

## x が小さい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算†

吉田年雄<sup>††</sup> 二宮市三<sup>††</sup>

不完全ガンマ関数  $\Gamma(\nu, x)$  について、 $\nu \geq 0$  かつ正数  $x$  が小さい場合の新しい数値計算法を提案している。 $\Gamma(\nu, x)$  は、 $\Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) e^{-x} \left\{ e^x - x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1+\nu)} \right\}$  と表すことができる。この式の括弧内において、 $e^x$  を級数展開し、適当に項をまとめ、その項の桁落ちを生ずる部分を所要の精度を有する近似式で計算することにより、 $\Gamma(\nu, x)$  の値を精度良く、しかも能率的に求めている。たとえば、 $0 \leq \nu < 1$  では、 $\nu=0$  を中心とする展開として得られる  $\Gamma(\nu, x) = \Gamma(1+\nu) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\}$  により計算を行う。ただし、 $A_k(\nu, x)$  の式中には、そのまま式どおりに計算を行うと桁落ちを生ずる関数  $(1/k! - 1/\Gamma(k+1+\nu))/\nu$  を含むが、その値は、その関数の最良近似式により計算する。また、 $B_k(\nu, x)$  には、 $\phi(\nu, x) = (1-x^\nu)/\nu$  を含むが、そのまま計算すると桁落ちを生ずるときには、 $f(t) = (e^t - 1)/t$  なる関数の最良近似式により、 $\phi(\nu, x) = -f(\nu \ln x) \ln x$  として計算を行う。このようにすれば、 $\Gamma(\nu, x)$  の値を精度良く計算することができる。本方法は、Gautschi の方法(本方法より能率的であるが、 $x$  の適用範囲が狭い)と併用すると能率的である。

### 1. まえがき

本論文では、 $\nu \geq 0$  かつ正数  $x$  が小さい場合の不完全ガンマ関数  $\Gamma(\nu, x)$  の数値計算法を提案する。不完全ガンマ関数  $\Gamma(\nu, x)$  は、

$$\Gamma(\nu, x) = \int_x^{\infty} e^{-u} u^{\nu-1} du \quad (1)$$

で定義される<sup>1)</sup>。次式で与えられる  $\gamma(\nu, x)$

$$\begin{aligned} \gamma(\nu, x) &= \int_0^x e^{-u} u^{\nu-1} du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\nu-1} du - \int_x^{\infty} e^{-u} u^{\nu-1} du \\ &= \Gamma(\nu) - \Gamma(\nu, x) \end{aligned} \quad (2)$$

に対しては、級数展開<sup>2)</sup>

$$\gamma(\nu, x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(k+\nu)} \quad (3)$$

または

$$\begin{aligned} \gamma(\nu, x) &= \Gamma(\nu) x^\nu e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1+\nu)} \\ &= x^\nu e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k)} \end{aligned} \quad (4)$$

を用いれば、 $x$  が小さい場合には、比較的容易に計算できる。しかし、この級数展開により計算された  $\gamma(\nu, x)$  の値を用いて、 $\Gamma(\nu, x)$  を

$$\Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) - \gamma(\nu, x) \quad (5)$$

として求めることができるのは、 $\nu$  と  $x$  の限られた範囲でしかない。図1に、 $\Gamma(\nu)$  およびいろいろな  $x$  に対する  $\Gamma(\nu, x)$  の  $\nu$  依存性を示す。 $\Gamma(\nu)$  と  $\gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) - \Gamma(\nu, x)$  が同程度のときには桁落ちが生ずる。

桁落ちなしに、 $\Gamma(\nu, x)$  を求める計算法としては、従来、積分表示式を数値積分する方法がある。その一例は、

$$\Gamma(\nu, x) = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^{1-\nu}} dt \quad (6)$$

