了。さもなければ、タイプ3(タイプ5)であり、 $ka \leftarrow 0$ としてSUB Aの操作を終了。

3. 点列発生法

ϕ_0 の連続した1本の等ポテンシャル線を描く場合、ある三角形要素の辺上の端点 T_1, T_2 は異なる辺上にあるか、同一辺上にあるかのいずれかである。ここでは、前記の各ケースに適用できる T_1, T_2 間の ϕ_0 上の点列の発生方法と、三角形要素の大きさに関係なく、すべての点列の点間隔ができるだけ等距離になるための点の発生個数の決定方法について述べる。

3.1 T_1, T_2 が異なる辺上にある場合

図6に示すように点 T_1, T_2 の存在する辺の共有頂点を1とし、反時計方向に1~3の頂点番号を付すものとする。点 T_1, T_2 を通る等ポテンシャル線上の任意の点Cの面積座標 ζ_2 と ζ_3 の間には、次式の関係がある。

$$\zeta_3 = Q\zeta_2 \quad (4)$$

ただし、 Q は任意の正の数。したがって、 Q に任意の正の数を与え、(2)、(4)式を(1)式に代入すると、 ζ_2 の2次方程式ができる。この方程式から(3)式を満足する根を求めると ϕ_0 の等ポテンシャル線上の点 ϕ_0 が求まる。したがって、等ポテンシャル線上に n 個の点を求めるには、 n 個の Q の値 Q_1, \dots, Q_n に対して上述の処理を行えばよい。この場合、 n 個の点の間隔は

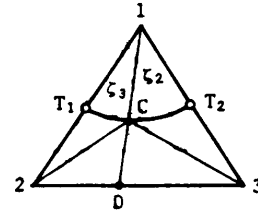


図6 等ポテンシャル線上の点の発生 (T_1, T_2 が異なる辺上にある場合)

Fig. 6 Generation of points on an equi-potential line (in the case that T_1 and T_2 exist on different edges each other).

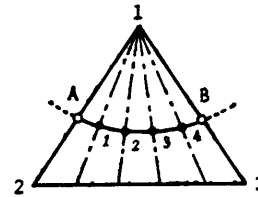


図7 点列発生例

Fig. 7 An example of generation of points.

等しいことが望ましい。いま、三角形要素は適切に分割されており、したがって、等ポテンシャル線は1つの要素内で急カーブを描かないものとする、かたよりに点列を発生するための簡単な Q の値の与え方は以下の方法により実現される。

図6の頂点1と点Cを通る直線が辺 $\overline{23}$ と交差する点をDとし、その面積座標を $(0, \zeta_2', \zeta_3')$ とすると、

$$Q = \zeta_3 / \zeta_2 = \zeta_3' / \zeta_2' \quad (5)$$

上式は、 ζ_2 と ζ_3 の関係を与える代わりに、 ζ_2' と ζ_3' の関係を与えればよいことを示し、辺 $\overline{23}$ を $(n+1)$ 等分することによりほぼ等間隔の n 個の点を等ポテンシャル線上に発生し得ることを意味する。すなわち、次式で与えられる n 個の Q_i を与えればよい。

$$Q_i = l / (n+1-l) \quad (l=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$n=4$ の例を**図7**に示す。

n の決定は以下の方法による。理想的には T_1, T_2 間の等ポテンシャル線の長さに比例して n を決めるのが良いが、ここでは、簡易化のため点 T_1, T_2 間の直線距離 $D_{12}(T_1, T_2)$ に対して n を次式により決定する。

