複合多項式による関数近似†

秦 野 和 郎†† 秦 野 甯 世††† 二 宮 市 三††††

Fourier 級数は豊富な表現能力をもつ級数である．すなわち不連続点を有限個もつような関数をも Fourier 級数で表現することができる．しかしそれは平均収束，各点収束の意味においてであって一様収束の意味においては有界閉区間で定義される解析関数すら一般には表現できない．Fourier 級数が一様収束するのはきわめて限定された場合に限る．実際の計算に特別な障害なく役に立つのは十分に滑らかな周期関数の1周期に対するFourier 級数だけであるといっても過言ではない．Fourier 級数がこのように背反する性質をもつことは早くから注目されてきたことであるが十分に解明されてはいない．本論文では，最初に有限個の不連続点をもつような関数の打切り Fourier 級数（Fourier 級数の最初の部分和）の誤差解析を行っている．その結果，誤差が一様収束しない項と十分に速く収束する項との二つに明確に分離されることを示している．次に一様収束しない項が計算可能な量であることに注目して閉区間 $[0, 2\pi]$ で定義される十分に滑らかな関数を打切り Fourier 級数とその誤差項における一様収束しない項との和により近似する一手法を提案している．この手法により Fourier 級数の有用性は大幅に増大する．提案される近似手法が一般に三角多項式と多項式との和の形になることからこれを複合多項式による関数近似と称している．

1. まえがき

Fourier 級数は理論上，応用上重要な級数として古くからその性質が検討されてきている．また，比較的最近，“高速 Fourier 変換”[7] なる算法が提案されて Fourier 級数の実用的価値は急速に増大し，多くの分野で使われるようになっている．

このように Fourier 級数はよく知られなじみやすい級数ではあるが実用上大きな欠点をもっている．

Fourier 級数が一般に各点収束ではあるが，一様収束でないことはよく知られた事実である．このために級数を有限項で打ち切ると両端あるいは不連続点の付近で Gibbs の現象とよばれる振動を生ずる．これを減少させるための手法として Fejér 和，Lanczos の σ-factor[4),5)] による平滑化が適用されるが十分とはいえない．

従来，Fourier 級数論の主題は，

“どのような関数が Fourier 級数に展開されうるか？”

という問題であったと思われる．そしてこの問題に関しては比較的最近，最終的ともいうべき条件が明らかにされたといわれている[1)]．

しかし Fourier 級数を実際の問題に適用するには，Fourier 級数論の結果だけでは不十分である．実際の計算においては，Fourier 級数を有限項で打ち切らざるをえないのであるから，

“Fourier 級数の最初の部分和（以下，打切り Fourier 級数という）が元の関数をどの程度近似しているか？”

についての検討が必要である．

この方面での考察は皆無ではないが[6)] 従来，ほとんど議論の対象となっていない．

本論文ではまず，打切り Fourier 級数の誤差項を導き，十分に滑らかな周期関数の1周期を打切り Fourier 級数で近似したときの誤差限界を示す．

次に打切り Fourier 級数の誤差項が，“絶対値の大きい計算可能な項”と一般に“絶対値の小さい項”との和から成ることに着目して複合多項式近似なる一つの近似手法を構成しその性質について述べる．

本論文で述べる近似手法は Gibbs の現象を消滅させてしまう手法である．

2. 打切り Fourier 級数の誤差

m を自然数とし，閉区間 $[0, 2\pi]$ の分割を

$$\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_\xi = 2\pi \tag{2.1}$$

とする．このとき

$$\begin{cases} f(x) \in C^m(x_i, x_{i+1}): 0 \leqq i \leqq \xi - 1 \\ f^{(m+1)}(x) \in L^2[0, 2\pi]^* \end{cases} \tag{2.2}$$

† Approximation by Composite Polynomials by Kazuo Hatano (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Fukui University), Yasuyo Hatano (Nagoya University Computation Center) and Ichizo Ninomiya (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 福井大学工学部情報工学科（現在，愛知工業大学電子工学科）

††† 名古屋大学大型計算機センター

†††† 名古屋大学工学部情報工学科

* 自乗可積分の意．すなわち

$$\int_0^{2\pi} \{f^{(m+1)}(x)\}^2 dx \leqq M_2 < \infty$$

をみたし，$f^{(\nu)}(x_i-)$, $f^{(\nu)}(x_i+)$: $0\leqq\nu\leqq m$, $0\leqq i\leqq\xi$ が存在して，

$$\begin{cases} f(x_i)=\{f(x_i-)+f(x_i+)\}/2 \ : \ 0\leqq i\leqq\xi \\ f^{(\nu)}(0+)=f^{(\nu)}(2\pi+), \ \ f^{(\nu)}(0-)=f^{(\nu)}(2\pi-) \\ : \ 0\leqq\nu\leqq m \end{cases} \tag{2.3}$$

