

x が大きい場合の変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算†

吉田年雄** 二宮市三**

第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ について、 x が大きい場合の能率的な数値計算法を提案している。本論文では、

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} f_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$$

で定義される $f_\nu(t)$ についての近似式を求めている ($t=1/x$)。 $f_\nu(t)$ の満足する微分方程式に τ 法を適用すると、 $f_\nu(t)$ に対する近似式

$$f_{\nu,m}(t) = \sum_{i=0}^m G_i(m, \nu) t^i \bigg/ \sum_{i=0}^m H_i(m, \nu) t^i$$

が求められる。上式を変形すると、 $K_\nu(x)$ の近似計算式として、

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{x}} e^{-x} \frac{\sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{x}\right)^i \sum_{j=0}^i d_{ij} \nu^{2j}}{\sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{x}\right)^i e_i V_i}$$

が得られる。ただし、 d_{ij} および e_i は定数、

$$V_0 = 1, \quad V_i = \prod_{l=0}^{i-1} \left\{ \left(m-l+\frac{1}{2}\right)^2 - \nu^2 \right\} \quad (i \geq 1)$$

である。

1. まえがき

本論文では、正数 x が大きい場合の第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の能率的な計算法を提案する。その方法は、すでに報告した τ 法による整数次の $K_\nu(x)$ の計算法¹⁾ を一般化し、次数 ν が任意の $K_\nu(x)$ を能率的に計算できるようにしたものである。この方法は、ポアソンの和公式による積分法²⁾ あるいは位相・振幅法³⁾ (phase-amplitude method) と比べて、同じ計算量では、かなり精度が良く、しかも、漸近展開式の計算とは異なり、計算量を増せば、 x の小さいところまで $K_\nu(x)$ の値を求めることができるという特長をもっている。

さて、

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \quad (1)$$

なる関係があるので、ここでは、 $\nu \geq 0$ の場合のみ扱う。本論文では、 $0 \leq \nu \leq 2.5$ に対して、 $K_\nu(x)$ の近似式を与える。 $\nu > 2.5$ に対しては、 ν の小数部分を μ とするとき、

$$\mu \leq 0.5 \text{ ならば、 } K_{\mu+1}(x) \text{ と } K_{\mu+2}(x)$$

$$\mu > 0.5 \text{ ならば、 } K_\mu(x) \text{ と } K_{\mu+1}(x)$$

を近似式により求め、漸化式

$$K_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} K_\nu(x) + K_{\nu-1}(x) \quad (2)$$

を用いて $K_\nu(x)$ の値を計算する。

本論文では、 x が大きい場合の $K_\nu(x)$ の計算法を述べているが、 x が小さい場合の $K_\nu(x)$ の計算法はすでに報告した⁴⁾。この両者の計算法により、すべての正数 x について、 $K_\nu(x)$ の値を計算することができる。

2. 計算法

筆者は、すでに、Lanczos の τ 法による整数次の $K_\nu(x)$ の計算法について報告した¹⁾。参考文献 1) は、複素変数 z の $K_\nu(z)$ の計算法について述べたものであるが、その中に、 z が正の実数の場合についての議論を含んでいる。そこでは、次数を整数 $n=0$ および 1 に限定した場合の能率的な計算法を示した。本論文では、それを拡張して、次数 ν が任意の場合にも能率的に計算できる方法を提案している。ただし、ここでは、次数 ν は、 $0 \leq \nu \leq 2.5$ の場合を考える。

2.1 τ 法

τ 法による計算法を少しふり返ることにする。 $K_\nu(x)$ を

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} f_\nu\left(\frac{1}{x}\right) \quad (3)$$

† Computation of Modified Bessel Functions $K_\nu(x)$ with Large Argument x by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

** 名古屋大学工学部情報工学

の形として、 $f_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ について、 x が大きい場合の近似式を求めることを考える。以下、 $t = \frac{1}{x}$ とする。したがって、 t が小さい場合の $f_\nu(t)$ の近似式を求めることになる。この $f_\nu(t)$ は、微分方程式

$$t^2 f_{\nu m}''(t) + 2(t+1) f_{\nu m}'(t) - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) f_{\nu m}(t) = 0 \tag{4}$$

を満足する。上式の右辺に、直交区間 $[0, \eta]$ のずらし超球多項式 (shifted ultraspherical polynomial) を τ 倍したものを付加した次式の形の微分方程式を考える。

$$t^2 f_{\nu m}''(t) + 2(t+1) f_{\nu m}'(t) - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) f_{\nu m}(t) = \tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right) \tag{5}$$