を用いるものである<sup>2)</sup>。この方法は、指数関数、ベキ関数を含む被積分関数を多数回計算するために、計算時間が多くかかるのが欠点である。

以下に、 $x$  が小さい場合の  $\Gamma(\nu, x)$  について、桁落ちがなく、能率的な計算法を提案する。また、Gautschi の方法<sup>3)</sup> との比較を行う。

### 2. 計算法

まず、本計算法の適用範囲を求めるための条件を与えておく。関数  $F_\nu(x)$  の値の計算法が、 $N$  回の加算

$$F_\nu = \sum_{k=0}^N a_k \quad (7)$$

によって表されるとする。入力および演算の有効桁数は一定であるとし、その相対精度を  $\varepsilon$  とする。参考文献4)と同様な考えに基づき、この場合には、標準の絶対誤差  $\delta$  を

$$\delta = 2\varepsilon \max \left\{ |F_\nu(x)|, \left| x \frac{dF_\nu(x)}{dx} \right| \right\} \quad (8)$$

† Computation of Incomplete Gamma Functions  $\Gamma(\nu, x)$  for Small Argument  $x$  by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学

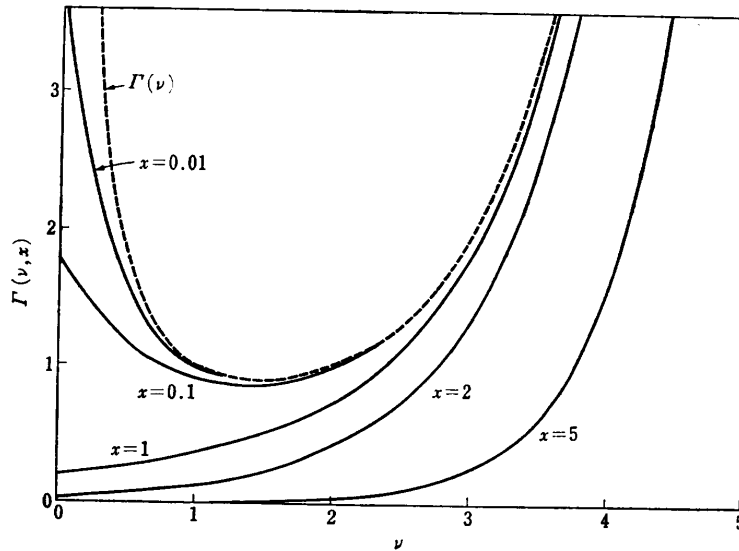


図1  $\Gamma(\nu)$  および  $\Gamma(\nu, x)$   
Fig. 1  $\Gamma(\nu)$  and  $\Gamma(\nu, x)$ .

と決め (文献 4) の式(2)において,  $r=2$  とした, この誤差以内で関数値  $F_\nu(x)$  が求められれば十分であると考え. 式(7)により,  $F_\nu(x)$  の値を求めるとき, その絶対誤差の絶対値の上限の近似値  $\delta_A$  は,

$$\delta_A = \varepsilon \max\{\max_k(|a_k|), \max_k(|s_k|)\} \quad (9)$$

と与えることができる. ここで,  $s_k$  は加算の中間結果

$$s_k = \sum_{j=0}^k a_j \quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

である ( $s_N$  は関数値  $F_\nu$  となっている). 本論文では,  $\delta_A < \delta$  すなわち

$$\max\{\max_k(|a_k|), \max_k(|s_k|)\} / \max\{|F_\nu(x)|, \left|x \frac{dF_\nu(x)}{dx}\right|\} < 2 \quad (11)$$

が満たされるならば, 「関数値が規準誤差以内で得られる」ということにする.

さて, 式(5)は, 式(4)の右辺第1式を用いて,

$$\Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu)e^{-x} \left\{ e^x - x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1+\nu)} \right\} \quad (12)$$

と表され,

$$\left. \begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \Gamma(\nu) &= \Gamma(1+\nu)/\nu \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, x) &= \Gamma(1+\nu)e^{-x} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{x^\nu}{\Gamma(k+1+\nu)} \right\}}{\nu} \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる. 上式は,  $\nu=0$  のとき, 不定形になる. このことからわかるように, 上式の分子の減算は,  $\nu \neq 0$  のとき, 式どおりに行くと桁落ちが生ずる. 本論文では, 適当に項をまとめ, 適当な工夫を行えば,  $\Gamma(\nu, x)$  の値を桁落ちなしで求めることができることを示す.