であるような実関数 $f(x)$ の全体を $W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ とする．さらに，その部分集合として

$$\begin{cases} f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi] \\ f(x)\in C^{m-1}(0,2\pi) \\ f^{(\nu)}(2\pi-)=f^{(\nu)}(0+) \ : \ 0\leqq\nu\leqq m-1 \end{cases} \tag{2.4}$$

であるような実関数 $f(x)$ の全体を $P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ とする．

$f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ は

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{\infty}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos jx dx \ : \ 0\leqq j \\ b_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin jx dx \ : \ 1\leqq j \end{cases} \tag{2.6}$$

と Fourier 展開される[1]．

本章では，まず $f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} \tag{2.7}$$

の誤差項を導き，次に $f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差限界を得る．

さて，式(2.6)の右辺に部分積分を反復適用し，記述の容易のために

$$\mathrm{cir}_\nu\, x=-\cos(x-\pi\nu/2)=\begin{cases} -\cos x \ : \ \nu=4j \\ -\sin x \ : \ \nu=4j+1 \\ \ \ \cos x \ : \ \nu=4j+2 \\ \ \ \sin x \ : \ \nu=4j+3 \end{cases} \tag{2.8}$$

なる記法を使い

$$\omega_\nu(f;x)=\{f^{(\nu)}(x-)-f^{(\nu)}(x+)\}/\pi \tag{2.9}$$

とおくと，

$$\begin{cases} a_j(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\frac{(-1)^\nu}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu\, jx_i \\ \qquad +\dfrac{(-1)^m}{\pi j^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{cir}_{m+1}\, jt dt \\ b_j(f)=-\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\frac{(-1)^\nu}{j^\nu}\mathrm{cir}_{\nu-1} jx_i \\ \qquad -\dfrac{(-1)^m}{\pi j^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{cir}_m\, jt dt \end{cases} \tag{2.10}$$

を得ることができる．

次に，$f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差

$$f(x)-T_n(f;x)=\sum_{j=n}^{\infty}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} \tag{2.11}$$

に式(2.10)を代入し，

$$(-1)^\nu(\cos jx\,\mathrm{cir}_\nu\, jx_i-\sin jx\,\mathrm{cir}_{\nu-1}\, jx_i)=\mathrm{cir}_\nu\, j(x-x_i) \tag{2.12}$$

であることを使うと，式(2.11)は，

$$\begin{aligned} f(x)-T_n(f;x) &=\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu\, j(x-x_i) \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^{m+1}}\mathrm{cir}_{m+1}\, j(x-t)dt \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる．ここで，

$$\tilde{q}_\nu(x;n)=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu\, jx=\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\cos jx \ : \ \nu=2i \\ \displaystyle\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\sin jx \ : \ \nu=2i+1 \end{cases} \tag{2.14}$$

とおくと結局，$f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差は

$$\begin{aligned} f(x)-T_n(f;x) &=\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\tilde{q}_\nu(x-x_i;n) \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\tilde{q}_{m+1}(x-t;n)dt \end{aligned} \tag{2.15}$$

と簡潔に表現される．

上式において

$$\sum_{i=0}^{\xi-1}\omega_0(f;x_i)\tilde{q}_1(x-x_i;n)=-\sum_{i=0}^{\xi-1}\frac{f(x_i-)-f(x_i+)}{\pi}$$

$$\times \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j} \sin j(x-x_i) \tag{2.16}$$

なる項により生ずる振動は通常 Gibbs の現象とよばれ，一般に零に一様収束しないことが知られている．したがって打切り Fourier 級数を $f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ の近似に使うのは不適切である．

以下，本章では $P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ の要素のみを議論の対象とする．

式(2.15)および式(2.4)から，$f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差は

$$\begin{aligned} f(x)-T_n(f;x) &= \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_m(f;x_i)\tilde{q}_{m+1}(x-x_i;n) \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m+1)}(t)\tilde{q}_{m+1}(x-t;n)dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

で与えられる．

さて，式(2.14)において

$$\begin{cases} |\mathrm{cir}_\nu\, jx| \leqq 1 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} |\mathrm{cir}_\nu\, jx|dx = 4 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{cir}_\nu\, jx\cdot \mathrm{cir}_\nu kx dx = \begin{cases} \pi: j=k \\ 0: j\neq k \end{cases} \end{cases} \tag{2.18}$$