このずらし超球多項式

$$C_m^{*(\alpha)}(t) = \sum_{i=0}^m C_{mi}^{*(\alpha)} t^i \tag{6}$$

は、 $\alpha=0$ のとき、ずらしチェビシェフ多項式、 $\alpha=0.5$ のとき、ずらしルジャンドル多項式に相当する。式(5)は、次の形の m 次の多項式を特解としてもつ。

$$f_{\nu m}(t) = -\tau \sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{i=0}^k a_i t^i}{2(k+1)a_{k+1}\eta^k} \tag{7}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_k &= \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2k-1)^2)}{k! 8^k} \end{aligned} \right\} (k \geq 1) \tag{8}$$

であり、 $C_{mk}^{*(\alpha)}$ は式(6)で与えられる係数である。式(5)の右辺の τ が十分に小さいならば、この $f_{\nu m}(t)$ は、式(4)の $f_\nu(t)$ に対する近似多項式と考えることができるであろう。初期条件 $f_{\nu m}(0)=1$ ($t \rightarrow 0$ のとき、 $f_\nu(t) \rightarrow 1$) から、 τ を決めると (τ は m を増すと小さくなる)、

$$f_{\nu m}(t) = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{i=0}^k a_i t^i}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}{\sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}} \tag{9}$$

が得られる。上式は、未知数として、 α および η を含んでいるが、これらの選定については、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0.5 \\ \eta &= t \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

のとき、最も精度が良いことをすでに報告した¹⁾。そのように選べば、

$$f_{\nu m}(t) = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{P_{mk}^* \sum_{i=0}^k a_i t^i}{(k+1)a_{k+1}t^k}}{\sum_{k=0}^m \frac{P_{mk}^*}{(k+1)a_{k+1}t^k}} \tag{11}$$

となる。ただし、 P_{mk}^* はずらしルジャンドル多項式

$$P_m^*(t) = \sum_{i=0}^m P_{mi}^* t^i \tag{12}$$

の係数である。式(11)は、 $f_\nu(t)$ の漸近展開式 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ を加速したものと考えられ、また、漸近展開式とは異なり、 m を大きくすれば $f_\nu(t)$ に対する相対精度は高くなる。ただし、次数 ν が半整数のときには、漸近展開式は項が有限で終り、厳密な式になることはいうまでもない。式(11)の分母、分子に t^m を乗じ、 t のべきでまとめれば、

$$f_{\nu m}(t) = \frac{\sum_{i=0}^m G_i(m, \nu) t^i}{\sum_{i=0}^m H_i(m, \nu) t^i} \tag{13}$$

となる。ただし、係数 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ は、

$$G_i(m, \nu) = \sum_{k=0}^i \frac{P_{m, m-i+k}^* a_k}{(m+1-i+k)a_{m+1-i+k}} \tag{14}$$

$$H_i(m, \nu) = \frac{P_{m, m-i}^*}{(m-i+1)a_{m-i+1}} \tag{15}$$

である。 ν の値を指定した場合には、所要の精度 (たとえば、単精度あるいは倍精度) に応じて m を定めれば、係数 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ は定数になる。したがって、その場合には、あらかじめ、係数 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ の値を計算して、表にしておき、実際に $f_{\nu m}(t)$ の値を計算するときには、その表の値を用いることにすれば、能率的である。また、丸め誤差を防ぐために、係数 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ の値は、多倍長計算により求めておくことが好ましい。

以上が参考文献 1) の骨子であり、ここでは、 ν を 0 および 1 に限定して、係数 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ の数値を与えた。

2.2 次数 ν が任意の場合の計算法

次数 ν が任意の場合には、 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ をいかに能率的に計算するかが問題となる。 $G_i(m, \nu)$ および $H_i(m, \nu)$ を能率的に計算する方法は、以下に説明するように、式(14)および(15)を変形すること

から得られる。

まず、式(14)の $G_i(m, \nu)$ に着目しよう。 $G_i(m, \nu)$ は、式(8)により定義される a_k を含んでいる。この a_k は ν^2 の k 次式であり、 $a_k = \frac{4\nu^2 - k^2}{8k} a_{k-1}$ ($k \geq 1$) なる関係を満たす。すなわち、添字の大きいものは、添字の小さいものの因子をすべて含む。また、式(14)の分母の $a_{m+1-i+k}$ ($0 \leq k \leq i$) の中で、 ν^2 の次数が最も高いものは a_{m+1} である。したがって、式(14)は、 a_{m+1} を乗ずれば、 ν^2 の多項式になる。その ν^2 の多項式の次数は、 $i = k - (m+1-i+k) + m+1$ であり、次式のとおりである。

$$G_i(m, \nu) = \frac{1}{a_{m+1}} \frac{1}{8^i} \sum_{k=0}^i \frac{P_{m,m-k}^* R_{i-k}^{(1)} R_k^{(2)}}{(i-k)! \prod_{l=0}^k (m-l+1)} \quad (16)$$

