

複合多項式の計算法†

秦野和郎†† 秦野甯世††† 二宮市三††††

本論文では主として $f_{\nu, n}(x) = -\sum_{j=n}^{\infty} \binom{n}{j}^{\nu} \cos\left(jx - \frac{\pi\nu}{2}\right)$ なる関数の計算法を述べている。ここで ν, n は自然数で、 $x \in [0, 2\pi]$ である。この関数は次の特徴をもっている。(i) $f_{\nu, n}(x)$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ において $1/2, \cos jx, \sin jx: 1 \leq j \leq n-1$ と直交する。(ii) $-f_{\nu, n}^{(\nu-1)}(0+) = f_{\nu, n}^{(\nu-1)}(2\pi-) = \pi n/2, f_{\nu, n}^{(i)}(0+) = f_{\nu, n}^{(i)}(2\pi-): i=0, 1, \dots, \nu-2, \nu, \dots$ である。すなわち $f_{\nu, n}(x)$ は $\cos jx$ または $\sin jx$ の線形結合であるにかかわらず両端における関数値または微係数の値が異なる。十分に滑らかな関数を、この関数と三角多項式の線形結合を使って近似すると Gibbs の現象を生じない近似を得ることができる。

1. まえがき

よく知られるように関数列 $\{1/2, \cos jx, \sin jx | 1 \leq j\}$ は線形空間 $L^2[0, 2\pi]^*$ における完備直交系である。しかしその部分集合である三角多項式系 $\{1/2, \cos jx, \sin jx | 1 \leq j \leq n-1\}$ は直交系ではあるが完備系ではありえない。したがってそれらが張る線形空間 $S_n[0, 2\pi] = \text{span}\{1/2, \cos jx, \sin jx | 1 \leq j \leq n-1\}$ の任意の要素と直交するような関数列が存在する。

$S_n[0, 2\pi]$ の任意の要素 $t_n(x)$ は常に

$$t_n^{(i)}(2\pi) = t_n^{(i)}(0): i \geq 0$$

を満足する。このことが三角多項式系の有用性を大きく損ねている。しかし三角多項式系に、そのすべての要素と直交し、しかも

$$\mu_i^{(i-1)}(0+) \neq \mu_i^{(i-1)}(2\pi-): 1 \leq i \leq m$$

であるような関数列を少数個追加すれば得られる関数系は有用なものとなるはずである**。

本論文では上のような関数系、すなわち複合多項式系⁵⁾の要素を計算するための手順を述べる。さらに一例として与えられた関数を複合多項式系の張る線形空間のある要素で近似したときの誤差を示す。

2. 複合多項式とその表現

複合多項式は、 $D \equiv d/dx$ として

$$\begin{cases} \text{閉区間 } (0, 2\pi) \text{ において} \\ D^{n+1} \prod_{j=1}^{n-1} (D^2 + j^2) h(x) = 0 \\ h(0) = h(2\pi) = \{h(0+) + h(2\pi-)\}/2 \end{cases} \quad (2.1)$$

をみたす実関数 $h(x)$ の全体として定義される⁵⁾。

複合多項式の表現として文献5)では4種の表現を呈示している。ここではそのうちの三つについて考察する。

基本的な表現として複合多項式の p -表現は閉区間 $[0, 2\pi]$ において次の形で与えられる⁵⁾。

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) + \sum_{\nu=1}^m c_{\nu} p_{\nu}(x) \quad (2.2)$$

ここで

$$\begin{cases} p_1(x) = \begin{cases} (x-\pi)/2: & x \in (0, 2\pi) \\ 0 & : x = 0, 2\pi \end{cases} \\ p_{\nu}(x) = \frac{(2\pi)^{\nu}}{2 \cdot \nu!} B_{\nu}\left(\frac{x}{2\pi}\right): \nu \geq 2 \end{cases} \quad (2.3)$$

であり、 $B_{\nu}(x)$ は

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}(x) \frac{t^{\nu}}{\nu!}: |t| < 2\pi \quad (2.4)$$

で定義される ν 次の Bernoulli 多項式である⁴⁾。

$p_{\nu}(x)$ は Bernoulli 多項式の Fourier 展開*から

$$p_{\nu}(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\nu}} \cos\left(jx - \frac{\pi\nu}{2}\right) \quad (2.5)$$

と展開される。この展開式から最初の $n-1$ 項を取り去って

* 文献4), p. 805, 23.1.16

† On Calculating with Composite Polynomials by KAZUO HATANO (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Fukui University), YASUYO HATANO (Nagoya University Computation Center) and ICHIZO NINOMIYA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 福井大学工学部情報工学科 (現在、愛知工業大学電子工学科)

††† 名古屋大学大型計算機センター

†††† 名古屋大学工学部情報工学科

* 閉区間 $[0, 2\pi]$ において自乗可積分であるような関数の全体。

** 追加されるべき関数列は $S_n[0, 2\pi] = \text{span}\{\cos jx, \sin jx | n \leq j\}$ の要素でなければならない。したがって $\mu_i^{(i-1)}(0) \neq \mu_i^{(i-1)}(2\pi)$ であるような $\mu_i(x)$ は存在しない。

$$\begin{aligned} \bar{q}_\nu(x; n) &= - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^\nu} \cos\left(jx - \frac{\pi\nu}{2}\right) \\ &= p_\nu(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^\nu} \cos\left(jx - \frac{\pi\nu}{2}\right) \quad (2.6) \end{aligned}$$

を定義すると $\bar{q}_\nu(x; n)$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ において, $1/2, \cos jx, \sin jx: 1 \leq j \leq n-1$ と直交する. この関数の最大絶対値は一般に小さいので扱いやすい大きさになるように定数倍した関数 $q_\nu(x; n)$ を

$$q_\nu(x; n) = n^\nu \bar{q}_\nu(x; n) \quad (2.7)$$

と定義する. これを使って複合多項式の q -表現は

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^m c_\nu(n) q_\nu(x; n) \quad (2.8) \end{aligned}$$

と表現される⁵⁾.

