3A-01

完全グラフのオイラー回路の性質の証明への計算機の活用

Application of computers to a proof of a property of Eulerian circuits of complete graphs

神保 秀司†
Shuji JIMBO

1 はじめに

オイラーグラフ G のオイラー回路で最短部分閉路長が k であるものが存在し，かつ，G のオイラー回路で最短部分閉路長が k より大きいものが存在しないとき，k を G のオイラー回帰長と呼び，$e(G)$ で表す．著者は，オイラー回帰長の定義が自然で基本的なものであると考え，主に理論的興味からオイラー回帰長についての研究を続けている．

完全 2 部グラフ $e(K_{2m,2n})$ については，$m=n$ のとき $4n-4$，かつ，$m>n$ のとき $4n$ が導かれ，問題は解決している [1]．一方，完全グラフ $K_n, n=2n'+1$ については，著者らにより，$n \leqq 13$ のとき $e(K_n)$ の真の値が計算機シミュレーションの結果として得られ，$n \geqq 15$ のとき $n-4 \leqq e(K_n) \leqq n-3$ が計算機を援用して証明されている [2]．以下，完全グラフ K_n のオイラー回帰長を $e(n)=e(K_n)$ と略記する．

本稿では，計算機の援用により証明された不等式 $e(n)<n-2$ について，より強い計算機の援用により従来よりも簡潔な証明を得ることを目標とする．

2 準備

本稿で扱うオイラーグラフ $G=(V,E)$ は，すべて正則 (すべての点の次数が等しい) グラフであるとする．オイラーグラフ $G=(V,E)$ の点数を n, 辺数を m とし，C に含まれる点の位置を，始点が 0，位置 i の点の次の点の位置が $i+1$，任意の整数 i と j について $i \equiv j \pmod m$ のとき i と j はC において同じ点の位置を表すとして定義する．さらに，C において位置 i にある点を $C(i)$ で表し，C において点 $v=C(i)$ が位置 i の次に出現する位置を $N_C(i)$ で表す．常に $i<N_C(i) \leqq i+m$ が成り立つものとする．次の補題が成り立つ [2].

† 岡山大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

補題 1 C はオイラーグラフ $G=(V,E)$ のオイラー回路であり，かつ，C が $n-2$ より小さい長さの部分閉路をもたないならば，C において同一点が並ぶ間隔は，$n-2$ 以上 $n+3$ 以下である．すなわち，C における任意の点の位置 i について $n-2 \leqq N_C(i)-i \leqq n+3$ が成り立つ．

G のオイラー回路 C において辺 $e=vw$ が負であるとは，e の 2 つの点 v と w の C における位置を i 及び $i+1$ とおいたとき

> 位置 $N_C^{-1}(i)$ と i の間に点 $C(i+1)$ が出現せず，かつ，位置 $i+2$ と $N_C(i)$ の間にも点 $C(i+1)$ が出現しない，

あるいは

> 位置 $N_C^{-1}(i+1)$ と $i-1$ の間に点 $C(i)$ が出現せず，かつ，位置 $i+1$ と $N_C(i+1)$ の間にも点 $C(i)$ が出現しない

ことであると定義する．このとき，位置 i を負の辺 e の開始位置と呼ぶ．また，G のオイラー回路 C において 4 つの点の位置の組 (h,i,j,k) が反転配置であるとは，同じ位置を表す 4 つの整数の組 (h',i',j',k') を $k'=N_C(h')$, $j'=N_C(i')$, 及び $h'<i'<j'<k'<h'+m$ が成り立つように選べることである．このとき，位置 h を反転配置 (h,i,j,k) の開始位置と呼ぶ．次の補題は容易に導かれる．

補題 2 オイラー回路における反転配置の個数は負の辺の本数よりも少なくない．

さらに次の補題が成り立つ [2].

補題 3 i がオイラーグラフ $G=(V,E)$ のオイラー回路 C における反転配置の開始位置であるならば，$N_C(i)-i=n+3$, $N_C(i+1)-(i+1)=n-2$, 及び $N_C(i+2)-(i+2)=n-1$ が成り立つ．

3　不等式 $e(n) < n-2$ の証明の改良

著者らによる従来の $e(n) < n-2$ の証明は，計算機の援用により得られる次の補題に基づいている [2].