ただし、 $R_k^{(1)}$ および $R_k^{(2)}$ は ν^2 の k 次多項式であり、

$$R_0^{(1)} = R_0^{(2)} = 1 \quad (17)$$

$$R_k^{(1)} = \prod_{l=0}^{k-1} \{4\nu^2 - (2l+1)^2\} \quad (k \geq 1) \quad (18)$$

$$R_k^{(2)} = \prod_{l=0}^{k-1} \{4\nu^2 - (2m-2l+1)^2\} \quad (k \geq 1) \quad (19)$$

で与えられる。式(16)を ν^2 のべきで書きまとめると、

$$G_i(m, \nu) = \frac{1}{a_{m+1}} \sum_{j=0}^i b_{ij} \nu^{2j} \quad (20)$$

の形となる。ここで、係数 b_{ij} (m のみに依存する) は、具体的には、次式にて表わされる。

$$b_{ij} = 2^{2j-3i} \sum_{l=0}^j \sum_{k=j-l}^{i-l} \frac{P_{m,m-k}^* p_{i-k,i} q_{k,j-l}}{(i-k)! \prod_{n=0}^k (m-n+1)} \quad (21)$$

ただし、 $p_{k,i}$ および $q_{k,i}$ は、それぞれ、

$$p_{0,0} = 1 \quad p_{1,0} = -1 \quad p_{1,1} = 1 \quad (22)$$

$$q_{0,0} = 1 \quad q_{1,0} = -(2m+1)^2 \quad q_{1,1} = 1 \quad (23)$$

を初期値として、 $2 \leq k \leq i$ に対して、次の漸化式

$$\left. \begin{aligned} p_{k,0} &= -(2k-1)^2 p_{k-1,0} \\ p_{k,i} &= p_{k-1,i-1} - (2k-1)^2 p_{k-1,i} \quad (1 \leq l \leq k-1) \\ p_{k,k} &= p_{k-1,k-1} (=1) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{k,0} &= -(2m-2k+3)^2 q_{k-1,0} \\ q_{k,i} &= q_{k-1,i-1} - (2m-2k+3)^2 q_{k-1,i} \quad (1 \leq l \leq k-1) \\ q_{k,k} &= q_{k-1,k-1} (=1) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

により作ることができる。

さて、式(20)のように表わされた $G_i(m, \nu)$ を用いて、式(13)および(15)より、

$$f_{\nu,m}(t) = \frac{a_{m+1} G_i(m, \nu)}{a_{m+1} H_i(m, \nu)} = \frac{\sum_{i=0}^m t^i \sum_{j=0}^i b_{ij} \nu^{2j}}{\sum_{i=0}^m t^i \frac{P_{m,m-i}^* a_{m+1}}{(m-i+1) a_{m-i+1}}} \quad (26)$$

が得られる。

つぎに、上式の分母に着目しよう。式(8)より、次の関係式が成り立つ。

$$\frac{a_{m+1}}{a_{m-i+1}} = \frac{(m-i+1)! V_i}{(m+1)! (-8)^i} \quad (27)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= 1 \\ V_i &= \prod_{l=0}^{i-1} \left\{ \left(m-l + \frac{1}{2} \right)^2 - \nu^2 \right\} \quad (i \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

である。したがって、式(26)は、

$$f_{\nu,m}(t) = \frac{\sum_{i=0}^m t^i \sum_{j=0}^i b_{ij} \nu^{2j}}{\sum_{i=0}^m t^i c_i V_i} \quad (29)$$

と表わされる。ただし、

$$c_i = \frac{(m-i)! P_{m,m-i}^*}{(m+1)! (-2)^i} \quad (30)$$

である。(c_i も m のみに依存する。)

結局、式(3)と(29)を用いれば、 $K_{\nu}(x)$ の能率的な計算式として、

$$K_{\nu}(x) \doteq \sqrt{\frac{1}{x}} e^{-x} \frac{\sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{x} \right)^i \sum_{j=0}^i d_{ij} \nu^{2j}}{\sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{x} \right)^i e_i V_i} \quad (31)$$

が得られる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} d_{ij} &= b_{ij} / b_{1,1} \\ e_i &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_i / b_{1,1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