であることを使うと，$\nu\geqq 2$ のとき

$$\begin{cases} \|\tilde{q}_\nu(x;n)\|_\infty \leqq \zeta(\nu;n) \\ \|\tilde{q}_\nu(x;n)\|_1 \leqq 4\zeta(\nu;n) \\ \|\tilde{q}_\nu(x;n)\|_2 \leqq \{\pi\zeta(2\nu;n)\}^{1/2} \end{cases} \tag{2.19}$$

を容易に得ることができる*．ここで

$$\zeta(\nu;n) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+n)^\nu} \tag{2.20}$$

は一般化された Riemann の Zeta 関数である[2]．

式(2.17)において

$$|\omega_m(f;x_i)| \leqq (2/\pi)\|f^{(m)}\|_\infty \tag{2.21}$$

を使い，右辺第2項に Schwartz の不等式を適用すると，$f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差限界

$$\begin{aligned} \|f(x)-T_n(f;x)\|_\infty &\leqq (2\xi/\pi)\zeta(m+1;n)\|f^{(m)}\|_\infty \\ &\quad + \{\zeta(2m+2;n)/\pi\}^{1/2}\|f^{(m+1)}\|_2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

を得る．n が十分に大きいとき，

$$\zeta(\nu;n) = \frac{1}{n^\nu}\left\{\frac{n}{\nu-1}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{**} \tag{2.23}$$

* $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$，$\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(x)|dx$

$\|f\|_2 = \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$

** 文献 3) p. 260, 6.4.10–11

であるから式(2.22)の右辺は，ほぼ

$$\left(\frac{1}{n}\right)^m \left\{\frac{2\xi}{\pi m}\|f^{(m)}\|_\infty + \frac{1}{\sqrt{\pi(2m+1)n}}\|f^{(m+1)}\|_2\right\} \tag{2.24}$$

程度の大きさになる．

次に $P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ のいくつかの部分集合に対する打切り Fourier 級数の誤差限界を導く．

$$\begin{cases} f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi] \\ \|f^{(m+1)}(x)\|_\infty \leqq M_\infty < \infty \end{cases} \tag{2.25}$$

をみたす実関数 $f(x)$ の全体を $P^m_{\infty,\Delta}[0,2\pi]$ とすると $f(x)\in P^m_{\infty,\Delta}[0,2\pi]$ に対して式(2.17)から

$$\begin{aligned} \|f(x)-T_n(f;x)\|_\infty &\leqq (2/\pi)\zeta(m+1;n)\{\xi\|f^{(m)}\|_\infty \\ &\quad +2\|f^{(m+1)}\|_\infty\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

である．また，

$$\begin{cases} f(x)\in P^m_{\infty,\Delta}[0,2\pi] \\ f^{(m)}(x)\in C(0,2\pi) \end{cases} \tag{2.27}$$

をみたす実関数 $f(x)$ の全体を $P^m_\infty[0,2\pi]$ とすると，式(2.17)において，$\xi=1$，

$$\begin{aligned} \omega_m(f;x_0) &= \{f^{(m)}(2\pi-)-f^{(m)}(0+)\}/\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m+1)}(t)dt \end{aligned} \tag{2.28}$$

とおくことにより，$f(x)\in P^m_\infty[0,2\pi]$ に対して

$$\begin{aligned} f(x)-T_n(f;x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m+1)}(t)\{\tilde{q}_{m+1}(x;n) \\ &\quad -\tilde{q}_{m+1}(x-t;n)\}dt \end{aligned} \tag{2.29}$$

を得ることができる．上式に Hölder の不等式を適用し

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} |\mathrm{cir}_{m+1}\, jx - \mathrm{cir}_{m+1}\, j(x-t)|dt \\ &\leqq |\mathrm{cir}_{m+1}\, jx|\int_0^{2\pi} |1-\cos jt|dt \\ &\quad +|\mathrm{cir}_m\, jx|\int_0^{2\pi} |\sin jt|dt \\ &\leqq 2\sqrt{\pi^2+4} \end{aligned} \tag{2.30}$$

であることを使うと，$f(x)\in P^m_\infty[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差限界

$$\begin{aligned} &\|f(x)-T_n(f;x)\|_\infty \\ &\leqq (2\sqrt{\pi^2+4}/\pi)\zeta(m+1;n)\|f^{(m+1)}\|_\infty \end{aligned} \tag{2.31}$$

が得られる．

3. 複合多項式とその表現

本章では次章以下での議論の準備として複合多項式を定義し，いくつかのその表現について述べる．

$D\equiv d/dx$ として

開区間 $(0,2\pi)$ において

$$\begin{cases} D^{m+1}\prod_{j=1}^{n-1}(D^2+j^2)h(x)=0 \\ h(0)=h(2\pi)=\{h(0+)+h(2\pi-)\}/2 \end{cases} \quad (3.1)$$

