

マルコフ連鎖で表されるシステムモデルの定常分布の近似値を求める一方法†

角山正博** 内藤祥雄**

計算機システムや順序機械等の動作解析あるいは評価等を行う場合に、それらのシステムの動作をマルコフ連鎖をなすモデルとして表し、そのモデルにおける状態の定常分布を求める必要が生じる場合がある。この分布を求めるための計算量はモデルの状態数 n に対して $O(n^2)$ で増加するため、システムの規模が大きくなると計算時間が非常に長くなる。そこで本稿では、計算量が状態数 n に対して $O(n)$ になる一つの近似解法を提案する。この方法ではモデル中の各状態について、すべての状態からその状態に遷移する確率の和を使って n 状態モデルを 2 状態モデルに縮退させるという考え方を基本にしている。この解法の精度を確認するため、コンピュータを用いたシミュレーションを行った。その結果、モデル中の各状態について、すべての状態からその状態へ遷移する確率の和が 1 ± 0.3 以内である場合には、近似値の誤差は約 10% 以内であるという結論が得られた。

1. まえがき

計算機システムや順序機械等の動作解析あるいは評価等を行うとき、それらの内部における定常状態分布が必要となる場合が多い^{1)~3)}。一般的に、この分布はシステムや機械の動作をマルコフ連鎖をなすモデル(これをシステムモデルと呼ぶことにする)として表し、モデルの各状態の定常分布を求めることによって得られる。この定常分布を求める方法はすでにいくつか提案されているが⁴⁾、いずれの方法によっても、モデルの状態数を n とすると、少なくとも、 $O(n^2)$ の計算量が必要であるため、状態数の多い大規模なシステムや機械に対する定常分布を求めることは非常に困難な作業になる。そこで本稿では比較的簡単に定常分布の近似値を求める一方法として、モデル中の各状態について、すべての状態からその状態に遷移する確率の和(これを入遷移確率和とよぶ)を使う方法を提案する。なお、ここで得られた近似式を評価するため計算機によるシミュレーションを行った結果、モデル中の各状態に対する入遷移確率和が 1 ± 0.3 以内であれば、近似値の誤差はほぼ 10% 以内であるということが確認された。

2. 定常分布と状態の分割

2.1 定常分布

状態数が n であるマルコフ連鎖の初期状態確率ベクトルを $W^{(0)}$ 、 t 回遷移後の状態確率ベクトルを $W^{(t)}$ 、遷移確率行列を P とすると、 $W^{(t)}$ は次式で表される⁵⁾。

$$W^{(t)} = W^{(0)} P^t = W^{(0)} \left(\sum_{i=1}^n R_i \alpha_i \right)^t \quad (1)$$

ただし、 R_i ($i=1, 2, \dots, n$) は n 次正方行列、 α_i は遷移確率行列 P の固有値とする。

ここで $\alpha_1=1$ かつ $|\alpha_i| < 1$ ($i=2, 3, \dots, n$) である場合には、遷移回数 t を増加した極限における定常状態確率ベクトル $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ は

$$W = W^{(0)} R_1 \quad (2)$$

で表され、 R_1 を求めることによって定常分布が得られる。

また、定常状態確率ベクトル W について(3)式が成立するため、定常分布は n 次のマトリクスを解析することにより求めることもできる。

$$\begin{cases} W = W P \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases} \quad (3)$$

しかし、定常分布を求めるためには、上記のいずれの方法においても少なくとも $O(n^2)$ の計算量を必要とする。

本稿ではこれに対して、より少ない計算量で定常分布の近似値が得られる近似式を導くために、まず n 状態のマルコフ連鎖をなすモデルを 2 状態のマルコフ連

† A Method for Obtaining Approximate Steady Distribution of Markov Chains by MASAHITO TSUNOYAMA and SACHIO NAITO (Faculty of Engineering, Technological University of Nagaoka).

** 長岡技術科学大学工学部

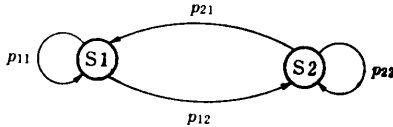


図1 2状態マルコフ連鎖
Fig. 1 2-states Markov chain.