以下で用いる  $\phi(\nu, x)$  を次式にて定義しておく.

$$\phi(\nu, x) = \frac{1-x^\nu}{\nu} \quad (15)$$

### 2.1 $0 \leq \nu < 1$ における方法

$\nu \neq 0$  での桁落ちを取り除くために, 式(15)を用いて ( $x^\nu = 1 - \nu\phi(\nu, x)$ ), 式(14)を変形すると,

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, x) &= \Gamma(1+\nu)e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A_k^*(\nu) + B_k^*(\nu, x)}{\nu} \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる. ただし,

$$A_k^*(\nu) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)} \quad (17)$$

$$B_k^*(\nu, x) = \frac{\nu\phi(\nu, x)}{\Gamma(k+1+\nu)} \quad (18)$$

である。上式(16)においては、 $\nu=0$ での桁落ちは、 $A_k^*(\nu)$ の計算すなわち式(17)の右辺の減算、および、 $B_k^*(\nu, x)$ の右辺の $\phi(\nu, x)$ の計算すなわち式(15)の右辺の分子の減算のみに現れる。この $A_k^*(\nu)$ および $\phi(\nu, x)$ は、適当な工夫を行えば、桁落ちなしで計算することができる。 $\tilde{A}_k^*(\nu)$ については、式(17)の右辺の第2項を $\nu=0$ で展開し、定数項を取り除いたもの(この展開は $\nu$ の1次より始まっている)により計算すれば、桁落ちなしで求めることができる。また、 $\phi(\nu, x)$ についても、式(15)の分子の $x^\nu$ を $\nu=0$ で展開し、定数項を取り除いて計算すれば、桁落ちなしで求めることができる。このようにすれば、 $\nu=0$ のときの不定形から逃れることができ、 $\nu$ が零に近いがために生ずる桁落ちは取り除くことができる。

以上より、 $\Gamma(\nu, x)$ の計算式として、

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, x) &= \Gamma(1+\nu)e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\} \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。ただし、

$$A_k(\nu, x) = x^k \left\{ \frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \right\} \quad (20)$$

$$B_k(\nu, x) = x^k \frac{\phi(\nu, x)}{\Gamma(k+1+\nu)} \quad (21)$$

である。以下に、 $A_k(\nu, x)$ および $B_k(\nu, x)$ の具体的な計算法について述べる。

【 $A_k(\nu, x)$ の計算】式(20)の右辺の括弧{ }の部分

$$\tilde{A}_k(\nu) = \frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \quad (22)$$

と表す。 $\tilde{A}_k(\nu)$ に対して、漸化式

$$\tilde{A}_k(\nu) = \frac{1}{k+\nu} \left\{ \tilde{A}_{k-1}(\nu) + \frac{1}{k!} \right\} \quad (23)$$

が成り立つので、 $k \geq 2$ の $\tilde{A}_k(\nu) (> 0)$ は、 $\tilde{A}_1(\nu) (> 0)$ から安定に求めることができる。また、 $\tilde{A}_0(\nu) (\leq 0)$ は $\tilde{A}_1(\nu)$ から、

$$\tilde{A}_0(\nu) = (1+\nu)\tilde{A}_1(\nu) - 1 \quad (24)$$

として求められる。したがって、 $0 \leq \nu < 1$ において、 $\tilde{A}_1(\nu) \left( = \frac{1}{\nu} \left( 1 - \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} \right) \right)$ が所要の精度で計算できればよい。 $\tilde{A}_1(\nu)$ は、式(22)の右辺のとおり計算すると、 $\nu=0$ で桁落ちが生ずるが、ガンマ関数の逆数の級数展開<sup>5),6)</sup>

$$1/\Gamma(1+\nu) = \beta_0 + \beta_1\nu + \beta_2\nu^2 + \beta_3\nu^3 + \dots \quad (25)$$

を用い、定数部分を取り除いたもの

表1 式(27)の $p_k$   
Table 1  $p_k$  in Eq. (27).