$$n = \text{trunc}(D_{12}(T_1, T_2) / D_s + 1) \quad (7)$$

ここでtruncは整数化を示し、 D_s は発生される点列の各点間の基準距離であり、入力データとして与える。

3.2 T_1, T_2 が同一辺上にある場合

図8に示すように点 T_1, T_2 が存在する辺の両頂点

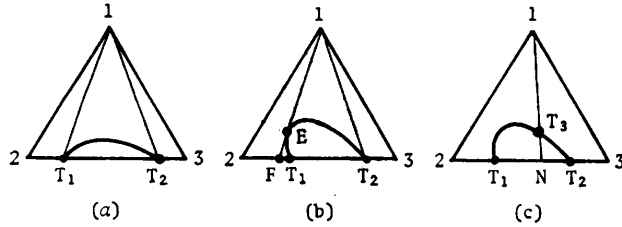


図8 等ポテンシャル線上の点の発生 (T_1, T_2 が同一辺上にある場合)

Fig. 8 Generation of points on an equi-vector potential line (in the case that T_1 and T_2 exist on the same edge).

を2,3とし反時計方向に1~3の頂点番号を付す。この場合も3.1とほぼ同様の手法を適用できる。すなわち、図8(a)から判るように3.1の辺23を $(n+1)$ 等分する代りに T_1T_2 間を $(n+1)$ 等分する方法が考えられる。しかし、同図(b)の例では、 T_1T_2 間のみの等分割では、ポテンシャル線を正確に追跡することはできない。そこで同図(b)に示すように頂点1からポテンシャル線への接線を探し、その接点をE、接線の辺23との交点をFとし、 FT_2 間を $(n+1)$ 等分する方法が考えられるが、この方法にも以下の欠点がある。すなわち、(1) FT_1 間においては(3)式を満足する根が2根求まり、その根の判別と順序付けのためのアルゴリズムが複雑となる。(2)ポテンシャル線上の接点Eの前後に発生する点列の点間隔が大きくなる。

上述のことから本手法においては次の手法を用いている。図8(c)に示すように点 T_1, T_2 の中点をNとすれば線分 NT_1 上にポテンシャル値 ϕ_0 の点 T_3 が必ず1点求まる。三角形 NT_1T_2 および三角形 NT_1T_3 を考えると、ポテンシャル値 ϕ_0 のそれぞれの端点 T_2, T_3 および T_3, T_1 は図6の場合と同一条件となる。したがって、3.1の手法をそのまま適用することができる。

4. 等ポテンシャル線作画アルゴリズム

任意の三角形要素内の ϕ_0 の等ポテンシャル線のタイプ(図2参照)の判別を行い、等ポテンシャル線上の $(n+2)$ 個の点列(要素辺上の点を含む)を求めるアルゴリズムを示す。まず記号の説明を与える。

t_i および T_i : 等ポテンシャル線が三角形要素の辺と交わる点 (i は最大4). S_i : 等ポテンシャル線上に求められる点の面積座標値の集合 ($i=1, 2$). p_l および p'_l : それぞれ S_1 および S_2 の l 番目の点の面積座標値. $\alpha_i (i=1, 2)$: (1), (2), (4) 式から構成される面積座標変数に関する2次方程式の根. $\gamma_i (i=$

1, 2): α_i の面積座標値. I, J, K: 三角形要素の頂点番号.

アルゴリズムは MAIN と手続き SUB 1, SUB 2 および 2.2 で述べた SUB A から成る. 手続の処理終了後は、その手続きを引用した MAIN または手続きの次の step へ帰るものとする.

MAIN: (表1のケースおよびタイプの分類)

step 1: 1次および2次節のポテンシャル値から(1)式の $\beta_i (i=1\sim 6)$ を決定し、(1)式の ϕ に ϕ_0 を与え、[処理1]により、辺上の点A~F(図2参照)および a, b の値を求め、三角形の頂点

には図2のように番号付けをする.

step 2 [ケースの分類]: $a=0, b=2$ ならば step 3 へ. $a=1, b=0$ ならば step 4 へ. $a=1, b=2$ ならば step 5 へ. $a=2, b=0$ ならば step 8 へ. $a=3, b=0$ ならば step 11 へ. $a=0, b=0$ ならば操作を終了.