をみたす実関数 $h(x)$ の全体を閉区間 $[0,2\pi]$ で定義される複合多項式と定義し，$H^{(m,n)}[0,2\pi]$ と書く．

$h(x)\in H^{(m,n)}[0,2\pi]$ は一般に m 次の多項式と $n-1$ 次の三角多項式の和として与えられる．

さて，

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu(x)\frac{t^\nu}{\nu!}:\ |t|<2\pi \quad (3.2)$$

で定義される ν 次の Bernoulli 多項式 $B_\nu(x)$ は次の性質をもつ．すなわち，

$$\begin{cases} B_\nu'(x)=\nu B_{\nu-1}(x) \\ B_\nu(1-x)=(-1)^\nu B_\nu(x):\ \nu\geqq 1 \\ B_{2\nu+1}(0)=B_{2\nu+1}(1)=0 \end{cases} \quad (3.3)$$

である[3]．また，

$$\begin{cases} B_0(x)=1 \\ B_1(x)=x-1/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

である[3]．

Bernoulli 多項式 $B_\nu(x)$ を使って閉区間 $[0,2\pi]$ において，正規化された Bernoulli 多項式 $p_\nu(x)$ を，

$$\begin{cases} p_0(x)=1/2:\ x\in(0,2\pi) \\ p_1(x)=\begin{cases}(x-\pi)/2:\ x\in(0,2\pi) \\ 0 \quad :\ x=0,2\pi\end{cases} \\ p_\nu(x)=\dfrac{(2\pi)^\nu}{2\cdot\nu!}B_\nu\left(\dfrac{x}{2\pi}\right):\ \nu\geqq 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

と定義する．式(3.3)，(3.4) から $p_\nu(x)$ に関する次の性質を導くことができる．

$$\begin{cases} p_\nu'(x)=p_{\nu-1}(x) \\ p_\nu(2\pi-x)=(-1)^\nu p_\nu(x):\ \nu\geqq 1 \\ p_{2\nu+1}(0)=p_{2\nu+1}(2\pi)=0 \end{cases} \quad (3.6)$$

また，上式および式(3.5)から

$$\begin{cases} p_\nu^{(l)}(0+)=p_\nu^{(l)}(2\pi-):\ l=0,1,\cdots,\nu-2,\nu,\cdots \\ -p_\nu^{(\nu-1)}(0+)=p_\nu^{(\nu-1)}(2\pi-)=\pi/2 \end{cases} \quad (3.7)$$

であることを容易に確認しうる．

正規化された Bernoulli 多項式 $p_\nu(x)$ を使って，$h(x)\in H^{(m,n)}[0,2\pi]$ の $\boldsymbol{p}$-表現を

$$h(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{n-1}(\tilde{a}_j\cos jx+\tilde{b}_j\sin jx)+\sum_{\nu=1}^{m}\tilde{c}_\nu p_\nu(x) \quad (3.8)$$

と定義する．これに関して式(3.7)から

$$h^{(l-1)}(2\pi-)-h^{(l-1)}(0+)=\pi\tilde{c}_l \quad (3.9)$$

が成り立つ．すなわち $h(x)\in H^{(m,n)}[0,2\pi]$ の $\boldsymbol{p}$-表現は，三角多項式と，両端の l 次 $(l=0,1,\cdots,m-1)$ 微係数の差の定数倍をパラメータとする多項式との和である．

次に $\boldsymbol{p}$-表現をもとにして $\tilde{\boldsymbol{q}}$-表現，すなわち部分的に直交する基底関数を使う表現を導く．

正規化された Bernoulli 多項式，$p_\nu(x)$ に関する性質，式(3.7)から $p_\nu(x)$ は次のように Fourier 展開される．すなわち，

$$p_\nu(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu jx \quad (3.10)$$

である*．これを式(3.8)に代入すると，式(3.8)は式(2.14)で与えられる $\tilde{q}_\nu(x;n)$ を使って，

$$h(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{n-1}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)+\sum_{\nu=1}^{m}\tilde{c}_\nu\tilde{q}_\nu(x;n) \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} a_j=\tilde{a}_j+\displaystyle\sum_{i=1}^{[m/2]}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\tilde{c}_{2i} \\ b_j=\tilde{b}_j+\displaystyle\sum_{i=0}^{[(m-1)/2]}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\tilde{c}_{2i+1} \end{cases} :\ 1\leqq j\leqq n-1 \quad (3.12)^{**}$$