である。

2.3 係数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ について

式(31)の係数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ は、 m のみの関数である。したがって、所要の精度に応じて m を定めれば、係数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ は定数となる。あらかじめ、係数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ の値を計算して、表にしておき、実際に $K_{\nu}(x)$ の値を求めるときには、その値を用いて計算を行うことにすると能率的である。

また、丸め誤差を防ぐために、 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ の計算は、多倍長計算により求めておくことが好ましい。

さて、 $\{d_{ij} | i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, i\}$ の要素は、 m が少なくとも 50 までは、すべて正であることが確かめられている。したがって、式(31)の分子における計算では、桁落ちは無。また、 $\{e_i | i=0, 1, \dots, m\}$ の要素も m に依らず、すべて正である。さらに、 $0 \leq \nu \leq 2.5$ において、 $\{V_i | i=0, 1, \dots, m\}$ の要素は、 V_m のみ負になりうるので、式(31)の分母における計算では桁落ちの可能性はあるが、 $x \geq 0.5$ では、 $m \geq 2$ であれば桁落ちは生じない。

なお、続けて同じ値の ν に対して、能率的に、 $K_\nu(x)$ の値を計算することができるようにするためには、式(31)の $\sum_{j=0}^i d_{ij} \nu^{2j}$ および $e_i V_i$ の計算値 ($i=0, 1, \dots, m$) を一時的に記憶しておくことよ。なぜならば、それらの値を用いれば、同じ値の ν に対しては、 $\sum_{j=0}^i d_{ij} \nu^{2j}$ および $e_i V_i$ の計算が不要となるからである。

2.4 近似式の次数 m の決定について

有理式(31)の次数 m の決め方について考えることにする。図1には、式(31)の x に対する相対精度の例として、 $\nu=1/3$ について、 $m=5, 10$ および 20 の場合のものが示されている。この図は、誤差の符号が変わることに起因して、精度が急激に高くなっている部分を除いて、 m を大きくすると (x を固定して)、精度が高くなり、また、 x を大きくすると (m を固定

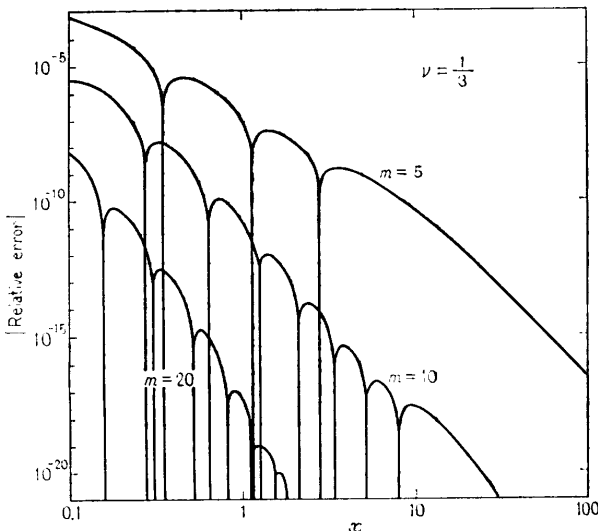


図1 x に対する式(31)の相対精度
Fig. 1 Relative error of Eq. (31).

して)、精度が高くなることを示している。所要の精度に応じて、 m を定めなければならないが、 x のいかなる値以上で、式(31)を用いるかによって異なってくる。 x が小さいときには、「 x が小さい場合の $K_\nu(x)$ の計算法⁴⁾」を用いることができ、参考文献4)の図2には、その方法の適用限界、すなわち、適用できる最大の x (ν に依存する) が示されている。ここでは、 x が小さい場合の計算法の適用限界以上の x に対して、本計算法を用いることにする。

さて、図2には、式(31)の ν に対する相対精度の例として、 $x=1, m=5$ の場合が示されている。 $\nu=0.5, 1.5$ および 2.5 で精度が高くなっているが、これは、 ν が半整数のときには、式(11)が $f_\nu(t)$ の漸近展開式と一致することによる。これらの精度が急激に高くなる部分を除いて、精度はほぼ同じ程度であるので、 ν によって m を変える必要はないと考えられる。

図3には、与えられた ν と x に対して、 x が小さい場合の方法、あるいは、 x が大きい場合の方法のい

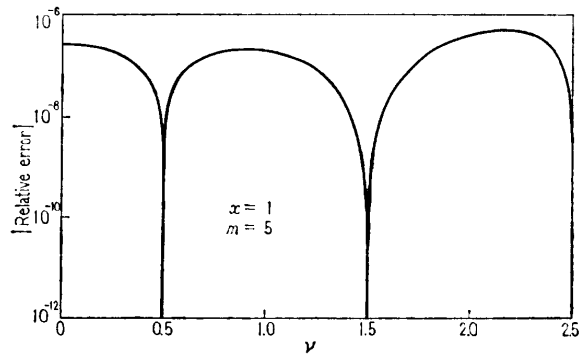


図2 ν に対する式(31)の相対精度
Fig. 2 Relative error of Eq. (31).