step 3 [タイプ1の処理]: $t_1 \leftarrow A, t_2 \leftarrow B, n \leftarrow \text{trunc}(D_{12}(A, B)/D_{12} + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 3.1: 操作を終了.

step 4 [タイプ2の処理]: $T_1 \leftarrow A, T_2 \leftarrow B, I \leftarrow 1, J \leftarrow 2, K \leftarrow 3$ として SUB 2 へ.

step 4.1: 操作を終了.

step 5 [タイプ3, 4の判別]: (A-3)式において、 $E \geq 0$ なら step 6 へ. さもないならば SUB A へ.

step 5.1: $ka=0$ ならば step 6 へ. $ka=1$ なら step 7 へ.

step 6 [タイプ3の処理]: $t_1 \leftarrow B, t_2 \leftarrow A, n \leftarrow \text{trunc}(D_{12}(A, B)/D_{12} + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 6.1: $t_1 \leftarrow D, t_2 \leftarrow C, n \leftarrow \text{trunc}(D_{12}(C, D)/D_{12} + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 6.2: 操作を終了.

step 7 [タイプ4の処理]: $t_1 \leftarrow A, t_2 \leftarrow D, n \leftarrow \text{trunc}(D_{12}(A, D)/D_{12} + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 7.1: $T_1 \leftarrow B, T_2 \leftarrow C, I \leftarrow 1, J \leftarrow 2, K \leftarrow 3$ として SUB 2 へ.

step 7.2: 操作を終了.

step 8 [タイプ5, 6の判別]: (A-3)式において $E \geq 0$ なら step 9 へ. さもないならば SUB A へ.

step 8.1: $ka=0$ なら step 9 へ. $ka=1$ なら step 10 へ.

step 9 [タイプ5の処理]: $t_1 \leftarrow A, t_2 \leftarrow D, t_3 \leftarrow B, t_4 \leftarrow C, n \leftarrow \text{trunc}(D_{12}(B, C)/D_{12} + 1), \omega \leftarrow 1$ として SUB 1 へ.

step 9.1: 操作を終了.

step 10 [タイプ6の処理]: $T_1 \leftarrow A, T_2 \leftarrow B, I \leftarrow 3, J \leftarrow 1, K \leftarrow 2$ として SUB 2 へ.

step 10.1: $T_1 \leftarrow C, T_2 \leftarrow D, I \leftarrow 2, J \leftarrow 3, K \leftarrow 1$ として SUB 2 へ.

step 10.2: 操作を終了.

step 11 [タイプ7の処理]: $t_1 \leftarrow A, t_2 \leftarrow F, n \leftarrow \text{trunc}(D_{11}(A, F)/D_s + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 11.1: $t_1 \leftarrow C, t_2 \leftarrow B, n \leftarrow \text{trunc}(D_{11}(B, C)/D_s + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 11.2: $t_1 \leftarrow E, t_2 \leftarrow D, n \leftarrow \text{trunc}(D_{11}(D, E)/D_s + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 11.3: 操作を終了.

SUB 1: (点列を求める手順)

step 1: $p_0 \leftarrow$ 点 t_1 の面積座標値, $S_1 \leftarrow (p_0), l \leftarrow 1$ とし $\omega = 0$ なら step 2 へ. $\omega = 1$ なら次の step へ.

step 1.1: $p_0' \leftarrow$ 点 t_3 の面積座標値, $S_2 \leftarrow (p_0')$ として次の step へ.

step 2 [ϕ_0 のポテンシャル線上の l 番目の点を求める]: (6) 式より Q を求め, (1), (2), (4) 式より α_1, α_2 を求め, (2), (4) 式より γ_1, γ_2 を求める.