$k$	$p_k$
0	0.422 784 336 7E+00
1	0.233 093 511 1E+00
2	-0.191 086 074 8E+00
3	0.245 098 804 5E-01
4	0.178 234 334 1E-01
5	-0.843 357 044 7E-02
6	0.134 387 694 9E-02
7	-0.353 914 907 3E-04

表2 式(27)の $p_k$   
Table 2  $p_k$  in Eq. (27).

$k$	$p_k$
0	0.422 784 335 098 467 139 43D+00
1	0.233 093 736 421 786 722 47D+00
2	-0.191 091 101 387 689 838 62D+00
3	0.245 524 900 053 429 621 02D-01
4	0.176 452 445 511 673 554 33D-01
5	-0.802 327 303 334 261 011 61D-02
6	0.804 329 854 217 922 897 35D-03
7	0.360 837 430 994 616 790 35D-03
8	-0.145 594 795 036 686 051 61D-03
9	0.175 424 316 846 902 053 17D-04
10	0.259 540 396 657 806 556 71D-05
11	-0.134 730 100 984 299 286 09D-05
12	0.214 246 677 779 958 305 82D-06
13	-0.602 331 647 415 476 926 19D-08
14	-0.335 478 073 803 990 143 96D-06
15	0.450 870 422 667 366 470 89D-09

$$\tilde{A}_1(\nu) = \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+1}\nu^k \right) / (1+\nu) \quad (26)$$

により計算を行えば、桁落ちなしで求めることができる。ここで、 $\beta_k (k=0, 1, 2, \dots)$ は定数であり、とくに $\beta_0=1, \beta_1=\gamma$ (オイラーの定数)である。しかし、能率の点では、 $\tilde{A}_1(\nu)$ の値は、最良近似式により計算することが好ましい。表1および表2には、それぞれ、単精度(8D)および倍精度(18D)用として、 $0 \leq \nu \leq 1$ における $\tilde{A}_1(\nu)$ の最良近似多項式

$$\tilde{A}_1(\nu) \doteq \sum_{k=0}^M p_k \nu^k \quad (27)$$

の係数が示されている。

【 $B_k(\nu, x)$ の計算】式(21)の $B_k(\nu, x)$ に注目しよう。式(15)で定義されている $\phi(\nu, x)$ を2進丸め程度の精度で求めようとするとき、その右辺のとおり計算できるのは、 $x^\nu < 1/2$ あるいは $x^\nu > 2$ のときだけである。 $1/2 \leq x^\nu \leq 2$ すなわち $-\ln 2 \leq \nu \ln x \leq \ln 2$ のときには桁落ちが生ずる。桁落ちなしに $\phi(\nu, x)$ を求めるには、関数

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots \quad (28)$$

が、 $-\ln 2 \leq t \leq \ln 2$  において、所要の精度で計算できればよい。なぜならば、 $-\ln 2 \leq \nu \ln x \leq \ln 2$  のときには、 $\phi(\nu, x)$  を

$$\phi(\nu, x) = -f(\nu \ln x) \ln x \quad (29)$$

として計算できるからである。 $f(t)$  を丸め誤差程度で計算するためには、式(28)の右辺第1式のとおりに行うのではなく、右辺第2式のように、 $e^t$  を級数展開し、桁落ちする部分を取り除いたものにより行えばよい。しかし、能率の点では、最良近似式により  $f(t)$  を計算することが好ましい。表3および表4には、それぞれ、単精度および倍精度用として、 $-\ln 2 \leq t \leq \ln 2$  における  $f(t)$  の最良近似式

$$f(t) \doteq \frac{2 \sum_{k=0}^M p_k t^{2k}}{\sum_{k=0}^N q_k t^{2k} - t \sum_{k=0}^M p_k t^{2k}} \quad (30)$$

の係数が示されている。

表3 式(30)の  $p_k$  および  $q_k$   
Table 3  $p_k$  and  $q_k$  in Eq. (30).