さらに $q_\nu(x; n)$ を直交化させて, すなわち

$$\begin{cases} \lambda_{2i}(x; n) = \sum_{j=1}^i \alpha_{2i, 2j}(n) q_{2j}(x; n) \\ \lambda_{2i+1}(x; n) = \sum_{j=0}^i \alpha_{2i+1, 2j+1}(n) q_{2j+1}(x; n) \end{cases} \quad (2.9)$$

とおき

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_i(x; n) \lambda_j(x; n) dx = \begin{cases} 1: i=j \\ 0: i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

$$: 1 \leq i, j \leq m$$

をみたとすように定数 $\alpha_{i,j}(n)$ をきめれば複合多項式の直交系を構成することができる.

複合多項式の λ -表現は

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^m \hat{c}_\nu(n) \lambda_\nu(x; n) \quad (2.11) \end{aligned}$$

で与えられる.

いずれの表現においても三角多項式の部分は容易に計算できるので, 以下では $p_\nu(x), q_\nu(x; n), \lambda_\nu(x; n)$ の計算法を述べることにする.

3. $p_\nu(x)$ の計算法

$p_\nu(x)$ は Bernoulli 多項式の定数倍であることと, たとえば文献 4), p. 809 に 15 次までの Bernoulli 多項式の具体的な形が与えられていることから計算上, とくに問題になることはない. しかし $p_\nu(x)$ を計算するにはその係数をあらかじめ与えておかなければならないので次の形にしておくほうがより扱いやすい.

$$p_\nu(\pi(x+1)) = \frac{(2\pi)^\nu}{2 \cdot \nu!} B_\nu\left(\frac{x+1}{2}\right): x \in (-1, 1) \quad (3.1)$$

において

$$\begin{cases} B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x), & B_\nu'(x) = \nu B_{\nu-1}(x) \\ B_\nu(1/2) = (2^{1-\nu} - 1) B_\nu(0) \end{cases} \quad (3.2)$$

および,

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu-1} \frac{(2\pi)^\nu}{2 \cdot \nu!} B_{2\nu}(0) &= \zeta(2\nu) \\ &= \begin{cases} -1/2: \nu=0 \\ \sum_{j=1}^{\infty} (1/j^{2\nu}): \nu \geq 1 \end{cases} \quad (3.3) \end{aligned}$$

を⁴⁾使うと*,

$$\begin{cases} p_{2\nu}(\pi(x+1)) = (-1)^{\nu-1} \sum_{r=0}^{\nu} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r)!} \\ \quad \times \left(\frac{2}{4^{\nu-r}} - 1\right) \zeta(2\nu - 2r) x^{2r} \\ p_{2\nu+1}(\pi(x+1)) = (-1)^{\nu-1} \sum_{r=0}^{\nu} \frac{(-1)^r \pi^{2r+1}}{(2r+1)!} \\ \quad \times \left(\frac{2}{4^{\nu-r}} - 1\right) \zeta(2\nu - 2r) x^{2r+1} \end{cases} \quad (3.4)$$

を容易に得ることができる.

4. $q_\nu(x; n)$ の計算法

本章では式 (2.6), (2.7) で与えられる $q_\nu(x; n)$ の計算法を示す.

$q_\nu(x; n)$ は多項式と三角多項式の和であるから原理的には容易に計算できる. 実際, $\nu=1, 2$ 程度ならば式 (2.6) を直接計算しても十分である. しかし ν が大きくなると式 (2.6) では桁落ちが激しくなって満足すべき結果を得られない.

ここでは $q_\nu(x; n)$ の定義域 $(0, 2\pi)^{**}$ を n 等分して各部分区間における関数値を安定に計算できる手法を示す. この際, 式 (2.6) から

$$q_\nu(2\pi - x; n) = (-1)^\nu q_\nu(x; n) \quad (4.1)$$

であるから $x \in (0, \pi]$ に対して評価できればよい.

$q_\nu(x; n)$ の定義域 $(0, 2\pi)$ を n 等分し, 各部分区間 $(2\pi k/n, 2\pi(k+1)/n): k=0, 1, \dots, [(n-1)/2]^{**}$ において

$$Q_\nu(t; n, k) = q_\nu((t+2\pi k)/n; n): t \in (0, 2\pi)$$

* $\zeta(2\nu)$ の値はたとえば, 文献 4), p. 811 に $2\nu \leq 42$ について 21 桁, 文献 1), p. 378 に $2\nu \leq 150$ について 46 桁の表が与えられている. あるいは後章で述べる方法で計算してもよい.