γ_1, γ_2 の両方が (3) 式を満たすならば step 2.2 へ. どちらか一方が (3) 式を満たすならば step 2.1 へ.

step 2.1: $p_i \leftarrow$ (3) 式を満たす $\gamma_i (i=1 \text{ または } 2)$ として step 3 へ.

step 2.2: $q \leftarrow \{i | \min(\alpha_i)\}, q' \leftarrow \{i | \max(\alpha_i)\}, p_i \leftarrow \gamma_i, p_i' \leftarrow \gamma_i'$ として次の step へ (Appendix 3 参照).

step 3: $S_1 \leftarrow (S_1, p_i)$ とし $\omega = 0$ ならば step 4 へ.

$\omega = 1$ ならば次の step へ.

step 3.1: $S_2 \leftarrow (S_2, p_i')$ とし次の step へ.

step 4: $l \leftarrow l + 1$ とし $l \leq n$ ならば step 2 へ.

$l > n$ ならば次の step へ.

step 5: $p_{n+1} \leftarrow$ 点 t_2 の面積座標値, $S_1 \leftarrow (S_1, p_{n+1})$ とし S_1 の各点間を直線で結び $\omega = 0$ ならば SUB 1 の操作を終了. $\omega = 1$ ならば次の step へ.

step 5.1: $p'_{n+1} \leftarrow$ 点 t_4 の面積座標値, $S_2 \leftarrow (S_2, p'_{n+1})$ とし, S_2 の各点間を直線で結び SUB 1 の操作を終了.

SUB 2: (T_1, T_2 が同一辺上にある場合の処理手順)

step 1: 線分 T_1, T_2 の中点 N を求め, 次に線分 NI, NJ, NK の各中点 N_i, N_j, N_k を求める. 点 N, N_i, N_j, N_k のポテンシャル値を (1) 式より求める. 線分 NI 上のポテンシャル値 ϕ_0 の点 T_3 を求め, 次の step へ.

step 2: 三角形 NIJ について, その1次および2次節点のポテンシャル値より (1) 式の $\beta_i (i=1 \sim 6)$ を決

定し $t_1 \leftarrow T_3, t_2 \leftarrow T_1, n \leftarrow \text{trunc}(D_{11}(T_1, T_3)/D_s + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 3: 三角形 NKI について, その1次および2次節点のポテンシャル値より (1) 式の $\beta_i (i=1 \sim 6)$ を決定し, $t_1 \leftarrow T_2, t_2 \leftarrow T_3, n \leftarrow \text{trunc}(D_{11}(T_2, T_3)/D_s + 1), \omega \leftarrow 0$ として SUB 1 へ.

step 4: SUB 2 の操作を終了.

5. 適用例

前章までに述べた等ポテンシャル線表示アルゴリズムの有用性を確かめるために, 2ケースの磁界解析結果の表示に適用した. ケースAは単相変圧器の鉄窓外の磁界を軸対称3次元場として解析した場合であり, ケースBは, アルミシールド効果を検討するためのモデルで, 2次元平面場として解析した場合である. 図9および図10に, それぞれケースAとケースBの要素分割図と $D_s = 1. [\text{mm}]$ とした場合の等ポテンシャル線図を示す. 図から明らかなように, 等ポテンシャル線は2次試験関数近似により滑らかに描かれている. また, 表2には, これらの作図データと数種の