と書き改められる．ここで容易にわかるように

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\tilde{q}_\nu(x;n)dx=\int_0^{2\pi}\tilde{q}_\nu(x;n)\cos jx dx=\int_0^{2\pi}\tilde{q}_\nu(x;n)\sin jx dx=0$$
$$:\ \nu\geqq 1,\ 1\leqq j\leqq n-1 \quad (3.13)$$

$$\int_0^{2\pi}\tilde{q}_{2i}(x;n)\tilde{q}_{2j+1}(x;n)dx=0$$
$$:\ i\geqq 1,\ j\geqq 0 \quad (3.14)$$

が成り立つ．

式(3.11)を $h(x)\in H^{(m,n)}[0,2\pi]$ の $\tilde{\boldsymbol{q}}$-表現と定義する．

次に，式(2.14)からわかるように n が大きいとき，$\tilde{q}_\nu(x;n)$ の絶対値はきわめて小さい．この不都合を除くために，$q_\nu(x;n)$ を

$$q_\nu(x;n)=n^\nu\tilde{q}_\nu(x;n) \quad (3.15)$$

と定義して，式(3.11)を

* 文献 3) p. 805, 23.1.16-18

** $[m/2]$ は Gauss の記号で $m/2$ を越えない最大の整数．

$$h(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{n-1}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}c_\nu(n)q_\nu(x;n) \tag{3.16}$$
$$c_\nu(n)=\tilde{c}_\nu/n^\nu \tag{3.17}$$

と書き改め，式(3.16)を $h(x)\in H^{(m,n)}[0,2\pi]$ の $\boldsymbol{q}$-表現と定義する．

$\boldsymbol{q}$-表現をもとにして Schmidt の直交化手順により $H^{(m,n)}[0,2\pi]$ の直交系を構成することができる．

式(3.13)，(3.14)からわかるように $\boldsymbol{q}$-表現，式(3.16)においてほとんどの基底関数は閉区間 $[0,2\pi]$ において直交している．$q_{2i}(x;n)$ と $q_{2j}(x;n)$, $q_{2i+1}(x;n)$ と $q_{2j+1}(x;n)$ のみが直交していない．ここで，式(2.14)，(3.15)から

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}q_{2i}(x;n)q_{2j}(x;n)dx=\pi(-1)^{i+j}\tilde{\zeta}(2i+2j;n)\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}q_{2i+1}(x;n)q_{2j+1}(x;n)dx\\ \quad=\pi(-1)^{i+j}\tilde{\zeta}(2i+2j+2;n)\end{cases} \tag{3.18}$$
$$\tilde{\zeta}(i;n)=n^i\zeta(i,n) \tag{3.19}$$

である．これを使って，

$$\begin{cases}\displaystyle\lambda_{2i}(x;n)=\sum_{j=1}^{i}\alpha_{2i,2j}(n)q_{2j}(x;n)\\ \displaystyle\lambda_{2i+1}(x;n)=\sum_{j=0}^{i}\alpha_{2i+1,2j+1}(n)q_{2j+1}(x;n)\end{cases} \tag{3.20}$$

とおき，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_i(x;n)\lambda_j(x;n)dx=\begin{cases}1: i=j\\0: i\neq j\end{cases} \tag{3.21}$$
$$: 1\leqq i,\ j\leqq m$$

をみたすように直交化係数，$\alpha_{i,j}(n)$ をきめることができる．

$\lambda_{2i}(x;n)$ の場合で簡単にその手順を述べる．

$$\bar{\lambda}_{2i}(x;n)=\sum_{j=1}^{i}\bar{\alpha}_{2i,2j}q_{2j}(x;n)$$
$$\bar{\alpha}_{2i,2i}=1 \tag{3.22}$$

とおき，これを $q_{2r}(x;n): 1\leqq r\leqq i-1$ と直交させる．

$$\int_0^{2\pi}\bar{\lambda}_{2i}(x;n)q_{2r}(x;n)dx$$
$$=\pi\sum_{j=1}^{i}(-1)^{r+j}\tilde{\zeta}(2r+2j;n)\bar{\alpha}_{2i,2j}$$
$$=0 \tag{3.23}$$

より $i-1$ 元の連立1次方程式

$$\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{r+j}\tilde{\zeta}(2r+2j;n)\bar{\alpha}_{2i,2j}$$
$$=(-1)^{r+i+1}\tilde{\zeta}(2r+2i;n)$$
$$: 1\leqq r\leqq i-1 \tag{3.24}$$

を得る．これを解き

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\bar{\lambda}_{2i}(x;n)\}^2dx$$
$$=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i+j}\tilde{\zeta}(2i+2j;n)\bar{\alpha}_{2i,2j}$$
$$=\gamma_{2i}(n) \tag{3.25}$$

を算出すると，

$$\alpha_{2i,2j}(n)=\bar{\alpha}_{2i,2j}/\sqrt{\gamma_{2i}(n)} \tag{3.26}$$

である．

$\lambda_{2i+1}(x;n)$ の場合についても同じようにして，$\alpha_{2i+1,2j+1}(n): 0\leqq j\leqq i$ を得ることができる．