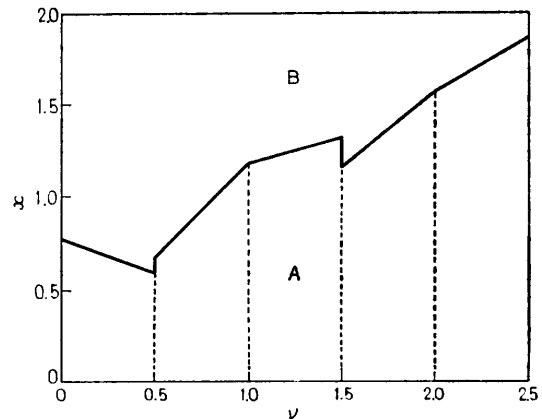


図3 領域 A および領域 B
Fig. 3 Region A and region B.

ずれかを選択するかを容易にするために、参考文献4)の図2の境界を直線で近似したものを示す。この直線の式は、つぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned} x &= -0.36\nu + 0.78 & (0 \leq \nu \leq 0.5) \\ x &= \nu + 0.18 & (0.5 < \nu \leq 1) \\ x &= 0.28\nu + 0.9 & (1 < \nu \leq 1.5) \\ x &= 0.82\nu - 0.07 & (1.5 < \nu \leq 2) \\ x &= 0.58\nu + 0.42 & (2 < \nu \leq 2.5) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

図3の領域Aにおいては、 x が小さい場合の方法、そして、領域Bにおいては、 x が大きい場合の方法を用いることにする。 m をいろいろ変えて、式(31)の精度を調べることより、結果として、領域Bにおいて、単精度(8D)の場合には、

$$\left. \begin{aligned} x < 2 & \text{では、} m=9 \\ 2 \leq x < 10 & \text{では、} m=6 \\ 10 \leq x & \text{では、} m=4 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

とし、倍精度(18D)の場合には、

$$\left. \begin{aligned} x < 2 & \text{では、} m=28 \\ 2 \leq x < 10 & \text{では、} m=16 \\ 10 \leq x & \text{では、} m=11 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

とすると、 $K_s(x)$ を能率的に計算できることがわかった。

2.5 d_{ij}, e_i の数表および数表作成プログラム

表1, 表2および表3には、それぞれ、 $m=4, 6$ および9に対して、単精度用の d_{ij} および e_i の数値が示されている。倍精度用の表は大きくなり、実際にプログラムを作成するときに、いちいち読み取るのは大変であろう。図4には、そのような面倒さを避けるために用意されたFORTRANプログラム(4倍精度演算を使用している)を示す。このプログラムにより、FORTRANのDATA文の定数部分が出力される。このプログラムは、 $m=11, 16, 28$ の順に、

$$\left. \begin{aligned} &*d_{00} \text{の値}/ \\ &*d_{10} \text{の値}, d_{11} \text{の値}/ \\ &*d_{20} \text{の値}, d_{21} \text{の値}, \\ &*d_{22} \text{の値}/ \\ &\vdots \\ &*d_{m0} \text{の値}, d_{m1} \text{の値}, \\ &*d_{m2} \text{の値}, d_{m3} \text{の値}, \\ &\vdots \\ &*d_{mm} \text{の値}/ \\ &*e_0 \text{の値}, e_1 \text{の値}, \\ &*e_2 \text{の値}, e_3 \text{の値}, \\ &\vdots \\ &*e_m \text{の値}/ \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

を出力するので、たとえば、

表1 $m=4$ のときの d_{ij} および e_i

Table 1 d_{ij} and e_i for $m=4$.

d_{00}	0.4000000000F+01
d_{10}	0.1975000000F+02
d_{11}	0.1000000000F+01
d_{20}	0.2432812500F+02
d_{21}	0.5517857143F+01
d_{22}	0.1071428571F+00
d_{30}	0.7037169375F+01
d_{31}	0.5989211310F+01
d_{32}	0.5907738095F+00
d_{33}	0.5952380952F-02
d_{40}	0.1997680664F+00
d_{41}	0.8178106399F+00
d_{42}	0.3829427083F+00
d_{43}	0.2663690476F-01
d_{44}	0.1488095238F-03

e_0	0.3191538243F+01
e_1	0.7978845608F+00
e_2	0.8548763151F-01
e_3	0.4749312862F-02
e_4	0.1187328212F-03