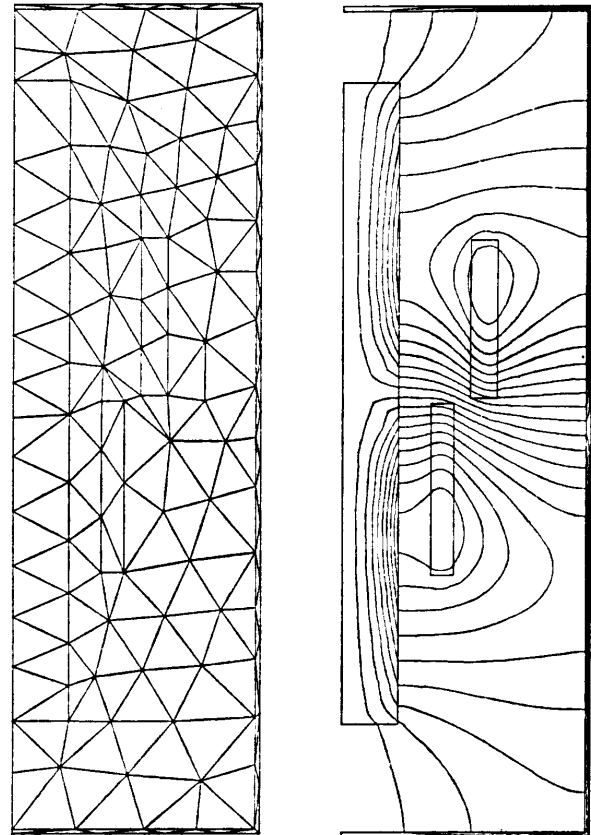


図9 要素分割図と等ポテンシャル線

Fig. 9 Triangular mesh and equi-vector potential map.

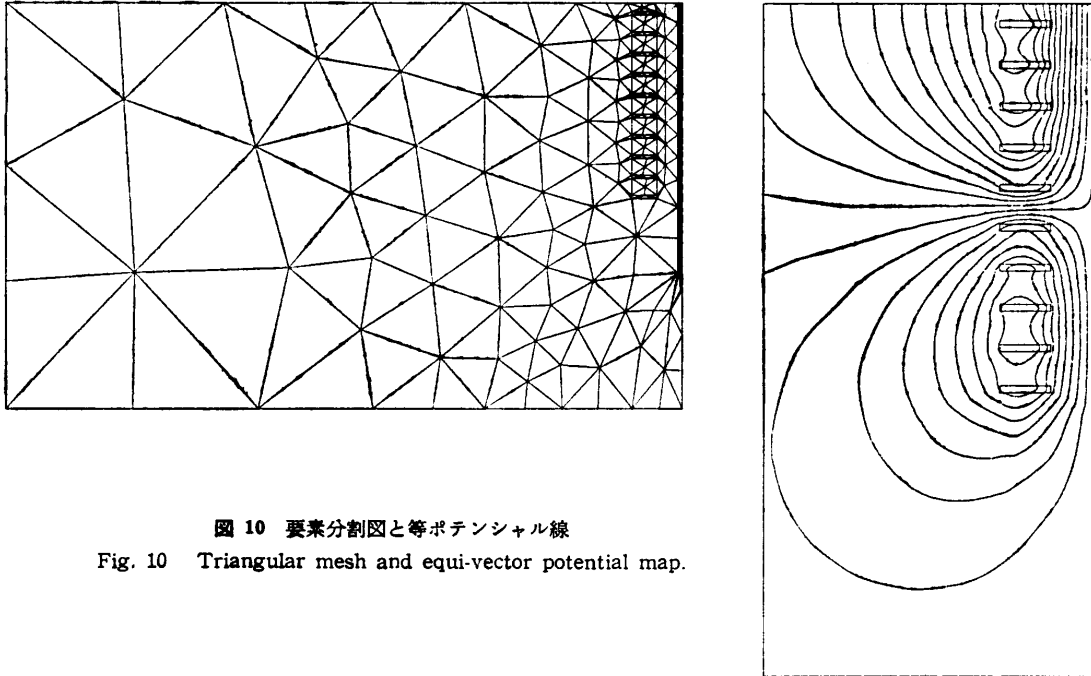


図 10 要素分割図と等ポテンシャル線

Fig. 10 Triangular mesh and equi-vector potential map.

表 2 試計算結果

Table 2 Results of test-run.