以上の手順で得られる $\lambda_\nu(x;n)$ を使って，$h(x)\in H^{(m,n)}[0,2\pi]$ の $\boldsymbol{\lambda}$-表現を

$$h(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{n-1}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}\hat{c}_\nu(n)\lambda_\nu(x;n) \tag{3.27}$$

$$\begin{cases}\displaystyle c_{2i}(n)=\sum_{j=i}^{[m/2]}\hat{c}_{2j}(n)\alpha_{2j,2i}(n)\\ \displaystyle c_{2i+1}(n)=\sum_{j=i}^{[(m-1)/2]}\hat{c}_{2j+1}(n)\alpha_{2j+1,2i+1}(n)\end{cases} \tag{3.28}$$

と定義する．

最後に，複合多項式の導関数について簡単に述べる．

まず，式(3.5)，(3.6)から $x\in(0,2\pi)$ に対して

$$p_\nu^{(l)}(x)=\begin{cases}p_{\nu-l}(x): l\leqq\nu\\ 0 \quad : l>\nu\end{cases} \tag{3.29}$$

である．次に式(2.14)，(3.10)から

$$\tilde{q}_\nu(x,n)=p_\nu(x)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu\, jx \tag{3.30}$$

である．これにより $\nu\leqq0$ に対しても $\tilde{q}_\nu(x,n)$ を定義することができる*．式(2.8)，(3.29) から

$$\tilde{q}_\nu^{(l)}(x;n)=\tilde{q}_{\nu-l}(x;n) \tag{3.31}$$

を得ることができる．また，式(3.15)から

$$q_\nu^{(l)}(x;n)=n^l q_{\nu-l}(x;n) \tag{3.32}$$

である．

4. 複合多項式による関数近似

本章および次章においては議論の簡単のために，対

* $\tilde{q}_0(x;n+1)=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n}\cos jx$ は Dirichlet 核とよばれ，Fourier 級数の各点収束性の証明に使われる．

象とする被近似関数を狭く限定する．

$m\geqq 1$ として

$$\begin{cases} f(x)\in W_{2,d}^{2m}[0,2\pi] \\ f(x)\in C^{2m}(0,2\pi) \\ \|f^{(2m+1)}(x)\|_\infty \leqq M_\infty<\infty \end{cases} \tag{4.1}$$

をみたす実関数 $f(x)$ の全体を $W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ とする．

本章では $W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ の任意の要素を近似する一手法およびその性質について述べる*.

さて，$f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差は，式(2.15)から

$$\begin{aligned} &f(x)-T_n(f;x) \\ &=\sum_{\nu=1}^{2m}\omega_{\nu-1}(f;0)\tilde{q}_\nu(x;n) \\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)\{\tilde{q}_{2m+1}(x;n) \\ &\quad-\tilde{q}_{2m+1}(x-t;n)\}dt \end{aligned} \tag{4.2}$$

で与えられる．ここで右辺第2項の絶対値は式(2.31)の右辺，式(2.23)からわかるように，m, n が適当に大きければ十分に小さい．したがって式(4.2)の右辺第1項を評価し近似値の一部とすれば，得られる近似は $f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ に対する良好な近似値となるはずである．この考えにもとづいて以下のように $f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ を複合多項式 $H^{(2m,n)}[0,2\pi]$ の要素で近似する手法を構成することができる．

$$\begin{aligned} &H\left\{\begin{matrix}2m\\n\end{matrix}\right\}(f;x) \\ &=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{\tilde{a}_j(f)\cos jx+\tilde{b}_j(f)\sin jx\} \\ &\quad+\sum_{\nu=1}^{2m}\tilde{c}_\nu(f)p_\nu(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} a_0(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ \tilde{a}_j(f)=\dfrac{(-1)^m}{\pi j^{2m}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(2m)}(x)\cos jxdx \\ \tilde{b}_j(f)=\dfrac{(-1)^m}{\pi j^{2m}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(2m)}(x)\sin jxdx \\ \tilde{c}_\nu(f)=\{f^{(\nu-1)}(2\pi-)-f^{(\nu-1)}(0+)\}/\pi \end{cases} \tag{4.4}$$

$$: 1\leqq j\leqq n-1,\ 1\leqq \nu\leqq 2m$$

を $f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ に対する複合多項式近似と定義し，その $\boldsymbol{p}$-表現とよぶことにする．さらに以下では $\tilde{a}_j(f)$, $\tilde{b}_j(f)$ を $2m$ 次補正の Fourier 係数とよぶ．