** $q_1(0; n) = q_1(2\pi; n) = 0, -q_1(0+; n) = q_1(2\pi-; n) = \pi n/2$ であることに注意すれば定義域は $[0, 2\pi]$ としてよい.

*** $[x]$ は Gauss の記号で x を越えない最大の整数.

(4.2)

を複合多項式近似の p -表現⁵⁾ により近似する。すなわち、 $Q_r(t; n, k)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{j=1}^{N-1} \{ \bar{a}_j(f) \cos jx + \bar{b}_j(f) \sin jx \} + \sum_{i=1}^{2M} \bar{c}_i(f) p_i(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(2M+1)}(t) \{ \bar{q}_{2M+1}(x; n) - \bar{q}_{2M+1}(x-t; N) \} dt \quad (4.3)$$

の最初の 3 項により近似する (最後の項は誤差になる)。ここで

$$\begin{cases} a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ \bar{a}_j(f) = \frac{(-1)^M}{\pi j^{2M}} \int_0^{2\pi} f^{(2M)}(x) \cos jx dx \\ \bar{b}_j(f) = \frac{(-1)^M}{\pi j^{2M}} \int_0^{2\pi} f^{(2M)}(x) \sin jx dx \\ \bar{c}_i(f) = \{ f^{(i-1)}(2\pi-) - f^{(i-1)}(0+) \} / \pi \end{cases} \quad (4.4)$$

である⁵⁾。

さて、式(2.6), (2.7)から

$$q_r^{(l)}(x; n) = n^l q_{r-l}(x; n) \quad (4.5)$$

である。したがって、 $l \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} Q_r^{(l)}(t; n, k) &= \frac{d^l}{dt^l} Q_r(t; n, k) \\ &= q_{r-l} \left(\frac{t+2\pi k}{n}; n \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。また、 C を積分定数として

$$\int Q_r(t; n, k) dt = q_{r+1} \left(\frac{t+2\pi k}{n}; n \right) + C \quad (4.7)$$

である。これらを使って $Q_r(t; n, k)$ を式(4.3)の形に展開したときの係数、式(4.4)を計算しやすい形にする。まず、

$$\begin{cases} a_0(Q_r^{(l)}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q_r^{(l)}(t; n, k) dt \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ q_{r+1} \left(\frac{2\pi(k+1)}{n}; n \right) - q_{r+1} \left(\frac{2\pi k}{n}; n \right) \right\} \\ \bar{c}_i(Q_r^{(l)}) = \{ Q_r^{(l-1)}(2\pi-; n, k) - Q_r^{(l-1)}(0+; n, k) \} / \pi \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ q_{r+i+1} \left(\frac{2\pi(k+1)}{n}; n \right) - q_{r+i+1} \left(\frac{2\pi k}{n}; n \right) \right\} \end{cases} \quad (4.8)$$

である。したがってこれらの量を計算するためには

$$d_\xi = q_\xi \left(\frac{2\pi(k+1)}{n}; n \right) - q_\xi \left(\frac{2\pi k}{n}; n \right) \quad (4.9)$$

を計算できればよい。

(i) $\xi \geq 2$ のとき、式(2.6), (2.7)から

$$q_\xi(x; n) = - \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{n}{j} \right)^\xi \cos \left(jx - \frac{\pi\xi}{2} \right) \quad (4.10)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} q_\xi \left(\frac{2\pi k}{n}; n \right) &= - \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{n}{rn+s} \right)^\xi \cos \left\{ \frac{2\pi k(rn+s)}{n} - \frac{\pi\xi}{2} \right\} \\ &= - \sum_{s=0}^{n-1} \zeta \left(\xi; 1 + \frac{s}{n} \right) \cos \left\{ \frac{2\pi ks}{n} - \frac{\pi\xi}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。ここで

$$\zeta(\xi; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+x)^\xi} \quad (4.12)$$

は一般化された Riemann の Zeta 関数³⁾ である*。

$$\begin{aligned} \text{cod}(\xi, n; k, s) &= \cos \left\{ \frac{2\pi(k+1)s}{n} - \frac{\pi\xi}{2} \right\} - \cos \left\{ \frac{2\pi ks}{n} - \frac{\pi\xi}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

とおくと

$$d_\xi = - \sum_{s=1}^{n-1} \zeta \left(\xi; 1 + \frac{s}{n} \right) \text{cod}(\xi, n; k, s) \quad (4.14)$$

を得ることができる。

(ii) $\xi=1$ のとき

$$q_1(x; n) = n \left\{ \frac{x-\pi}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cos \left(jx - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (4.15)$$

より

$$d_1 = \pi + \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{n}{s} \right) \text{cod}(1, n; k, s) \quad (4.16)$$

を得る。

(iii) $\xi=0$ のとき

$$q_0(x; n) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \cos jx \quad (4.17)$$

より、

$$d_0 = \sum_{s=1}^{n-1} \text{cod}(0, n; k, s) \quad (4.18)$$

を得る。

(iv) $\xi < 0$ のとき、式(2.6)において $p_\xi(x) = 0$ であることから

$$q_\xi(x; n) = n^\xi \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^\xi} \cos \left(jx - \frac{\pi\xi}{2} \right) \quad (4.19)$$

* 後章にてその計算法を述べる。

である。したがって、

$$d_t = \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{n}{s}\right)^k \text{cod}(\xi, n; k, s) \quad (4.20)$$

を得る。

以上から式(4.8)で与えられる $a_0(Q_{\nu}^k)$, $c_i(Q_{\nu}^k)$ を計算することができる。

次に $\nu < 2M$ とすると

$$\begin{aligned} Q_{\nu}^{(2M)}(t; n, k) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{n}{j}\right)^{\nu-2M} \cos\left\{\frac{j(t+2\pi k)}{n} - \frac{\pi(\nu-2M)}{2}\right\} \\ &= (-1)^M \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^{2M-\nu} \cos\left\{\frac{j(t+2\pi k)}{n} - \frac{\pi\nu}{2}\right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