ケース	要素数	節点数	等ポテンシャル線数	D_s [mm]	処理時間 (CPU) [Sec]
A	211	464	19	0.5	124
				1.0	108
				3.0	96
				5.0	95
B	380	807	20	0.5	171
				1.0	159
				3.0	152
				5.0	150

使用計算機: OKITAC System 50/40

D_s に対する処理時間の関係を示す。当然のことであるが、 D_s を大きくすれば処理時間は短くなる。

以上の結果から分かるように、本手法は、解析結果を忠実に図示できること、図の大きさに応じて任意に D_s を指定できること、および処理時間も実用上問題ないことから十分実用に供し得るものと思われる。

なお、本手法は、要素の番号順の三角形ごとに処理しているため、X-Y プロットに表示する場合は、ペンのあげおろし回数が一筆書きの場合に比べ多い。ただし、本アルゴリズムにも三角形要素の結合状態を認知する前処理を施せば¹⁾、一筆書きも可能となる。しかし、その処理のために、余分の記憶容量が必要となる。なお、CRT、あるいは静電式プリンタ装置に出力する場合には、一筆書きより有利である。

6. むすび

領域内を三角形要素に分割し、各要素内のポテンシャルを 2 次試験関数で近似して解析した場合の等ポテンシャル線を、正確かつ能率よく作画する一手法を提案し、適用例を用いて、描かれるポテンシャル線の正確さ、および処理時間の点からその有用性を示した。

参 考 文 献

- 1) 川面, 永井, 荒木, 加藤: 等高線作図の一方法, 情報処理, Vol. 14, No. 12, pp. 916-924 (1973).
- 2) 加川幸雄: 電気・電子のための有限要素法入門, オーム社 (1977).
- 3) 数学ハンドブック編集委員会編: 理工学のための数学ハンドブック, 丸善 (1964).

付 録

Appendix 1 図 3 の (c) と (d) と判別方法

三角形要素の 3 頂点を i, j, k (輪環の順) とし、等ポテンシャル線が頂点 i を通過するものとする。面積座標系で図示すれば図 3 (c) および (d) は、それぞれ図 A-1 (a) および (b) になる。図から明らかなように、 $\xi_i - \xi_j$ 面積座標系において、ポテンシャル線の原点 0 における接線の方向、すなわち、 $\text{Sgn} = [d\xi_i/d\xi_j]_{\xi_i=0, \xi_j=0}$ の符号から、以下に示す方法により、等ポテンシャル線が要素内を通過するかどうかの判別を行うことがで

きる。

Sgn>0 のとき 等ポテンシャル線が要素内を通過。

Sgn=0 のとき 等ポテンシャル線が要素の頂点をかすめる。

なお, Sgn は, 6 節点のポテンシャルから次式で計算される。

$$Sgn = -\frac{4\phi_{k+3} - 3\phi_i - \phi_j}{4\phi_{j+3} - 3\phi_i - \phi_k} \quad (A-1)$$

Appendix 2 2次曲線の分類

(1), (2)式より ζ_1 を消去して得られる ζ_2, ζ_3 に関する方程式が次式で表わされるとする。

$$P(\zeta_2, \zeta_3) = a\zeta_2^2 + 2h\zeta_2\zeta_3 + b\zeta_3^2 + 2g\zeta_2 + 2f\zeta_3 + c = 0 \quad (A-2)$$

上式の2次曲線が楕円, 放物線あるいは双曲線かの判定は, 次式により行うことができる³⁾。

$$E = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2 \quad (A-3)$$

すなわち, $E > 0$ ならば楕円となり, $E = 0$ ならば放物線, $E < 0$ ならば双曲線となる。

Appendix 3 2次方程式の根の選択法

図2のタイプ1, タイプ2の場合の点列を, 3章の方法を用いて発生する際, (3)式を満足する2次方程式の根はただ1つ存在する。しかし, そのほかのタイプの場合には1つとは限らない。ここでは, 後者のうち2根とも(3)式を満足する場合の, 適正な点列を求めるための根の選択法について述べる。