補題 4　$X = (x(0), x(1), x(2), \ldots, x(9))$ と $Y = (y(0), y(1), y(2), \ldots, y(9))$ を 5 以下の非負整数を成分とする長さ 10 の列とする．$M(X,Y)$ で「$x(i) < x(i+1)$ かつ $y(i) < y(i+1)$」または「$x(i) > x(i+1)$ かつ $y(i) > y(i+1)$」を満たす 7 以下の正整数 i の個数を表し，$R(X,Y)$ で $y(i) = 5, y(i+1) = 0,$ かつ $y(i+2) = 1$ を満たす 7 以下の正整数 i の個数を表す．

このとき，X と Y が下の 4 つの条件 (a), (b), (c), 及び (d) をすべて満たすならば，

$$M(X,Y) \geqq 2 \tag{1}$$

及び

$$M(X,Y) \geqq R(X,Y) \tag{2}$$

がどちらも成り立つ．

(a) $i \neq j, 0 \leqq i \leqq 9, 0 \leqq j \leqq 9,$ 及び $i - x(i) = j - x(j)$ を満たす整数 i と j の組合せは存在しない．さらに，$i \neq j, 0 \leqq i \leqq 9, 0 \leqq j \leqq 9,$ 及び $i + y(i) = j + y(j)$ を満たす整数 i と j の組合せも存在しない．

(b) $0 \leqq i \leqq 8$ 及び $|(i - x(i)) - ((i+1) - x(i+1))| = |x(i+1) - x(i) - 1| = 1$ を満たす整数 i は存在しない．さらに，$0 \leqq i \leqq 8$ 及び $|(i + y(i)) - ((i+1) + y(i+1))| = |y(i) - y(i+1) - 1| = 1$ を満たす整数 i も存在しない．

(c) $i \neq j, 0 \leqq i \leqq 9, 0 \leqq j \leqq 9,$ 及び, $|(i - x(i)) - (j - x(j))| = |(i + y(i)) - (j + y(j))| = 1$ を満たす整数 i と j の組合せは存在しない．

(d) $0 \leqq i \leqq 4$ を満たす各整数 i について，$0 \leqq j \leqq 5$ 及び $x(i+j) = j$ を満たす整数 j が存在する．さらに，$0 \leqq i \leqq 4$ を満たす各整数 i について，$0 \leqq j \leqq 5$ 及び $y(i+j) = 5 - j$ を満たす整数 j が存在する．

従来の証明では，補題 4 により K_n のオイラー回路 C で $n-2$ より小さい長さの部分閉路をもたないものが存在すれば，関数 $f(i) = N_C(i) - i$ の値の列が $\ldots, n+3, n-2, n-1, n+3, n-2, n-1, \ldots$ という形の繰り返しになることを導き，このことから矛盾を導く議論が続く．しかしながら，もし式 (2) において不等号 $\geqq$ が $>$ であったとすれば，直ちに証明が完了した．

以下，補題 4 を改良し，それ以降の $e(n) < n-2$ を導くための議論を簡潔にすることを試みる．そのために整数列 X と Y の長さ l を 10 よりも大きくする方針をとる．この方針に伴ない，補題 4 の条件 (a), (b), (c), (d) の定義を変数 l に依存する形に変更する．さらに，$M_k(X,Y)$ で「$x(k+i) < x(k+i+1)$ かつ $y(k+i) < y(k+i+1)$」または「$x(k+i) > x(k+i+1)$ かつ $y(k+i) > y(k+i+1)$」を満たす 7 以下の正整数 i の個数を表し，$R_k(X,Y)$ で $y(k+i) = 5, y(k+i+1) = 0,$ かつ $y(k+i+2) = 1$ を満たす 7 以下の正整数 i の個数を表す．このとき次の予想が証明できれば，補題 2 及び 4 より直ちに K_n のオイラー回路 C が必ず $n-2$ より小さい長さの部分閉路をもつことが導かれる．

予想 1　整数 $l > 10$ が存在して，5 以下の非負整数を成分とする長さ l の列 X と Y が条件 (a), (b), (c), (d) をすべて満たすならば

$$M_0(X,Y) > R_0(X,Y), \quad M_1(X,Y) > R_1(X,Y),$$
$$\ldots, \quad M_{l-10}(X,Y) > R_{l-10}(X,Y)$$

のいずれかが成り立つ．

予想 1 における l は，一般的な PC を使って予想の成立を確認できる程度に小さいことを期待している．しかしながら，本稿執筆時点までに十分な検証ができなかった．講演では，その時点での予想 1 の解決の状況について報告する．

4　おわりに

完全グラフ K_n, $n \geqq 15$, のオイラー回帰長 $e(n)$ が $e(n) < n-2$ を満たすことの証明を計算機の援用により簡潔にする試みについて報告した．

今後 15 以上の奇数 n に対する $e(n)$ の値の確定も計算機の援用により達成できることを期待している．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 15K00018 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Shuji Jimbo. On the eulerian recurrent lengths of complete bipartite graphs and complete graphs. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 58, No. 1, p. 012019, 2014.

[2] 神保秀司, 丸岡章. 完全グラフのオイラー回帰長の上界と下界の改良. 情報処理学会研究報告. AL, アルゴリズム研究会報告, Vol. 2014, No. 3, pp. 1–7, 2014.