である。したがって

$$\begin{cases} \bar{a}_j(Q_{\nu}^k) = \frac{(-1)^M}{\pi j^{2M}} \int_0^{2\pi} Q_{\nu}^{(2M)}(t; n, k) \cos jtdt \\ \quad = \frac{1}{\pi j^{2M}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{n}\right)^{2M-\nu} \\ \quad \times \int_0^{2\pi} \cos\left\{\frac{s(t+2\pi k)}{n} - \frac{\pi\nu}{2}\right\} \cos jtdt \\ \bar{b}_j(Q_{\nu}^k) = \frac{(-1)^M}{\pi j^{2M}} \int_0^{2\pi} Q_{\nu}^{(2M)}(t; n, k) \sin jtdt \\ \quad = \frac{1}{\pi j^{2M}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{n}\right)^{2M-\nu} \\ \quad \times \int_0^{2\pi} \cos\left\{\frac{s(t+2\pi k)}{n} - \frac{\pi\nu}{2}\right\} \sin jtdt \end{cases} \quad (4.22)$$

を得るが

$$\begin{aligned} \text{sid}(\nu, n; k, s) &= \sin\left\{\frac{2\pi(k+1)s}{n} - \frac{\pi\nu}{2}\right\} - \sin\left\{\frac{2\pi ks}{n} - \frac{\pi\nu}{2}\right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

とおくと、

$$\begin{cases} \bar{a}_j(Q_{\nu}^k) = \frac{1}{\pi j^{2M}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{n}\right)^{2M-\nu} \\ \quad \times \frac{(-s/n)}{j^2 - (s/n)^2} \text{sid}(\nu, n; k, s) \\ \bar{b}_j(Q_{\nu}^k) = \frac{1}{\pi j^{2M}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{n}\right)^{2M-\nu} \\ \quad \times \frac{(-j)}{j^2 - (s/n)^2} \text{cod}(\nu, n; k, s) \end{cases} \quad (4.24)$$

となる。

次に式(4.3)右辺の最後の項の上界を導く。

$$\begin{aligned} E_{\nu}(2M, N) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q_{\nu}^{(2M+1)}(y; n, k) \{ \bar{q}_{2M+1}(t; N) \\ &\quad - \bar{q}_{2M+1}(t-y; N) \} dy \end{aligned} \quad (4.25)$$

において、式(4.6), (2.6)を使うと上式は

$$\begin{aligned} E_{\nu}(2M, N) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^{2M+1-\nu} \sum_{r=N}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{2M+1} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \sin\left\{\frac{j(y+2\pi k)}{n} - \frac{\pi\nu}{2}\right\} \{ \sin rt \\ &\quad - \sin r(t-y) \} dy \end{aligned} \quad (4.26)$$

と書き改められる。上式において積分の部分の絶対値は 4π を越えないこと、 $j/n < 1$, $2M+1-\nu > 0$ であることを使うと、

$$|E_{\nu}(2M, N)| < 4n \zeta(2M+1; N) \doteq \frac{2n}{M} \left(\frac{1}{N}\right)^{2M} \quad (4.27)$$

を得ることができる。

以上から式(4.8), (4.24)で与えられる係数を使って $q_{\nu}((t+2\pi k)/n; n) : t \in (0, 2\pi); k=0, 1, \dots, [(n-1)/2]$ は

$$\begin{aligned} Q_{\nu}(t; n, k) &= \frac{1}{2} a_0(Q_{\nu}^k) + \sum_{j=1}^{N-1} \{ \bar{a}_j(Q_{\nu}^k) \cos jt \\ &\quad + \bar{b}_j(Q_{\nu}^k) \sin jt \} + \sum_{i=1}^{2M} c_i(Q_{\nu}^k) p_i(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

と近似され、その絶対誤差は $(2n/M) \cdot N^{-2M}$ 程度であることがわかった。

図 1 (a), 図 1 (b) に $q_{\nu}(x; n)$ の概形を $n=32$;

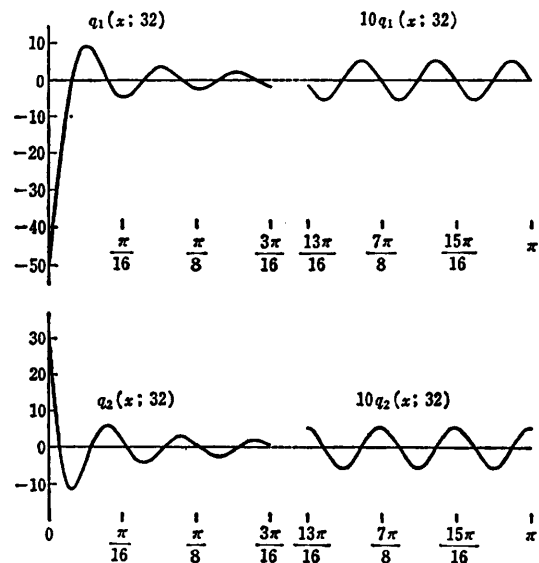


図 1 (a) $q_{\nu}(x; n) : n=32; \nu=1, 2$ の概形
Fig. 1 (a) The profile of $q_{\nu}(x; n)$ for $n=32; \nu=1, 2$.

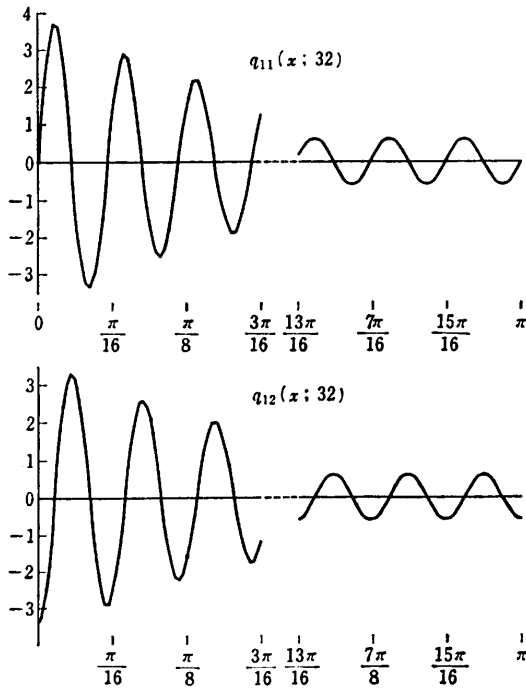


図 1(b) $q_\nu(x;n)$: $n=32$; $\nu=11, 12$ の概形
Fig. 1(b) The profile of $q_\nu(x;n)$ for $n=32$; $\nu=11, 12$.