$k$	$p_k$
0	0.843 269 150 3E+03
1	0.200 543 658 0E+02

$k$	$q_k$
0	0.168 653 830 1E+04
1	0.180 653 588 0E+03
2	0.100 000 000 0E+01

表4 式(30)の  $p_k$  および  $q_k$   
Table 4  $p_k$  and  $q_k$  in Eq. (30).

$k$	$p_k$
0	0.154 620 377 352 271 561 05D+06
1	0.495 519 228 293 205 900 30D+04
2	0.270 151 761 657 348 082 06D+02
3	0.178 391 069 209 894 405 94D-01

$k$	$q_k$
0	0.309 240 754 704 543 122 10D+06
1	0.356 804 474 579 093 781 69D+05
2	0.450 394 684 619 392 147 65D+03
3	0.100 000 000 000 000 000 00D+01

【計算式 (19) の適用範囲】  $0 \leq \nu \leq 1$  において、 $A_0(\nu, x) \leq 0, A_k(\nu, x) > 0 (k \geq 1)$  であり、 $x \leq 1$  のとき、 $\phi(\nu, x) \geq 0$  したがって  $B_k(\nu, x) \geq 0, x > 1$  のとき、 $\phi(\nu, x) < 0$  したがって  $B_k(\nu, x) < 0$  である。 $x$  が十分に小さいときには、式(19)において、 $B_0(\nu, x)$  が支配的であるので、その加算で、桁落ちはない。ただし、 $x$  が大きくなると、 $B_0(\nu, x)$  とは符号が逆で、絶対値が  $B_0(\nu, x)$  と同程度、あるいは、それより大きくなる項が現れるので、その加算で、桁落ちが生ずるようになる。したがって、本方法は  $x$  が大きい場合には適用できない。本論文では、規準誤差以内で  $\Gamma(\nu, x)$  の値が得られれば十分と考え、規準誤差以内で得ることができる範囲を、本方法の適用範囲とする。 $\Gamma(\nu, x)$  が、 $\Gamma(\nu, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\Gamma(1+\nu)e^{-x}A_k(\nu, x) + \Gamma(1+\nu)e^{-x}B_k(\nu, x)\}$  なる和で表されるとして、その加算を式どおりの順 ( $A_0(\nu, x), B_0(\nu, x), A_1(\nu, x), B_1(\nu, x), \dots$  の順) に行った場合について、式(11)の条件を数値的に調べた。その結果として、図2の実線以下で  $\Gamma(\nu, x)$  の値を規準誤差以内で得ることがわかった (式(11)は加算の順序により異なる

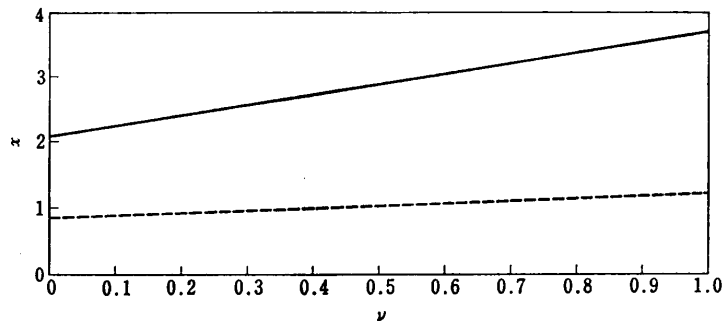


図2 式(19)の適用範囲 (実線以下) および式(31)の適用範囲 (点線以下)  
Fig. 2 Region (under solid line) where Eq. (19) is available and region (under dotted line) where Eq. (31) is available.