2m 次補正の Fourier 係数はまた，

$$\begin{cases} \tilde{a}_j(f)=\dfrac{(-1)^{m-1}}{\pi j^{2m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)\sin jtdt \\ \tilde{b}_j(f)=\dfrac{(-1)^{m-1}}{\pi j^{2m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)(1-\cos jt)dt \end{cases} \tag{4.5}$$

と書くことができる．この式から

$$\begin{aligned} &|\tilde{a}_j(f)|\leqq(4/\pi j^{2m+1})\cdot\|f^{(2m+1)}\|_\infty \\ &|\tilde{b}_j(f)|\leqq 2/j^{(2m+1)}\cdot\|f^{(2m+1)}\|_\infty \end{aligned} \tag{4.6}$$

である．したがって $f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ に対する $2m$ 次補正の Fourier 係数は j の増大につれて $O(1/j^{2m+1})$ で減少する**．しかし高次導関数の絶対値が大きいような関数に対しては，小さな j に対して $\tilde{a}_j(f)$, $\tilde{b}_j(f)$ の絶対値は一般に大きい．

複合多項式近似，式(4.3)，(4.4)は複合多項式の $\tilde{\boldsymbol{q}}$-表現，式(3.11)，(3.12)を使って

$$\begin{aligned} &H\left\{\begin{matrix}2m\\n\end{matrix}\right\}(f;x) \\ &=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} \\ &\quad+\sum_{\nu=1}^{2m}\tilde{c}_\nu(f)\tilde{q}(x;n) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} a_j(f)=\tilde{a}_j(f)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\tilde{c}_{2i}(f) \\ \qquad=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos jtdt \\ b_j(f)=\tilde{b}_j(f)+\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\tilde{c}_{2i+1}(f) \\ \qquad=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin jtdt \end{cases} \tag{4.8}$$

$$: 1\leqq j\leqq n-1$$

と書くことができる．また，$\boldsymbol{q}$-表現を使って

$$\begin{aligned} &H\left\{\begin{matrix}2m\\n\end{matrix}\right\}(f;x) \\ &=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} \\ &\quad+\sum_{\nu=1}^{2m}c_\nu(f;n)q_\nu(x;n) \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$c_\nu(f;n)=\tilde{c}_\nu(f)/n^\nu \tag{4.10}$$

と書くことができる．これらをそれぞれ，複合多項式近似の $\tilde{\boldsymbol{q}}$-表現，$\boldsymbol{q}$-表現とよぶ．

式(4.8)で与えられる Fourier 係数 $a_j(f)$, $b_j(f)$ は部分積分を適用することにより

---

* $2m$ を $2m-1$ とおきかえてもほとんど同じように議論することができる．

** $f^{(2m+1)}(x)$ が連続で $\|f^{(2m+2)}\|_\infty$ が存在すれば式(4.5)第一式にもう一度部分積分を適用することができて，$|\tilde{a}_j(f)|$ は $O(1/j^{2m+2})$ で減少することを導きうる．

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi j^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)(1-\cos jt)dt \\ b_j(f)=-\dfrac{1}{\pi j}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)(1-\cos jt)dt \end{cases} \tag{4.11}$$

と書き改められるので

$$\begin{cases} |a_j(f)|\leqq(2/j^2)\cdot\|f''\|_\infty \\ |b_j(f)|\leqq(2/j)\cdot\|f'\|_\infty \end{cases} \tag{4.12}$$

となる．すなわち，$a_j(f)$, $b_j(f)$ は j の増大につれてそれぞれ $O(1/j^2)$, $O(1/j)$ で減少する．また，

$$\begin{cases} |a_j(f)|\leqq(4/\pi)\|f\|_\infty \\ |b_j(f)|\leqq(4/\pi)\|f\|_\infty \end{cases} \tag{4.13}$$

であるから小さな j に対しても $a_j(f)$, $b_j(f)$ の絶対値はたかだか $f(x)$ の最大絶対値程度である．

次に複合多項式近似の l：$0\leqq l\leqq 2m-1$ 次導関数の誤差限界を導く．

式(4.2)，(4.7)から

$$f(x)-H\begin{Bmatrix}2m\\n\end{Bmatrix}(f;x) =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)\{\tilde{q}_{2m+1}(x;n) -\tilde{q}_{2m+1}(x-t;n)\}dt \tag{4.14}$$

である．すなわち，$f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ に対する複合多項式近似の誤差と，$f(x)\in P_\infty^{2m}[0,2\pi]$ に対する打切り Fourier 級数の誤差とは同じ形で与えられる．

式(4.14)から

$$f^{(l)}(x)-H^{(l)}\begin{Bmatrix}2m\\n\end{Bmatrix}(f;x) =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)\{\tilde{q}_{2m+1-l}(x;n) -\tilde{q}_{2m+1-l}(x-t;n)\}dt \tag{4.15}$$