鎖に縮退させた場合を考え、この2状態マルコフ連鎖の定常分布を求めることにする。なお本稿で導いた近似式を用いたときに要する計算量は $O(n)$ である。

図1に示す2状態マルコフ連鎖の定常分布は(3)式により次式で表される。

$$P_1 = p_{21} / (p_{12} + p_{21}) \quad (4)$$

$$P_2 = p_{12} / (p_{12} + p_{21}) \quad (5)$$

ただし、 P_1 および P_2 はおのおのの状態 S_1 および S_2 の極限確率、 p_{11} , p_{12} , p_{21} および p_{22} は図1に示す遷移確率とする。

さて、ここで状態数が n である強結合なシステムモデルについて考えよう。このとき n が偶数であるものとする*、図2に示すように等しい数の状態を含む2個のグループ、 G_1 および G_2 に状態を分割することができる。図2において G_1 を図1中の S_1 に、 G_2 を S_2 に対応させると、遷移確率 p_{11} , p_{12} , p_{21} , p_{22} はおのおのつぎようになる。

p_{11} : 現在の状態が G_1 に含まれており、1遷移後の状態も G_1 に含まれる確率

p_{12} : 現在の状態が G_1 に含まれており、1遷移後の状態は G_2 に含まれる確率

p_{21} : 現在の状態が G_2 に含まれており、1遷移後の状態は G_1 に含まれる確率

p_{22} : 現在の状態が G_2 に含まれており、1遷移後の状態も G_2 に含まれる確率

したがって、モデル中の各状態に対する入遷移確率和がほぼ1であるならば、(4)および(5)式に対応させて、状態が G_1 に属している確率および G_2 に属している確率はおのおのつぎのように近似することが

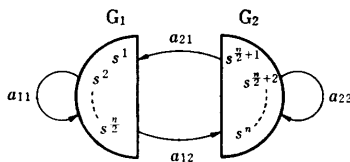


図2 状態の分割
Fig. 2 Partition of states.

* $n \gg 2$ であるようなモデルについては、このように考えても大きな誤差を生じることはない。

できる。ただし G_1 中のおのおのの状態から G_2 中のおのおのの状態へ遷移する確率の総和を a_{12} , G_2 中のおのおのの状態から G_1 中のおのおのの状態へ遷移する確率の総和を a_{21} とする。

$$P_1 = a_{21} / (a_{12} + a_{21}) \quad (4')$$

$$P_2 = a_{12} / (a_{12} + a_{21}) \quad (5')$$

2.2 状態分割と分割の和

本稿で述べる方法ではシステムモデルにおける各状態の極限確率を順次一つずつ求めていく。そこで、一般性を失うことなく、まず状態 s_i の極限確率を求めることを考え、このため状態の集合をつぎのように二つのグループ、 G_1 および G_2 に分割する。

(状態分割の方法)

- (1) 状態 s_i が常に G_1 の中に含まれる。
- (2) s_i を除いた残りの $(n-1)$ 個の状態から G_2 の要素として $n/2$ 個をとりだす。

この方法では全部で $\binom{n-1}{n/2}$ 通り (これを N と表す) の分割が考えられる。そこで、このような分割を行ったときの各分割における G_1 および G_2 をおのおの $G_{1(j)}$, $G_{2(j)}$ ($j=1, 2, \dots, N$) と表すことにする。

つぎに、これらの分割の和をつぎのように定義する。

(定義)

分割 P_i, P_j, \dots, P_l をおのおの

$$P_i = \{G_{1(i)}, G_{2(i)}\}, P_j = \{G_{1(j)}, G_{2(j)}\}, \dots$$

$$P_l = \{G_{1(l)}, G_{2(l)}\}$$

としたとき、

$\{(G_{1(i)}, G_{1(j)}, \dots, G_{1(l)}), (G_{2(i)}, G_{2(j)}, \dots, G_{2(l)})\}$ を分割 P_i, P_j, \dots, P_l の和とよび、 $P_i + P_j + \dots + P_l$ で表す。