ってくるが、その加算を、正のものだけ、あるいは、負のものだけ集めて行わない限り、その結果に大差はない。

式(19)を構成している項は、 $k$ が大きくなるにつれて十分に小さくなるので、要求精度内に収束するまでにとる項は、それほど多くは必要としない。たとえば、 $x=1$  のとき、式(19)の  $k$  は、単精度では、13~14 まで、倍精度では、21~23 までとれば、その精度内に収束している。

**[Gautschi の方法および適用範囲]** 筆者は、本論文作成中に、本方法と類似のものとして、Gautschi の方法<sup>3)</sup>があることを知った。それは、式(5)の  $\Gamma(\nu, x)$  として、式(4)の展開のかわりに、式(3)の展開を用いたものであり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, x) &= \Gamma(\nu) - x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(k+\nu)} \\ &= \Gamma(\nu) - \frac{x^\nu}{\nu} - x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(k+\nu)} \\ &= \Gamma(\nu) - \frac{1}{\nu} + \phi(\nu, x) - x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(k+\nu)} \end{aligned} \quad (31)$$

上式において、 $\phi(\nu, x)$  は前述の方法により計算することができる。  $\Gamma(\nu) = \frac{1}{\nu}$  は、

$$\Gamma(\nu) - \frac{1}{\nu} = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\nu} \left\{ 1 - \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \right\} \quad (32)$$

と表されるので、これも前とほぼ同様な方法で計算することができる。Gautschi の方法は、このように計算を行うものであるが(ただし、最良近似式は使用していない)、関数  $\Gamma(\nu) - \frac{1}{\nu}$  についても、最良近似式により計算することにすれば、 $\Gamma(1+\nu)$  の計算が不要となる。上式(31)の方法は、式(19)の方法と比較して、 $e^{-x}$  の計算が不要であるという長所をもっている。しかし、式(31)の方法に対して、式(11)の条件を数値的に調べ、適用範囲を求めると、図2の点線以下であり、式(19)の方法と比べ、適用範囲が狭いという欠点をもっている。したがって、能率の観点から、領域により、両者の方法を使い分けることが好ましい。図2の点線を直線で近似して、

$$x = 0.35\nu + 0.85 \quad (33)$$

を境界として、その下では式(31)の方法、その上では式(19)の方法を用いるのがよいと考えられる。

筆者らは、関数  $\Gamma(\nu) - \frac{1}{\nu}$  に対して、最良近似式を

表5 式(34)の  $p_k$  および  $q_k$   
Table 5  $p_k$  and  $q_k$  in Eq. (34).

$k$	$p_k$
0	0.242 072 014 3E+03
1	0.962 906 401 3E+02

$k$	$q_k$
0	0.419 378 798 4E+03
1	0.466 044 173 6E+03
2	-0.275 963 483 7E+02
3	-0.666 469 913 4E+02
4	0.814 012 811 2E+01
5	0.100 000 000 0E+01

表6 式(34)の  $p_k$  および  $q_k$   
Table 6  $p_k$  and  $q_k$  in Eq. (34).

$k$	$p_k$
0	0.394 992 807 321 839 792 87D+04
1	0.196 403 952 633 589 667 17D+04
2	0.878 065 754 314 756 632 32D+01
3	-0.198 806 035 735 827 718 47D+02
4	0.197 624 978 781 707 741 27D+02
5	-0.484 752 600 972 830 888 01D+00
6	0.515 234 705 008 914 428 95D-01

$k$	$q_k$
0	0.684 307 151 278 060 966 53D+04
1	0.828 510 494 445 265 844 99D+04
2	0.506 390 180 367 710 127 87D+02
3	-0.134 975 600 978 593 977 74D+04
4	0.125 711 631 740 435 822 91D+03
5	0.674 546 640 890 755 679 12D+02
6	-0.156 185 000 552 927 964 47D+02
7	0.100 000 000 000 000 000 00D+01