$\nu=1, 2, 11, 12$ について示す。区間 $[0, 3\pi/16]$, $[13\pi/16, \pi]$ においてのみ図示している。

これらはいずれも $2\pi/n$ 程度の周期の減衰振動の形をしている。とくに

$$\begin{cases} q_1(0+; n) = -\pi n/2 \\ q_{2\nu}(0; n) = (-1)^{\nu-1} \zeta(2\nu; n) \cdot n^{2\nu} : \nu \geq 1 \\ q_{2\nu+1}(0; n) = 0 : \nu \geq 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

で $x=\pi$ の付近での振幅はほぼ 1/2 程度である。

5. $\lambda_\nu(x;n)$ の計算法

$\lambda_\nu(x;n)$ は $q_\nu(x;n)$ の線形結合として与えられるので $\lambda_\nu(x;n)$ を計算するためには、式(2.9)における係数、 $\alpha_{i,j}(n)$ を得ることができればよい。これは次の手順で得ることができる。

$$\zeta(\nu; n) = n^\nu \zeta(\nu; n) = \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{n}{j}\right)^\nu \quad (5.1)$$

とおく。まず $\alpha_{2i,2j}(n)$ は

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i-1} (-1)^{r+i} \zeta(2r+2j; n) \bar{\alpha}_{2i,2j} \\ & = (-1)^{r+i+1} \zeta(2r+2i; n) : 1 \leq r \leq i-1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

なる $i-1$ 元の連立 1 次方程式を解き $\bar{\alpha}_{2i,2i} = 1$ として

$$\sum_{j=1}^i (-1)^{i+j} \zeta(2i+2j; n) \bar{\alpha}_{2i,2j} = \gamma_{2i}(n) \quad (5.3)$$

を算出すれば

$$\alpha_{2i,2j}(n) = \bar{\alpha}_{2i,2j} / \sqrt{\gamma_{2i}(n)} : 1 \leq j \leq i \quad (5.4)$$

として求めることができる⁵⁾。同じように $\alpha_{2i+1,2j+1}(n)$ は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{r+i} \zeta(2r+2j+2; n) \bar{\alpha}_{2i+1,2j+1} \\ & = (-1)^{r+i+1} \zeta(2r+2i+2; n) \\ & : 0 \leq r \leq i-1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

なる i 元の連立 1 次方程式を解き $\bar{\alpha}_{2i+1,2i+1} = 1$ として

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \zeta(2i+2j+2; n) \bar{\alpha}_{2i+1,2j+1} = \gamma_{2i+1}(n) \quad (5.6)$$

を算出すれば

$$\alpha_{2i+1,2j+1}(n) = \bar{\alpha}_{2i+1,2j+1} / \sqrt{\gamma_{2i+1}(n)} : 0 \leq j \leq i \quad (5.7)$$

として求めることができる。

図 2 に $\lambda_\nu(x;n)$ の概形を $n=32$; $\nu=11, 12$ に対して示す。区間 $[\pi/320, 3\pi/16]$, $[13\pi/16, \pi]$ においてのみ図示している。

図 1(b) と比較すると大体の傾向は $q_\nu(x;n)$ の場合と似ているが $x=0$ の付近で $\lambda_\nu(x;n)$ の変化は激しい。この傾向は ν が大きいほど顕著である。

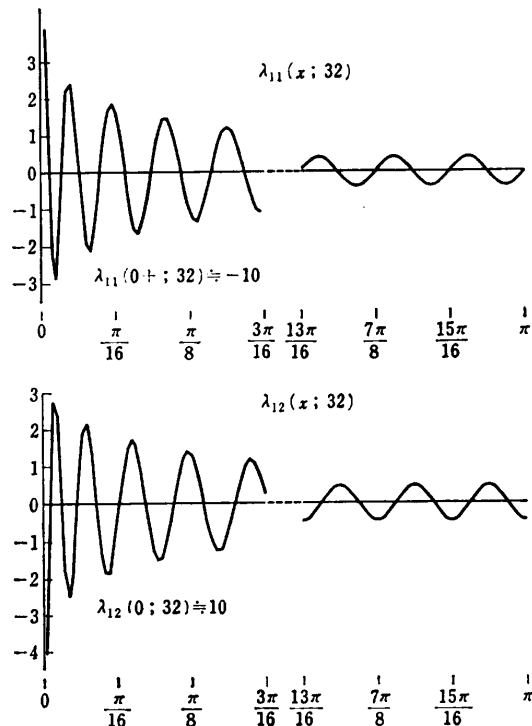


図 2 $\lambda_\nu(x;n)$: $n=32$; $\nu=11, 12$ の概形
Fig. 2 The profile of $\lambda_\nu(x;n)$ for $n=32$; $\nu=11, 12$.