また、 $(G_{1(i)}, G_{1(j)}, \dots, G_{1(l)})$ を第一要素、 $(G_{2(i)}, G_{2(j)}, \dots, G_{2(l)})$ を第二要素とよぶ。

ただし、同一の状態が $G_{a(i)}, G_{a(j)}, \dots, G_{a(i)}$ ($a=1, 2$) に現れるときはその状態は重複して $(G_{a(i)}, G_{a(j)}, \dots, G_{a(i)})$ に含まれるものとする。 (定義終)

たとえば、

$$P_1 = \{(s_1, s_3, s_5), (s_2, s_4, s_6)\}$$

$$P_2 = \{(s_1, s_3, s_4), (s_2, s_5, s_6)\}$$

であれば

$$P_1 + P_2 = \{(s_1, s_1, s_3, s_3, s_4, s_5),$$

$$(s_2, s_2, s_4, s_5, s_6, s_6)\}$$

となる。

この定義で得られる分割の和はもはや状態の分割ではない。しかし、この演算では交換律 $P_1 + P_2 = P_2 +$

P_1 および結合律 $P_1+(P_2+P_3)=(P_1+P_2)+P_3$ が成立することは明らかである。

さて、ここでつぎのような分割の和を考える。まず s_i を含むある k 種類の状態, $s^a, s^{a+1}, \dots, s^{a+k-2\star}$ を G_1 に含むすべての分割を考え、これらの分割の和の第一要素および第二要素をおのおの $G_{10(k)}$ および $G_{20(k)}$ とする。この $G_{10(k)}$ のなかに、これら k 種類の状態を除く残りの $(n-k)$ 種類のおのおのの状態が現れる回数 $N_{1(k)}$ はつぎの補題で与えられる。

(補題 1)

$$N_{1(k)} = \binom{n-k-1}{n/2} \quad (6)$$

(証明) 付録 1 参照。

また、この $(n-k)$ 種類のおのおのの状態が $G_{20(k)}$ 中に現れる回数 $N_{2(k)}$ も同様にしてつぎの補題を用いて得られる。

(補題 2)

$$N_{2(k)} = \binom{n-k-1}{n/2-1} \quad (7)$$

(証明) 付録 2 参照。

つぎに、 s_i を G_1 に含み、かつある k 種類の状態, $s^b, s^{b+1}, \dots, s^{b+k-1\star\star}$ を G_2 に含むすべての分割を考え、これらの分割の和の第一要素を $G_{10(k)'}$ とする。この $G_{10(k)'}$ のなかに、 $s_i, s^b, s^{b+1}, \dots, s^{b+k-1}$ の $k+1$ 種類の状態を除く $(n-k-1)$ 種類のおのおのの状態が現れる回数 $N_{1(k)'}$ はつぎの補題で与えられる。

(補題 3)

$$N_{1(k)'} = \binom{n-k-2}{n/2-2} \quad (8)$$

(証明) 付録 3 参照。

2.3 定常分布を求めるための近似式

さて、ここで前節で述べた、 G_1 に s_i を含む $\binom{n-1}{n/2}$ 個の分割すべてを考えよう。これらの分割の和の第一要素および第二要素は $G_{10(1)}, G_{20(1)}$ である。したがって、 $G_{10(1)}$ のなかの各状態の出現回数を n_{1i} で表すことにすると、 n_{1i} は補題 1 よりつぎのように得られる。

$$n_{1i} = \begin{cases} \binom{n-1}{n/2} & : s_i \text{ について} \\ \binom{n-2}{n/2} & : s_i \text{ 以外について} \end{cases} \quad (9)$$

同様に、 $G_{20(1)}$ のなかの各状態の出現回数を n_{2i} と

表すことにすると、これは補題 2 より

$$n_{2i} = \begin{cases} 0 & : s_i \text{ について} \\ \binom{n-2}{n/2-1} & : s_i \text{ 以外について} \end{cases} \quad (10)$$