である．上式に Hölder の不等式を適用すると，

$$\left\|f^{(l)}(x)-H^{(l)}\begin{Bmatrix}2m\\n\end{Bmatrix}(f;x)\right\|_\infty \leqq\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2+4}\,\zeta(2m+1-l;n)\|f^{(2m+1)}\|_\infty \tag{4.16}$$

が得られる．n が十分大きいとき上式右辺は，式(2.23)から

$$\frac{2\sqrt{\pi^2+4}}{\pi(2m-l)}\left(\frac{1}{n}\right)^{2m-l}\|f^{(2m+1)}\|_\infty \tag{4.17}$$

程度と評価できる．

5. 複合多項式による最小自乗近似

本章では $f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$ の，$H^{(2m,n)}[0,2\pi]$ の要素による最小自乗近似式が，3章で導入された複合多項式の λ-表現によって簡潔に表現されることについてのみ述べる．

$f(x)\in W_\infty^{2m}[0,2\pi]$, $h(x)\in H^{(2m,n)}[0,2\pi]$ として

$$J=\int_0^{2\pi}\{f(x)-h(x)\}^2dx \tag{5.1}$$

を最小にする $h(x)$ を，$f(x)$ の複合多項式による最小自乗近似と定義し，$K\begin{Bmatrix}2m\\n\end{Bmatrix}(f;x)$ と書く．

式(5.1)に式(3.27)を代入し，三角関数の直交性および，$\lambda_\nu(x;n)$ の直交性，式(3.21)を使うとただちに，

$$K\begin{Bmatrix}2m\\n\end{Bmatrix}(f;x) =\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} +\sum_{\nu=1}^{2m}\hat{c}_\nu(f;n)\lambda_\nu(x;n) \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos jxdx：0\leqq j\leqq n-1 \\ b_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin jxdx：1\leqq j\leqq n-1 \\ \hat{c}_\nu(f;n)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\lambda_\nu(x;n)dx：1\leqq\nu\leqq 2m \end{cases} \tag{5.3}$$

を得ることができる．

6. むすび

打切り Fourier 級数の誤差を明らかにし，修正しうる項に着目して複合多項式近似なる近似手法を構成した．

打切り Fourier 級数の誤差に関して本論文で見るべき結果が得られたのは各点収束性を利用し，Fourier 級数を打ち切った残りの項に着目したからである．従来は主として打切り Fourier 級数のみに着目し，切り捨てた残りの項にはほとんど注意を払わなかった感がある．本論文で切り捨てた残りの項に元の関数の性質を顕著に示す項が存在していることを明らかにした意義は大きいと思われる．

複合多項式に関しては本論文の結果は一つの問題提起の範囲に止まっている．

まず，その具体的な計算法が与えられなければならない．しかしこれについては近い将来報告する．

次に，打切り Fourier 級数が最小自乗近似に密接に関連した関数であることに注目すると，複合多項式による最小自乗近似に関してはより詳細な議論が必要

である．

さらに複合多項式は，三角多項式の性質を色濃く残していることから，等間隔離散点で関数値が与えられたときに元の関数を近似する関数として優れた性質をもつと考えられるのでこの方面での検討が必要である．

これらの問題については追々検討し報告してゆく予定である．

謝辞 本論文での議論に関して名大工学部，鳥居達生助教授，京大数理解析研，一松信教授，東大工学部，室田一雄助手から有益な示唆をいただいた．ここに記して感謝します．

最後に日頃ご指導いただく名大工学部，福村晃夫教授，豊橋技科大，鳥脇純一郎教授に感謝します．

参考文献

1) 藤田　宏：解析入門V，岩波講座基礎数学解析学(I)(ⅱ)，p. 242，岩波書店，東京 (1981)．
2) Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., p. 608, Cambridge University Press, Cambridge(1927).
3) Abramowitz, M. and Stegun, I. (ed.): *Handbook of Mathematical Functions*, 10th ed., p. 1046, Dover Publication Inc., New York, (1972).
4) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, p. 539 (1956), Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 紀伊国屋書店，東京(1961)．
5) Hamming, R. W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed., p. 721, McGraw-Hill, Kogakusha, 東京 (1973).
6) Ciarlet, P. G., Schultz, M. H. and Varga, R. S.: Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems IV. Periodic Boundary Conditions, *Numer, Math.*, Vol. 12, pp. 266-279 (1968).
7) Cooley, J. W. and Tukey, J. W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Math. Comp.*, Vol. 19, pp. 297-301 (1965).

(昭和56年5月26日受付)
(昭和57年5月19日採録)