$\lambda_1(x;n)$, $\lambda_2(x;n)$ は $q_1(x;n)$, $q_2(x;n)$ の定数倍であるからそれらの変化は図 1(a) と同じ形になる。

$$\begin{cases} \lambda_1(x;n) = \alpha_{11}(n)q_1(x;n) \\ \lambda_2(x;n) = \alpha_{22}(n)q_2(x;n) \end{cases} \quad (5.8)$$

で、

$$\begin{cases} \alpha_{11}(n) = 1/\{\xi(2;n)\}^{1/2} \doteq 1/\sqrt{n} \\ \alpha_{22}(n) = 1/\{\xi(4;n)\}^{1/2} \doteq 1/\sqrt{3n} \end{cases} \quad (5.9)$$

である。このことから

$$\begin{cases} \lambda_1(0+;n) \doteq -\pi\sqrt{n}/2 \\ \lambda_2(0+;n) \doteq 1/\sqrt{3n} \end{cases} \quad (5.10)$$

となる。

一般に $\lambda_r(0+;n)$ の値がどのようなものか不明であるが筆者らのいくつかの計算によれば $|\lambda_r(0+;n)|$ の値は ν に大きくは依存しない。因みに $\lambda_1(0+;32) \doteq -8.8$, $\lambda_2(0+;n) \doteq 10.3$ である。

6. $\zeta(\nu;n)$ の計算法

本章では一般化された Riemann の Zeta 関数³⁾

$$\zeta(\nu;x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+x)^\nu} \quad (6.1)$$

を必要な精度で計算するための手順を示す。ただし、ここで ν は 2 以上の整数、 x は正の実数とする。

前章までに述べたように、 $p_\nu(x)$ の計算には

$$\zeta(2\nu) = \zeta(2\nu;1): \nu \geq 0$$

を、 $q_\nu(x;n)$ の計算には

$$\zeta(\nu;x): \nu \geq 2, 1 < x < 2$$

を、 $\lambda_\nu(x;n)$ の計算には

$$\zeta(2\nu;n) = n^{2\nu}\zeta(2\nu;n): \nu \geq 1, n > 1$$

を要する。 $\zeta(0)$ を除きこれらの値は以下の手順で得ることができる。

さて、式(6.1)から

$$\zeta(\nu;x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{(j+x)^\nu} + \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{(j+x)^\nu} \quad (6.2)$$

である。 $f(t) = 1/t^\nu$ とおき上式の右辺第 2 項に Euler-Maclaurin 和の公式を適用すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{(j+x)^\nu} \\ &= \frac{1}{(\nu-1)(N+x)^{\nu-1}} + \frac{1}{2(N+x)^\nu} \\ &+ \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(\nu+2k-2)!}{(\nu-1)!} \cdot \frac{1}{(N+x)^{\nu+2k-1}} \\ &+ E_M \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。ここで B_{2k} は式(A.2)で定義される Bernou-

lli 数^{*}, E_M は剰余項である。

ここで必要な精度で $\zeta(\nu;x)$ を得るのに N, M をどのようにしてきめればよいか問題になる。

$f^{(2M)}(t)$ は $t > N+x$ において定符号であるから剰余項 E_M の絶対値は採用する最後の項、

$$\tilde{E}_M = \frac{B_{2M}}{(2M)!} \cdot \frac{(\nu+2M-2)!}{(\nu-1)!} \cdot \frac{1}{(N+x)^{\nu+2M-1}} \quad (6.4)$$

の絶対値を越えない^{**}。一方、式(6.1)から

$$\zeta(\nu;x) > 1/x^\nu \quad (6.5)$$

である。したがって式(6.3) (E_M を除く) と式(6.2) を使って 10 進 d 桁程度の精度で $\zeta(\nu;x)$ を得るには、

$$x^\nu |\tilde{E}_M| < 10^{-d} \quad (6.6)$$

を満足するように M, N をきめればよい。

筆者らの経験によれば M は

$$M = [d/2] \quad (6.7)$$

程度ととればよい。式(6.4), (6.6)から

$$\begin{cases} N > 10^R - x \\ R = \frac{1}{\nu+2M-1} \left\{ \log \frac{|B_{2M}|}{(2M)!} \cdot \frac{(\nu+2M-2)!}{(\nu-1)!} \right. \\ \left. + \nu \log x + d \right\} \end{cases} \quad (6.8)$$

である。すなわち、式(6.7), (6.8)から M, N をきめて、式(6.2), (6.3)により $\zeta(\nu;x)$ を計算すれば、10 進 d 桁程度の相対精度でその値を得ることができ

7. 数値例

前章までに述べた計算法を使い、一例として第 2 種零次 Bessel 関数、 $Y_0(x): x \in (2, 3\pi+2)$ の複合多項式近似⁵⁾, 複合多項式による最小自乗近似⁵⁾を構成しその誤差を計算した。計算には MELCOM-COSMO 700 II を使用しすべての計算を倍精度で行った (仮数部 16 進 14 桁, 10 進約 16 桁)。

すなわち、

$$f(x) = \begin{cases} Y_0(2+1.5x): x \in (0, 2\pi) \\ \{Y_0(2) + Y_0(2+3\pi)\}/2: x = 0, 2\pi \end{cases} \quad (7.1)$$

に対する複合多項式近似

$$H \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f;x)$$

* たとえば文献 4), p. 810 に B_{2k} まで有理数の形で与えられている。

** 付録 A. 参照。

$$= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{j=1}^{n-1} \{ a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx \} + \sum_{\nu=1}^{2m} c_\nu(f; n) q_\nu(x; n) \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos jtdt : j \geq 0 \\ b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin jtdt : j \geq 1 \\ c_\nu(f; n) = \{ f^{(\nu-1)}(2\pi-) - f^{(\nu-1)}(0+) \} / \pi n^\nu \end{cases} \quad (7.3)$$

および最小自乗近似

$$K \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{j=1}^{n-1} \{ a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx \} + \sum_{\nu=1}^{2m} \hat{c}_\nu(f; n) \lambda_\nu(x; n) \quad (7.4)$$

$$\hat{c}_\nu(f; n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \lambda_\nu(t; n) dt \quad (7.5)$$

を $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$; $n=8, 16, 32, 64$ について構成し (式(7.3), (7.5)で与えられる係数を計算した), 次に区間 $[0, 2\pi]$ を 240 等分し, それぞれの点における誤差, $f(x) - H \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)$, $f(x) - K \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)$ を計算してその最大絶対値を得た. 結果をそれぞれ図 3, 4 に示す.