と表せる。

つぎに、 G_1 中に状態 s_i とともに状態 s_j を含むすべての分割を考える。これらの分割の和の第二要素、すなわち $G_{20(2)}$ のなかの各状態の出現回数 n_{2i}' は補題 2 よりつぎのように求められる。

$$n_{2i}' = \begin{cases} 0 & : s_i, s_j \text{ について} \\ \binom{n-3}{n/2-1} & : s_i, s_j \text{ 以外について} \end{cases} \quad (11)$$

さらに、 G_1 は状態 s_i を含み、 G_2 は状態 s_k を含むすべての分割を考える。このときの分割の和の第一要素、すなわち $G_{10(1)'}$ 中の各状態の出現回数を n_{1i}' とすると、 n_{1i}' は次式で表される。

$$n_{1i}' = \begin{cases} \binom{n-2}{n/2-1} & : s_i \text{ について} \\ 0 & : s_k \text{ について} \\ \binom{n-3}{n/2-2} & : s_i, s_k \text{ 以外について} \end{cases} \quad (12)$$

以上の結果を用い、 $G_{10(1)}$ に含まれるおのおのの状態から $G_{20(1)}$ に含まれるおのおのの状態への遷移確率の総和、 S_{12} を求めてみよう。ある分割 P_i について、 $G_{10(1)}$ 中に含まれるおのおのの状態から $G_{20(1)}$ 中に含まれるおのおのの状態への遷移確率の総和を、 $a_{12(i)}$ とすると、

$$S_{12} = \sum_{i=1}^N a_{12(i)}$$

となり、これは(10)、(11)式よりつぎのように求められる。ただし、式中の r_{ij} は状態 s_i から s_j に遷移する確率を表す。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a_{12(i)} &= \binom{n-2}{n/2-1} \\ &\quad \cdot (r_{i1} + \dots + r_{i, i-1} + r_{i, i+1} + \dots + r_{in}) \\ &\quad + \binom{n-3}{n/2-1} \\ &\quad \cdot (r_{12} + \dots + r_{1, i-1} + r_{1, i+1} + \dots + r_{1n} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + r_{i-1, 1} + \dots + r_{i-1, i-2} + r_{i-1, i+1} + \dots + r_{i-1, n} \\ &\quad + r_{i+1, 1} + \dots + r_{i+1, i-1} + r_{i+1, i+2} + \dots + r_{i+1, n} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + r_{n1} + \dots + r_{n, i-1} + r_{n, i+1} + \dots + r_{nn-1}) \\ &= \binom{n-2}{n/2-1} \cdot (1 - r_{ii}) \end{aligned}$$

* $s^a, s^{a+1}, \dots, s^{a+k-2} \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\} - \{s_i\}$
 ** $s^b, s^{b+1}, \dots, s^{b+k-1} \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\} - \{s_i\}$

$$\begin{aligned}
 & + \binom{n-3}{n/2-1} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1-r_{ji}-r_{jj}) \\
 & = \binom{n-3}{n/2-1} \cdot (n+1-r_i-r) \quad (13)
 \end{aligned}$$

ただし $r = \sum_{j=1}^n r_{jj}$, $r_i = \sum_{j=1}^n r_{ji}$

同様に、 $G_{20(1)}$ に含まれるおのおのの状態から $G_{10(1)}$ に含まれるおのおのの状態への遷移確率の総和、 $S_{21} = \sum_{l=1}^N a_{21(l)}$ は (12) 式より次式で表せる。ただし、 $a_{21(l)}$ は分割 P_l の $G_{2(l)}$ 中に含まれるおのおのの状態から $G_{1(l)}$ 中に含まれるおのおのの状態への遷移確率の総和を表す。