表2 $m=6$ のときの d_{ij} および e_i

Table 2 d_{ij} and e_i for $m=6$.

d_{00}	0.4000000000F+01
d_{10}	0.4175000000F+02
d_{11}	0.1000000000F+01
d_{20}	0.1402343750F+03
d_{21}	0.1176136364F+02
d_{22}	0.1136363636F+00
d_{30}	0.1805898437F+03
d_{31}	0.4091808712F+02
d_{32}	0.1433712121F+01
d_{33}	0.7575757576F-02
d_{40}	0.8313317871F+02
d_{41}	0.4809976720F+02
d_{42}	0.4718394886F+01
d_{43}	0.9753787879F-01
d_{44}	0.3156565657F-03
d_{50}	0.1010599136F+02
d_{51}	0.1578244669F+02
d_{52}	0.4198536882F+01
d_{53}	0.2659298059F+00
d_{54}	0.3856928662F-02
d_{55}	0.7891414141F-05
d_{60}	0.1235053599F+00
d_{61}	0.7097413733F+00
d_{62}	0.6085012310F+00
d_{63}	0.1223630640F+00
d_{64}	0.6417780624F-02
d_{65}	0.7614275192F-04
d_{66}	0.9394540645E-07

e_0	0.3191538243F+01
e_1	0.7978845608F+00
e_2	0.9066670005F-01
e_3	0.6044560006F-02
e_4	0.2518575003F-03
e_5	0.6296437506F-05
e_6	0.7495758936F-07

```
DATA D 00/
DATA D 10, D 11/
DATA D 20, D 21, D 22/
```

などを適当に挿入すれば、完全なDATA文となる。

```

IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
DIMENSION P(20,50),Q(50,50),FCT(51),AM(50),C(50),D(50),F(50)
DIMENSION MM(3)
DATA Q0,Q1,Q2,Q4,QM1,QH,QMH,Q125,Q625
*/0.000,1.000,2.000,4.000,-1.000,0.500,-0.500,0.12500,6.2500/
DATA RE/0.50-18/
DATA MM/11,16,26/
MMAX=MAX0(MM(1),MM(2),MM(3))
SC=Q2**(-MMAX)
SP=QSQRRT(Q2/(QATAN(Q1)*Q4))
P(1,1)=Q1*SC
P(2,1)=QM1*SC
P(2,2)=Q1*SC
Q(1,1)=Q1*SC
Q(2,2)=Q1*SC
FCT(1)=Q1
FCT(2)=Q1
DO 110 K=2,MMAX
P(K+1,1)=-QFLOAT(K+K-1)**2*P(K,1)
P(K+1,K+1)=Q1*SC
Q(K+1,K+1)=Q1*SC
FCT(K+1)=QFLOAT(K)*FCT(K)
KM1=K-1
FK=QFLOAT(K+K-1)
DO 100 L=1,KM1
P(K+1,L+1)=-FK*FK*P(K,L+1)+P(K,L)
100 CONTINUE
110 CONTINUE
FCT(MMAX+2)=QFLOAT(MMAX+1)*FCT(MMAX+1)
DO 500 IM=1,3
M=MM(IM)
MP1=M+1
AM(1)=QFLOAT(M+1)
AM(2)=QFLOAT(M)*AM(1)
Q(2,1)=-QFLOAT(M+M+1)**2*SC
DO 210 K=2,M
Q(K+1,1)=-QFLOAT(M+M-K-K+3)**2*Q(K,1)
AM(K+1)=QFLOAT(M-K+1)*AM(K)
KM1=K-1
FMK=QFLOAT(M+M-K-K+3)
DO 200 L=1,KM1
Q(K+1,L+1)=-FMK*FMK*Q(K,L+1)+Q(K,L)
200 CONTINUE
210 CONTINUE
W=FCT(M+1)
C(1)=Q1
DO 220 K=1,M
W=-QFLOAT(M+K)/QFLOAT(K)**2*W
C(K+1)=W/FCT(M-K+1)
220 CONTINUE
B22=(P(1,1)*Q(2,2)/AM(2)*C(M)+P(2,2)*Q(1,1)/AM(1)*C(MP1))*QH
D(2)=Q1
T1=Q1
DO 360 I=1,MP1
T2=Q1
T625=Q1
DO 330 J=1,I
IF(I.EQ.2.AND.J.EQ.2) GO TO 340
T12=T1*T2
S=Q0
DO 310 L=1,J
JML=J-L+1
JML=J-L+1
DO 300 K1=JML,IML
K=K1-1
S=P(I-K,L)/FCT(I-K)*Q(K+1,J-L+1)/AM(K+1)*C(MP1-K)+S
300 CONTINUE
310 CONTINUE
D(J)=S*T12/B22
T2=T2*Q4
IF(D(J)/D(1)*T625.GE.RE) GO TO 320
IE=J-1
GO TO 350
320 T625=Q625*T625

```

図 4 (36)を出力するためのプログラム

Fig. 4 Program for output of (36).