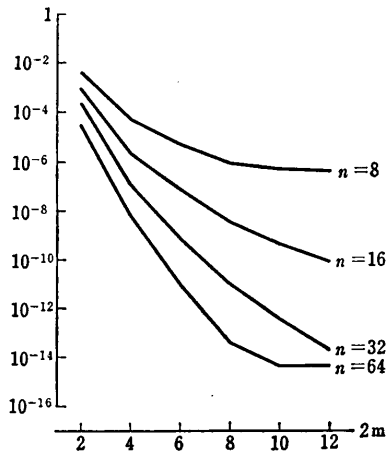


図 3 $\|f(x) - H \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)\|_\infty$ の計算値. ただし $f(x) = Y_0(2+1.5x) : x \in [0, 2\pi]$
Fig. 3 The values of $\|f(x) - H \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)\|_\infty$ where $f(x) = Y_0(2+1.5x) : x \in [0, 2\pi]$.

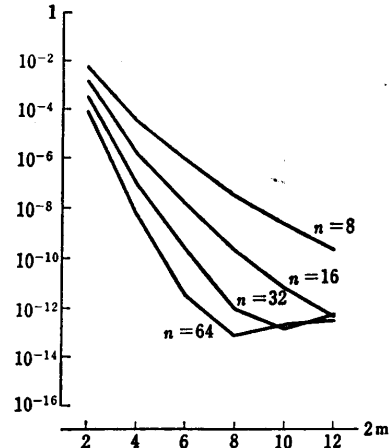


図 4 $\|f(x) - K \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)\|_\infty$ の計算値. ただし, $f(x) = Y_0(2+1.5x) : x \in [0, 2\pi]$
Fig. 4 The values of $\|f(x) - K \left\{ \begin{matrix} 2m \\ n \end{matrix} \right\} (f; x)\|_\infty$ where $f(x) = Y_0(2+1.5x) : x \in [0, 2\pi]$.

図 3 において, $n=64$; $2m=10, 12$ の場合は打ち切り誤差より丸め誤差が大きいと考えられる. $\|f\|_\infty \approx 0.5$ であるからこれらの場合, 計算全体として 10 進 2 桁程度の丸め誤差の累積があると解釈される.

同じように図 4 においては $n=32$; $2m=10, 12$, $n=64$; $2m=8, 10, 12$ の場合, 打ち切り誤差より丸め誤差が大きいと考えられる. これらの場合, 計算全体として 10 進 3~4 桁程度の丸め誤差の累積があると解釈される.

8. むすび

複合多項式を計算するための手順を述べた. 三角多項式部の次数 $n-1$ が適当な大きさなら (50 程度) ここで述べた手法は十分に実用的である. しかし n が大きくなるとあらかじめ計算しておくべき係数, すなわち式 (4.24) における $\hat{a}_j(Q_\nu^*)$, $\hat{b}_j(Q_\nu^*)$ 等を格納しておくために必要な記憶量が多くなって中型機程度では困難を生ずる. この点に関してはなお検討の余地が多い.

謝辞 最後に日頃ご指導いただく名大工学部, 福村晃夫教授, 豊橋技科大, 鳥脇純一郎教授に感謝します.

参 考 文 献

- 山内二郎, 宇野利雄, 一松 信 (共編): 電子計算機のための数値計算法 III, p. 400, 培風館, 東京 (1972).
- Ralston, A.: *A First Course in Numerical*

Analysis, p. 578, McGraw Hill Kogakusha, 東京 (1965).

- 3) Whittaker, E.T. and Watson, G. N.: *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. p. 608, Cambridge University Press, Cambridge (1927).
- 4) Abramowitz, M. and Stegun, I. (ed.): *Handbook of Mathematical Functions*, 10th ed. p. 1046, Dover Publication Inc., New York (1972).
- 5) 秦野和郎, 秦野南世, 二宮市三: 複合多項式による関数近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 6, pp. 617-624 (1982).

付録 A. Euler-Maclaurin 和の公式について Bernoulli 数および Bernoulli 多項式の定義が文献によって異なるためにそれらを使う公式も若干異なった形になることが多い。

文献 2) によれば, Euler-Maclaurin 和の公式は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n f(x_0 + jh) \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + nh} f(y) dy + \frac{1}{2} \{f(x_0 + nh) + f(x_0)\} \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k-1} \{f^{(2k-1)}(x_0 + nh) \\ &- f^{(2k-1)}(x_0)\} \\ &- \frac{h^{2m-1}}{(2m)!} \int_0^{nh} \phi_{2m} \left(\frac{y}{h} - \left[\frac{y}{h} \right] \right) f^{(2m)}(x_0 + y) dy \end{aligned} \tag{A.1}$$

で与えられる*. ここで $B_k, \phi_k(x)$ は

$$\begin{cases} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \\ \frac{t(e^{xt} - 1)}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) \frac{t^k}{k!} \end{cases} \tag{A.2}$$

で定義される Bernoulli 数および Bernoulli 多項式である. 式(2.4)と(A.2)を比較するとただちに

$$\begin{cases} \phi_k(x) + B_k = B_k(x) \\ B_k = B_k(0) \end{cases} \tag{A.3}$$

を得ることができる. 上式第一式を式(A.1)に代入し,

$$\int_0^{nh} f^{(2m)}(x_0 + y) dy = f^{(2m-1)}(x_0 + nh) - f^{(2m-1)}(x_0) \tag{A.4}$$

を使うと式(A.1)は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n f(x_0 + jh) \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + nh} f(y) dy \end{aligned}$$

* $\phi_{2m}(y/h - [y/h])$ は $\phi_{2m}(y/h)$: $y \in [0, h)$ を周期 h で実軸上に周期的に延長した関数である.