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^N a_{21(l)} & = \binom{n-2}{n/2-1} \cdot (r_{1i} + \dots + r_{i-1i} + r_{i+1i} + \dots + r_{ni}) \\
 & + \binom{n-3}{n/2-2} \cdot (r_{12} + \dots + r_{i-1i-1} + r_{i+1i+1} + \dots + r_{1n} \\
 & + \dots \\
 & + r_{i-11} + \dots + r_{i-1i-2} + r_{i-1i+1} + \dots + r_{i-1n} \\
 & + r_{i+11} + \dots + r_{i+1i-1} + r_{i+1i+2} + \dots + r_{i+1n} \\
 & + \dots \\
 & + r_{n1} + \dots + r_{ni-1} + r_{ni+1} + \dots + r_{nn-1}) \\
 & = \binom{n-2}{n/2-1} \cdot (r_i - r_{ii}) \\
 & + \binom{n-3}{n/2-2} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1-r_{ji}-r_{jj}) \\
 & = \binom{n-3}{n/2-1} \cdot (n-1+r_i-r) \quad (14)
 \end{aligned}$$

状態 s_i を G_1 に含むすべての分割を考えたとき、 G_1 に含まれるおのおのの状態から G_2 に含まれるおのおのの状態へ遷移する確率と、 G_2 に含まれるおのおのの状態から G_1 に含まれるおのおのの状態へ遷移する確率の和の平均値 \bar{a} は、(13) および (14) 式よりつぎのように求められる。

$$\bar{a} = \sum_{l=1}^N (a_{12(l)} + a_{21(l)}) / N$$

$$= n \cdot (n-r) / (2 \cdot (n-1)) \quad (15)$$

状態 s_i の極限確率の近似値 p_i は以上の結果からつぎの定理で与えられる。

(定理)

$$\begin{aligned}
 p_i & = \frac{1}{n} \cdot \left(r_i \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \right) \\
 & + \frac{r}{n^2} \cdot \left((r_i-1) \cdot \frac{n-1}{n} - \frac{r}{n} \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

(証明) 付録 4 参照。

なお、 $n \gg 1$ かつ $r_i \gg 1/n$ である場合には、(16) 式はさらにつぎのように近似することができる。

(系)

$$p_i \approx \frac{r_i}{n} + \frac{r}{n^2} \cdot \left(r_i - 1 - \frac{r}{n} \right) \quad (17)$$

3. シミュレーションの結果について

本稿で得られた近似式の誤差を評価するため、24 状態を有するモデルをとりあげ、コンピュータによるシミュレーションを行った。ここでは、モデル中の各状態に対する入遷移確率和の変化が近似値の誤差に及ぼす影響を調べるため、入遷移確率和の標準偏差 (σ_T と表す) を変化した場合について定常分布を求め、近似式から得られた値と比較した。なお、状態 q_j から q_k への遷移確率 r_{jk} ($j, k=1, 2, \dots, n$) が正規分布 $N(1/n, \sigma^2)$ に従うように乱数を用いて割り当て、 σ_T はこれをもとにして算出した。定常分布の真の値は各モデルの遷移行列に対する固有値 1 の固有ベクトルを用いた。なお、シミュレーションは標準偏差の各値ごとに 10 種類、合計 70 種類のモデルについて実施した。この結果を表 1 に示す。

表 1 から明らかなように、ここで使用したモデルの r/n の値はいずれも約 0.04 である。このときの定常分布の近似値の誤差は、中心値が約 0 であり、誤差の標準偏差 (σ_E で表す) は各状態に対する入遷移確率和の標準偏差が減少するに従い減少している。このグラフを図 3 に示す。

図 3 より明らかなように、誤差の標準偏差は、各状態に対する入遷移確率和の標準偏差が約 0.45 のとき

表 1 定常分布の近似値の誤差

Table 1 Error of approximate steady distribution.

入遷移確率和の標準偏差 σ_T	0.19	0.20	0.22	0.25	0.29	0.35	0.5	0.7
r	1.04	1.09	1.10	1.08	0.96	0.99	0.93	0.75
近似値の誤差 [%]	-0.24	-0.25	-0.25	-0.21	-0.20	-0.09	-0.22	-0.05
近似値の誤差の標準偏差 σ_E [%]	2.7	3.2	3.1	4.1	5.7	7.0	11.8	17.8