表 3 $m=9$ のときの d_{ij} および e_i

Table 3 d_{ij} and e_i for $m=9$.

d_{00}	0.4000000000F+01
d_{10}	0.8975000000F+02
d_{11}	0.1000000000F+01
d_{20}	0.7561250000F+03
d_{21}	0.2488235294F+02
d_{22}	0.1176470588F+00
d_{30}	0.3056573242E+04
d_{31}	0.2246793045F+03
d_{32}	0.3167585784F+01
d_{33}	0.8578431373F-02
d_{40}	0.6301269104E+04
d_{41}	0.9362036497F+03
d_{42}	0.2964207261E+02
d_{43}	0.2446691176F+00
d_{44}	0.4289215686F-03
d_{50}	0.6524321079F+04
d_{51}	0.1888736832E+04
d_{52}	0.1212237453F+03
d_{53}	0.2292871094E+01
d_{54}	0.1269231250F-01
d_{55}	0.1531862745F-04
d_{60}	0.3135666833F+04
d_{61}	0.1768715076E+04
d_{62}	0.2219708810F+03
d_{63}	0.8702369355E+01
d_{64}	0.1143492087F+00
d_{65}	0.4597552162E-03
d_{66}	0.3927853193F-06
d_{70}	0.5910473795E+03
d_{71}	0.6721586269F+03
d_{72}	0.1662313149F+03
d_{73}	0.1313949860F+02
d_{74}	0.3727769768E+00
d_{75}	0.3751796379F-02
d_{76}	0.1157489238F-04
d_{77}	0.7014023558F-08
d_{80}	0.3061870207E+02
d_{81}	0.7703154304F+02
d_{82}	0.3996319612E+02
d_{83}	0.6563513906F+01
d_{84}	0.3974292769E+00
d_{85}	0.9199484990F-02
d_{86}	0.7691464654F-04
d_{87}	0.1911321420F-06
d_{88}	0.7970481316E-10
d_{90}	0.1605919920F+00
d_{91}	0.1232331167E+01
d_{92}	0.1662330229F+01
d_{93}	0.6504806108E+00
d_{94}	0.9071949807F-01
d_{95}	0.4909340607E-02
d_{96}	0.1036143620F-03
d_{97}	0.7863314874F-06
d_{98}	0.1686088902F-08
d_{99}	0.4428045176F-12

e_0	0.3191538243F+01
e_1	0.7978845608F+00
e_2	0.9386877186F-01
e_3	0.6844597948F-02
e_4	0.3422298974F-03
e_5	0.1222249634E-04
e_6	0.3133973419F-06
e_7	0.5596381106F-08
e_8	0.6359523984F-10
e_9	0.3533068880F-12

```

330 CONTINUE
340 IF=1
350 CALL PUNCH(D,IF)
    T1=T1*0.125
360 CONTINUE
    SPF=SP/FCT(M+2)
    TI=0.1
    DO 400 I=1,MP1
        E(I)=FCT(MP1-I+1)*SPF*SC/B22*SC*(MP1-I+1)*T1
        TI=TI*0.0MH
400 CONTINUE
    CALL PUNCH(E,MP1)
500 CONTINUE
    STOP
    END

SUBROUTINE PUNCH(D,I)
REAL*16 D(I)
RFAL*4 WORK(1000)
DATA NTC/4000/
ENCODE(NTC,1000,WORK) (D(J),J=1,I)
1000 FORMAT(25(5X,1H*,026.20,1H*,026.20,1H*,20X))
    NTL=(I+1)/2
    DO 100 NL=1,NTL
        CALL RPI(NL,29,1HD,WORK)
        CALL RPI(NL,56,1HD,WORK)
100 CONTINUE
    IF(MOD(I,2).EQ.0) GO TO 120
    CALL RPL(NTL*33,1H*,WORK)
    DO 110 NC=34,80
        CALL RPI(NTL*NC,1H*,WORK)
110 CONTINUE
    GO TO 130
120 CALL RPL(NTL*60,1H*,WORK)
130 CONTINUE
    NTB=NTL*20
    WRITE(6,2000) (WORK(J),J=1,NTB)
    WRITE(7,2000) (WORK(J),J=1,NTB)
2000 FORMAT(20A4)
    RETURN
    END

SUBROUTINE RPL(NI,NC,C,WORK)
DIMENSION WORK(1)
NW=(NC+3)/4
NK=MOD(NC,4)+1
NLW=(NL-1)*20+NW
GO TO (130,100,110,120),NK
100 DECODE(4,1000,WORK(NLW)) W1
1000 FORMAT(1X,A3)
    ENCODE(4,1020,WORK(NLW)) C,W1
1020 FORMAT(A1,A3)
    GO TO 200
110 DECODE(4,1100,WORK(NLW)) W1
1100 FORMAT(A1,3X)
    DECODE(4,1120,WORK(NLW)) W2
1120 FORMAT(2X,A2)
    ENCODE(4,1140,WORK(NLW)) W1,C,W2
1140 FORMAT(A1,A1,A2)
    GO TO 200
120 DECODE(4,1200,WORK(NLW)) W1
1200 FORMAT(A2,2X)
    DECODE(4,1220,WORK(NLW)) W2
1220 FORMAT(3X,A1)
    ENCODE(4,1240,WORK(NLW)) W1,C,W2
1240 FORMAT(A2,A1,A1)
    GO TO 200
130 DECODE(4,1300,WORK(NLW)) W1
1300 FORMAT(A3,1X)
    ENCODE(4,1320,WORK(NLW)) W1,C
1320 FORMAT(A3,A1)
200 CONTINUE
    RETURN
    END