新たに作成した。表5および表6には、それぞれ、単精度および倍精度用として、 $0 \leq \nu \leq 1$  における最良近似式

$$\Gamma(\nu) - \frac{1}{\nu} \doteq (\nu-1) \frac{\sum_{k=0}^M p_k \nu^k}{\sum_{k=0}^N q_k \nu^k} \quad (34)$$

の係数が示されている。

ここで述べた方法により、 $0 \leq \nu < 1$  における  $\Gamma(\nu, x)$  の値が求められれば、 $\nu \geq 1$  の  $\Gamma(\nu, x)$  は、次の漸化式

$$\Gamma(1+\nu, x) = x^\nu e^{-x} + \nu \Gamma(\nu, x) \quad (35)$$

により計算することができる。そのとき、規準誤差以内で求めることができる  $x$  の範囲すなわち適用範囲は、漸化式の右辺が正項の和であるので、図2に示したもののより、少し広がる。しかし、この適用範囲

は、2.2 節で述べる  $\nu \geq 1$  における方法の適用範囲と比べて、少し狭い。したがって、 $\nu \geq 1$  では、2.2 節の方法を用いるとよい。

2.2  $\nu \geq 1$  における方法

$\nu > 2$  の  $\Gamma(\nu, x)$  は漸化式(35)を用いれば得られるので、ここでは、 $1 \leq \nu \leq 2$  に限定することにする。 $\nu = 1 + \alpha$  と置く。したがって、 $0 \leq \alpha \leq 1$  である。式(15)より、

$$x^\nu = x^{1+\alpha} = x(1 - \alpha\phi(\alpha, x)) \tag{36}$$

が成り立つ。上式を用いれば、式(12)は、

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, x) &= \Gamma(1+\alpha)e^{-x} \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right. \\ &\quad \left. - (1 - \alpha\phi(\alpha, x)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(k+\alpha+2)} \right\} \tag{37} \end{aligned}$$

となり、これより、 $\Gamma(\nu, x)$  の計算式

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, x) &= \Gamma(1+\alpha)e^{-x} \left[ C_{-1}(\alpha, x) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \{C_k(\alpha, x) + D_k(\alpha, x)\} \right] \tag{38} \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$C_{-1}(\alpha, x) = 1 \tag{39}$$

$$\begin{aligned} C_k(\alpha, x) &= x^{k+1} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{\Gamma(k+2+\alpha)} \right) \right\} \\ (k \geq 0) \end{aligned} \tag{40}$$

$$D_k(\alpha, x) = x^{k+1} \frac{\phi(\alpha, x)}{\Gamma(k+2+\alpha)} \tag{41}$$

である。

**[ $C_k(\alpha, x)$  および  $D_k(\alpha, x)$  の計算]** 式(40)の右辺の括弧 { } の部分を  $\tilde{C}_k(\alpha)$  と表す。 $\tilde{C}_k(\alpha)$  に対して、漸化式

$$\tilde{C}_k(\alpha) = \frac{1}{k+1+\alpha} \left\{ \tilde{C}_{k-1}(\alpha) + \frac{1}{(k+1)!} \right\} \tag{42}$$

が成り立つので、 $k \geq 1$  の  $\tilde{C}_k(\alpha) (> 0)$  は、 $\tilde{C}_0(\alpha) (> 0)$  から求めることができる。したがって、 $0 \leq \alpha \leq 1$  において、 $\tilde{C}_0(\alpha)$  が所要の精度で計算できればよい。実は、この  $\tilde{C}_0(\alpha)$  は、2.1 節で述べた  $\tilde{A}_1(\nu)$  と同一の関数であるので、式(26)または式(27)により、その値を求めることができる。