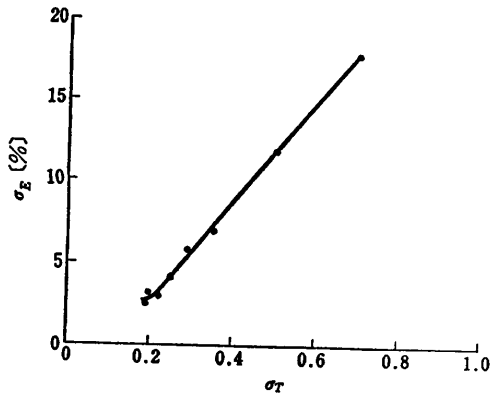


図 3 入遷移確率和の標準偏差に対する定常分布の近似値の誤差の標準偏差

Fig. 3 S. D. of error of approximate steady distribution vs. S. D. of transition probability.

に 10% であり、これが約 0.3 であるならば誤差が 10% 以内である確率は 90% であるといえる。

4. む す び

計算機システムや順序機械の動作をマルコフ連鎖をなすモデルで表し、その状態の定常分布を求めることは、状態の数が増加するに従い非常に困難な作業になる。本稿では、これを比較的簡単に求めるための近似式を導き、この式を評価するため、24 状態を有するモデルについてコンピュータによるシミュレーションを行った。その結果、モデル中の各状態について、すべての状態からその状態に遷移する確率の和が 1 ± 0.3 以内であれば、近似値の誤差は約 10% 以内であるという結論が得られた。今後、この近似式を使って計算機システムや順序機械の解析、故障検出等の検討を進めていく予定である。

謝辞 日頃熱心にご討論いただく本学増田・内藤研究室の諸氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Losq, J.: Efficiency of Random Compact Testing, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-27, No. 6, pp. 516-525 (1978).
- 2) 角山, 内藤: 遷移路ツアーの生成とその短縮化, 信学会電子計算機研資, EC 80-55, pp. 13-23 (1981).
- 3) 内藤, 角山: 遷移路ツアーによる順序回路の故障検出, 信学論 (D), Vol. J 63-D, No. 10, pp. 851-858 (1980).
- 4) McCalla, T.R.: *Numerical Methods and*

FORTRAN Programming, John Wiley & Sons, New York (1967).

5) 田中幸吉: 情報工学, 朝倉書店, 東京 (1977).

付 録

付 録 1

G_1 に k 種類の状態を含む分割に対する G_2 の選び方は、残りの $(n-k)$ 個の状態から G_2 の要素の数 $(n/2)$ を選ぶ組合せの数に等しいから $\binom{n-k}{n/2}$ 通りある。したがって、これら $\binom{n-k}{n/2}$ 個の分割の和の第 1 要素 $G_{1(1)} + G_{1(2)} + \dots + G_{1(n-k)} = G_{10(k)}$ に含まれる k 種の状態以外の状態の総数は $(n/2-k) \cdot \binom{n-k}{n/2}$ となる。また、 $G_{10(k)}$ は $\binom{n-k}{n/2}$ 通りのすべての分割の和で作られているため、これら $(n-k)$ 種類の状態はすべて等しい回数 $N_{1(k)}$ 回現われる。ゆえに、次式が成立する。

$$(n/2-k) \cdot \binom{n-k}{n/2} = N_{1(k)} \cdot (n-k) \quad (18)$$

$$\therefore N_{1(k)} = \binom{n-k-1}{n/2}$$

(証明終)

付 録 2

$G_{20(k)}$ を作るために用いた分割の数は $\binom{n-k}{n/2}$ 個であるから、 $G_{20(k)}$ に含まれる状態の総数は $(n/2) \cdot \binom{n-k}{n/2}$ である。また、全状態からあらかじめ着目した k 種類の状態を除いた残りの $(n-k)$ 種類の状態は、補題 1 の証明と同様 $G_{20(k)}$ 中にすべて等しい回数 $N_{2(k)}$ 回現われる。したがって、次式が成立する。

$$(n/2) \cdot \binom{n-k}{n/2} = N_{2(k)} \cdot (n-k) \quad (19)$$

$$\therefore N_{2(k)} = \binom{n-k-1}{n/2-1}$$

(証明終)