```

図 4 (36)を出力するためのプログラム

Fig. 4 Program for output of (36).

さて, $\{d_{ij} | i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, i\}$ は, m が大きいとき, 大きい i に対して, j が大きくなるにしたがって (i を固定して), 急激に減少する. したがって, 式(31)の分子の $\sum_{j=0}^i d_{ij} \nu^{2j}$ の計算において,

$$d_{ij} \nu^{2j} \leq 2.5^j d_{ij} < 0.5 \times 10^{-18} d_{i0} \quad (37)$$

を満足する j に対して, $d_{ij} \nu^{2j}$ の計算を行うことは無意味となる. そこで, $\sum_{j=0}^i d_{ij} \nu^{2j}$ の j の上限は, i ではなくて, 意味のあるところまでしか取らないようにすると能率的である. 図4のプログラムは, そのことを考慮に入れて, 意味のあるところまでの d_{ij} のみを出力するようになっている. $m=28$ のときのみ, そのような出力が得られる.

3. む す び

以上において, x が大きい場合の $K_\nu(x)$ の計算法について述べた. 本論文と同様な方法が, $K_\nu(x)$ の連分数展開

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \left(\frac{1}{|\sqrt{x}|} + \frac{u_1(\nu)}{|\sqrt{x}|} + \frac{u_2(\nu)}{|\sqrt{x}|} + \dots \right) \quad (38)$$

に対しても考えられる. ただし, $u_k(\nu)$ は, 式(8)の a_k を用いて, 商差法により求められ^{5), 6)}, ν^2 の有理式として表わすことが可能である. しかし, この有理式の分母および分子の次数は, k が大きくなるにつれ

て, 急激に大きくなるので, 能率的な計算式は得られず, 本論文の方法には及ばない.

おわりに, 日頃ご討論頂く本学鳥居達生助教授に感謝します.

参 考 文 献

- 1) 吉田年雄, 二宮市三: τ -methodによる複素変数のベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算, 情報処理, Vol. 14, No. 8, pp. 569-575 (1973).
- 2) Fettis, H. E.: Numerical Calculation of Certain Definite Integrals by Poisson's Summation Formula, MTAC, Vol. 9, pp. 85-92 (1955).
- 3) Goldstein, M. and Thaler, R. M.: Bessel Functions for Large Arguments, MTAC, Vol. 12, pp. 18-26 (1958).
- 4) 吉田年雄, 二宮市三: x が小さい場合の変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol. 21, No. 3, pp. 238-245, および, その訂正, No. 4, p. 345 (1980).
- 5) Gargantini, I. and Henrici, P.: A Continued Fraction Algorithm for the Computation of Higher Transcendental Functions in the Complex Plane, Math. Comp., Vol. 21, pp. 18-29 (1967).
- 6) 山内二郎, 宇野利雄, 一松 信: 電子計算機のための数値計算法Ⅲ, pp. 179-180, 培風館(1972).
(昭和55年10月20日受付)
(昭和55年12月18日採録)