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \{f(x_0 + nh) + f(x_0)\} \\ & + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k-1} \{f^{(2k-1)}(x_0 + nh) \\ & - f^{(2k-1)}(x_0)\} \\ & - \frac{h^{2m-1}}{(2m)!} \int_0^{nh} B_{2m} \left(\frac{y}{h} - \left[\frac{y}{h} \right] \right) f^{(2m)}(x_0 + y) dy \end{aligned} \tag{A.5}$$

と書き改められる.

次に剰余項

$$\begin{aligned} R_m = & - \frac{h^{2m-1}}{(2m)!} \int_0^{nh} B_{2m} \left(\frac{y}{h} \right. \\ & \left. - \left[\frac{y}{h} \right] \right) f^{(2m)}(x_0 + y) dy \end{aligned} \tag{A.6}$$

に Hölder の不等式を適用し,

$$\|B_{2m}(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1]} |B_{2m}(x)| = |B_{2m}| \tag{A.7}$$

であることを使うと,

$$|R_m| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} h^{2m-1} \int_0^{nh} |f^{(2m)}(x_0 + y)| dy \tag{A.8}$$

となる. したがって $f^{(2m)}(x)$ が $(x_0, x_0 + nh)$ で符号を変えなければ $|R_m|$ は式(A.5)の右辺第3項で $k=m$ とおいた項の絶対値を越えない. すなわち $f^{(2m)}(x)$ が定符号ならば剰余項を無視した Euler-Maclaurin 和の公式の誤差は採用した最後の項の絶対値を越えない.

式(A.5)に

$$\begin{cases} B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \\ B_{2m}(x) = (-1)^{m-1} \frac{2 \cdot (2m)!}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2m}} \end{cases} \tag{A.9}$$

を⁴⁾代入すると, Euler-Maclaurin 和の公式は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n f(x_0 + jh) \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + nh} f(y) dy + \frac{1}{2} \{f(x_0 + nh) + f(x_0)\} \\ & - \frac{2}{h} \sum_{k=1}^m (-1)^k \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{2k} \zeta(2k) \{f^{(2k-1)}(x_0 + nh) \\ & - f^{(2k-1)}(x_0)\} \\ & + \frac{2}{h} (-1)^m \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \\ & \times \int_0^{nh} f^{(2m)}(x_0 + y) \cos \frac{2\pi ky}{h} dy \end{aligned} \tag{A.10}$$

と書き改められる. $\zeta(2k) \doteq 1$ であるからこの表現に

よると収束の速さを考察する際に、見透しがよくなる
ことがある。

付録 B. $q_n(x; n)$ の線形独立性について

本文では直交系 $\lambda_n(x; n)$ を構成する際に $q_n(x; n)$ の線形独立性を暗黙に仮定している。ここでその仮定が正当であることを示す。

$q_{2i}(x; n)$ と $q_{2i+1}(x; n)$ とが閉区間 $[0, 2\pi]$ で直交することは容易にわかるので、 $q_{2i}(x; n): i \geq 1$ および、 $q_{2i+1}(x; n): i \geq 0$ がそれぞれ区間 $[0, 2\pi]$ において線形独立であることを示せばよい。

さて、閉区間 $[0, 2\pi]$ において

$$\sum_{i=1}^m c_i q_{2i}(x; n) = 0 \quad (\text{B.1})$$

が恒等的に成り立つとする。上式に

$$q_{2i}(x; n) = \sum_{j=n}^{\infty} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{j}\right)^{2i} \cos jx \quad (\text{B.2})$$

を代入すると

$$\sum_{j=n}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m c_i (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{j}\right)^{2i} \right\} \cos jx = 0 \quad (\text{B.3})$$

となる。 $\cos jx: j \geq n$ は $[0, 2\pi]$ において線形独立であるから上式が成り立つためには少なくとも

$$\sum_{i=1}^m c_i (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{j}\right)^{2i} = 0: n \leq j \leq n+m-1$$

したがって、

$$\sum_{i=1}^m c_i (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{j}\right)^{2i-2} = 0: n \leq j \leq n+m-1 \quad (\text{B.4})$$

が成立しなければならない。

$$\begin{cases} x_j = \{n/(j+n-1)\}^2: 1 \leq j \leq m \\ d_i = (-1)^{i-1} c_i: 1 \leq i \leq m \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

とおくと、式(B.4)は

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

と書き改められる。上式の係数行列の行列式は Vandermonde 行列式であり零ではない。したがって $d_i = 0: 1 \leq i \leq m$ であり $c_i = 0: 1 \leq i \leq m$ である。すなわち式(B.1)が恒等的に成り立つためには $c_i = 0: 1 \leq i \leq m$ でなければならない。

以上から $q_{2i}(x; n): 1 \leq i \leq m$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ において線形独立である。

$q_{2i+1}(x; n): 0 \leq i \leq m-1$ についても同じようにして線形独立であることを確認する。

(昭和56年6月8日受付)

(昭和57年5月19日採録)