$D_k(\alpha, x)$  の計算は、2.1 節と同様にして行うことができる。

**[計算式(38)の適用範囲]**  $x$  が十分に小さいときには、式(38)において、 $C_{-1}(\alpha, x)$  が支配的であるので、その加算では桁落ちはない。ただし、 $x$  が大きくなると、 $C_{-1}(\alpha, x)$  とは符号が逆で、絶対値が同程度、あるいは、それより大きくなる項が現れるので、その加算で、桁落ちが生ずるようになる。式(38)の加算を、式どおりの順 ( $C_{-1}(\alpha, x), C_0(\alpha, x), D_0(\alpha, x), C_1(\alpha, x), D_1(\alpha, x), \dots$  の順) に行った場合について、式(11)の条件を数値的に調べた。その結果として、図3の実線以下で、 $\Gamma(\nu, x)$  を規準誤差以内で得ることができることがわかった。なお、参考のために、この図には、式(38)を、 $0.5 \leq \nu \leq 1$  においても用いたとすれば、どの範囲で  $\Gamma(\nu, x)$  を規準誤差以内で得ることができるかを書き加えている。

式(38)の  $k$  は、 $x=1$  のとき、単精度では、11~12 まで、倍精度では、20 までとれば、その精度内に収束している。

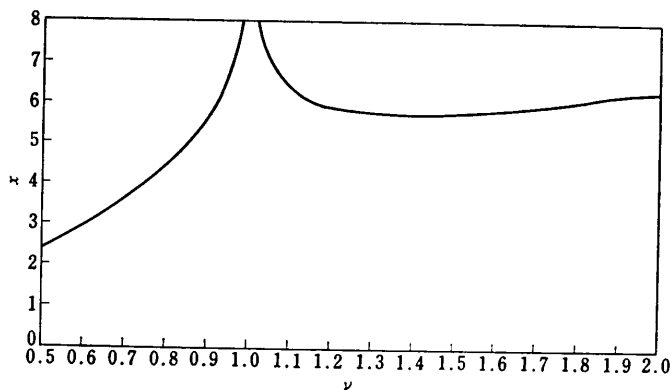


図3 式(38)の適用範囲 (実線以下)

Fig. 3 Region (under solid line) where Eq. (38) is available.

### 3. むすび

以上において、 $x$  が小さい場合の不完全ガンマ関数  $\Gamma(\nu, x)$  の計算法を述べた。本方法の適用範囲より大きい  $x$  に対しては、連分数展開、 $\tau$  法などを使って計算することになるであろう。ただし、それらは、 $x$  が小さければ小さいほど計算量を多く要するので、 $x$  が小さい場合の方法は、その適用範囲が広いことが好ましいと考えられる。本論文で提案した方法は、Gautschi の方法と比べて適用範囲が広いという特長をもっている。

なお、本論文で示した相対誤差規準に関する最良近似式は、Remes の算法により、名古屋大学大型計算機センター FACOM M-200 の4倍精度演算を用いて求めたものである。

**謝辞** おわりに、日頃ご討論いただく本学 鳥居達生助教授に感謝します。

### 参 考 文 献

- 1) 森口繁一, 宇田川銚久, 一松 信: 数学公式Ⅲ, 岩波全書, p.14, 岩波書店, 東京 (1968).
- 2) 山内二郎, 宇野利雄, 一松 信共編: 電子計算機のための数値計算法Ⅲ, pp.132-165, 培風館, 東京 (1972).
- 3) Gautschi, W.: A Computational Procedure for Incomplete Gamma Functions, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol.5, No.4, pp.466-481 (1979).
- 4) 吉田年雄, 二宮市三:  $x$  が小さい場合のベッセル関数  $Y_\nu(x)$  の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol.23, No.3, pp.296-303 (1982).
- 5) National Bureau of Standards: *Handbook of Mathematical Functions* (Appl. Math. Ser.55), p.256, U.S. Government Printing Office, Washington D.C. (1964).
- 6) Clenshaw, C. W.: Chebyshev Series for Mathematical Functions (*Mathematical Tables*, Vol.5), p.8, Her Majesty's Stationary Office, London (1962).

(昭和57年2月12日受付)

(昭和57年3月18日採録)