[1] タイプ3, 4, 6, 7の場合。

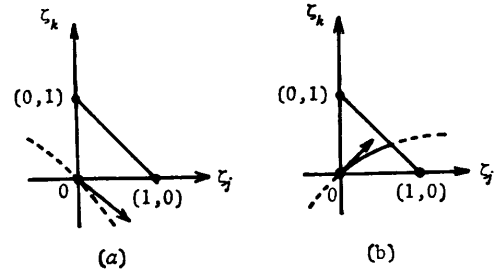
タイプ3について: 図A-2において, 点A, Bを通る等ポテンシャル線上に点を求めるとき, 図から明らかかなようにQの値によっては, 点A, Bおよび点C, Dを通る等ポテンシャル線上にそれぞれ点Eおよび点Fが求まることがある。これは, 点Eおよび点Fの面積座標をそれぞれ $(\zeta_{1E}, \zeta_{2E}, \zeta_{3E})$ および $(\zeta_{1F}, \zeta_{2F}, \zeta_{3F})$ とすると,

$$\zeta_{1E}/\zeta_{3E} = \zeta_{1F}/\zeta_{3F} = Q$$

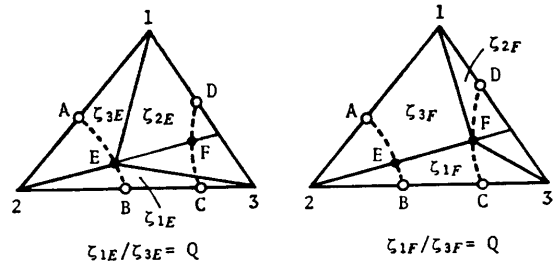
となるからである。したがって, この2点のいずれかが点A, Bを通る等ポテンシャル線上の点であるかを区別する必要がある。2次方程式は, 面積座標変数 ζ_3 について構成されているから, 2根 ζ_{3E}, ζ_{3F} の大小比較により, その区別が可能となる。すなわち, 図A-2から明らかかなように次の関係が成り立つ。

$$\zeta_{3E} < \zeta_{3F}$$

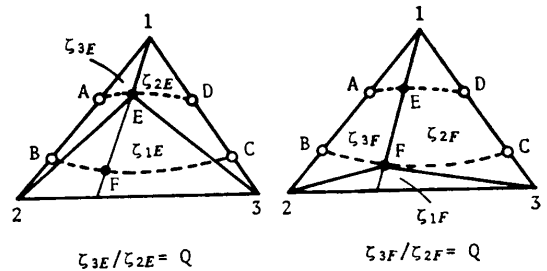
したがって, (3)式を満たす根が2組求まる場合は,



図A-1 等ポテンシャル線が頂点を通る場合
Fig. A-1 The cases that an equi-vector potential line passes on a vertex.



図A-2 タイプ3における根の判別
Fig. A-2 Discrimination of roots in type 3.



図A-3 タイプ5における根の判別
Fig. A-3 Discrimination of roots in type 5.

小さい方の根 $(\zeta_{1E}, \zeta_{2E}, \zeta_{3E})$ がA, Bを通る等ポテンシャル線上の点である。点C, D間の点列を求める場合についても同様の関係が成り立つ。

タイプ4, 6, 7の場合も, タイプ3と同一方法を繰り返すことにより根の選択が行える(説明略)。

[2] タイプ5の場合

図A-3の2次方程式は面積座標変数 ζ_2 について構成されており, 2根 ζ_{2E}, ζ_{2F} の間には常に $\zeta_{2E} < \zeta_{2F}$ の関係が成り立つ。したがって, 点A, Dを通る等ポテンシャル線上の点は, 小さい方の根を, 点B, Cを通る方は, 大きい方の根を採用すればよい。

(昭和55年6月13日受付)

(昭和55年9月18日採録)