付 録 3

k 種類の状態を G_2 に含む分割の数は、 s_i が常に G_1 にあることを考慮すると $(n-k-1)$ 種類の状態から、 G_2 の残りの状態、すなわち $(n/2-k)$ 種類の状態を選ぶ組合せの数に等しい。よって、このような分割は $\binom{n-k-1}{n/2-k}$ 個ある。補題 1 の証明と同様に考えると、 G_1 は常に s_i を含んでいるため、 G_1 中の s_i を除いた $(n/2-1)$ 個の要素について次式が成立する。

$$(n/2-1) \cdot \binom{n-k-1}{n/2-k} = N_{1(k)'} \cdot (n-k-1) \quad (20)$$

$$\therefore N_{1(k)'} = \binom{n-k-2}{n/2-2}$$

(証明終)

付録 4

状態 s_m ($m=1, 2, \dots, n$) の極限確率の近似値を p_m とすると, 分割 $\{G_{1(i)}, G_{2(i)}\}$ によって作られる図 2 の 2 状態マルコフモデルにおける $G_{1(i)}$ の極限確率の近似値 $P_{1(i)}$ は次式で表される.

$$P_{1(i)} = p_\alpha + p_\beta + \dots + p_i + \dots + p_j \quad (21)$$

ただし $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$

$l=1$ から N までの $P_{1(i)}$ の和は(9)式より

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N P_{1(i)} &= \binom{n-1}{n/2} \cdot p_i + \binom{n-2}{n/2} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j \\ &= \binom{n-2}{n/2} \cdot \left\{ \frac{n}{n-2} \cdot p_i + 1 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

となる.

また, これは(4')式より

$$\sum_{l=1}^N P_{1(i)} = \sum_{l=1}^N a_{21(i)} / (a_{12(i)} + a_{21(i)}) \quad (23)$$

で表される.

ここで, 状態 s_i から s_k への遷移確率 r_{jk} ($j, k=1, 2, \dots, n$) が正規分布 $N(1/n, \sigma^2)$ をなすものとする*、正規分布は再生性を有することから $a_{21(i)} + a_{12(i)}$ は正規分布 $N(n/2, (n\sigma)^2/2)$ に従う. したがって, 分

散 σ^2 が $\sigma^2 \leq (1/20)^2$ である場合には, $a_{21(i)} + a_{12(i)}$ と(15)式で与えられる \bar{a} の誤差が 10% 以内であるということを 90% 以上の正確さでいうことができ, (23)式はさらにつぎのように近似することができる.

$$\sum_{l=1}^N P_{1(i)} \approx \sum_{l=1}^N a_{21(i)} / \bar{a} \quad (23')$$

よって, (13), (15)および(22)式から

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{n-1}{n} \left[\frac{1}{1-r/n} \{ (n-1) + r_i - r \} \right] - \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-r/n} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} r_i - \frac{r}{n} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

となる. ここで $1/(1-r/n) \approx (1+r/n)$ (ただし, $r/n \ll 1$) とすると,

$$\begin{aligned} p_i &\approx \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot r_i - \frac{r}{n} \right\} \left(1 + \frac{r}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ r_i \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \right\} + \frac{r}{n^2} \left\{ (r_i - 1) \cdot \frac{n-1}{n} - \frac{r}{n} \right\} \end{aligned}$$

となる.

(証明終)

(昭和 56 年 11 月 24 日受付)

(昭和 57 年 3 月 18 日採録)

* ここでは, 状態数が n で, かつ, 遷移確率 r_{jk} が正規分布 $N(1/n, \sigma^2)$ に従うモデルを考えるものとする. なお, 遷移確率 r_{jk} が正規分布に従わないようなモデルであっても, r_{jk} が同一分布をなし, かつ, n が大である場合には中心極限定理が成立することから, $a_{21(i)} + a_{12(i)}$ は正規分布に従うものと考えることができる. ちなみに, 遷移確率 r_{jk} が一様分布 $U(0, 2/n)$ をなすモデルでは, $a_{21(i)} + a_{12(i)}$ が正規分布 $N(n/2, 1/6)$ にほぼ従うことから, $n \geq 20$ である場合には上記の近似が成立するものと考えられる.