3項漸化式の最小解に対する安定な算法†

長谷川 武光†† 鳥 居 達 生††† 二 宮 市 三†††

非同次3項漸化式 $a_n y_{n-1}+b_n y_n+c_n y_{n+1}=e_n$ の最小解を求めることは，数値的不安定性のために従来困難とされている．同次3項漸化式の場合，Miller はその最小解を，十分大きな N と $N+1$ の項の値（$y_N=1$, $y_{N+1}=0$）を仮定し漸化式を逆向きにたどることにより安定に求めている．しかしながら，この方法では最小解の要求精度 ε に対して漸化式の項数 $N(\varepsilon)$ を自動的に決定できない．本論文では，より一般的に規格化条件 $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i y_i=k$ の下で非同次3項漸化式の最小解の重みつき有限和を，ε の精度で自動的に $N(\varepsilon)$ を決定して，能率的に計算する算法を示す．応用例として，ベッセル関数 $J_n(x)$ と不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の自動的な計算法を示す．

1. はじめに

ベッセル関数，不完全ガンマ関数などの特殊関数や特異積分の重み係数[1] 等，その次数についての線形の漸化式に従う重要な例は多い．ところで，一般に漸化式が順方向に計算された場合，丸め誤差が急速に拡大し不安定となる解（最小解）が存在する．Miller[2] は，同次3項漸化式について十分大きな項Nでの値を適当に仮定して，逆方向に計算するとこの最小解が安定に得られることを示した．このとき要求精度 ε に対して，$N(\varepsilon)$ を能率的に決めることが問題となる．Olver ら[3),4)]は，初期条件 $y_0=k$ が与えられたとき，非同次3項漸化式

$$a_n y_{n-1}+b_n y_n+c_n y_{n+1}=e_n \qquad (1)$$

の最小解に対して $N(\varepsilon)$ を決定する算法を与えた．最近，この Olver の算法の改良と高次漸化式への拡張が Cash[5),6)] によってなされた．

本論文では，初期条件の代りにより一般的な規格化条件 (normalizing condition)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n y_n=k \qquad (2)$$

が与えられたとき，非同次3項漸化式(1)の最小解の重みつき有限和 $\sum_{i=0}^{L}\alpha_i y_i$ を要求精度で求める算法を示す．この意味で本方法は Cash の方法の拡張になっている．

† Stable Algorithm for the Minimal Solution of Second Order Linear Difference Equations by TAKEMITSU HASEGAWA, TATSUO TORII and ICHIZO NINOMIYA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科．現在，福井大学工学部情報工学科
††† 名古屋大学工学部情報工学科

2. 3項漸化式の最小解と Miller の算法

非同次3項漸化式(1)は2個の独立な基本解 f_n, g_n と特解 p_n をもち，一般解 y_n は

$$y_n=Af_n+Bg_n+p_n \qquad (3)$$

と表される．ここで，A, B は任意定数である．

$$\lim_{n\to\infty} g_n/f_n=0, \quad \lim_{n\to\infty} p_n/f_n=0$$

と仮定する．基本解 f_n, g_n の漸近的振舞いは，$e_n=0$ とおいた同次漸化式(1)の係数 a_n, b_n, c_n から次の定理によって決定される．いま α, β を実数として，

$$a_n/c_n\sim an^{\alpha}, \quad b_n/c_n\sim bn^{\beta}, \quad n\to\infty$$

とする．ここで $ab\neq 0$．さらに $t^2+bt+a=0$ の根を t_1, t_2 とし，$\gamma=\alpha-\beta$ とおくと，

［定理 1[7)]］ (Perron, Kreuser)

（i） もし $\beta>\gamma$ なら，

$$f_{n+1}/f_n\sim -bn^{\beta}, \quad g_{n+1}/g_n\sim -(a/b)n^{\gamma}, \quad n\to\infty$$

（ii） もし $\beta=\gamma$ かつ $|t_1|>|t_2|$ なら，

$$f_{n+1}/f_n\sim t_1 n^{\beta}, \quad g_{n+1}/g_n\sim t_2 n^{\beta}, \quad n\to\infty$$

（iii） もし $\beta=\gamma$ かつ $|t_1|=|t_2|$ なら，

$$\lim_{n\to\infty}\sup\,[\,|y_n|/(n!)^{\beta}]^{1/n}=|t_1|$$

となる自明でない解 y_n が存在する．

（iv） もし $\gamma>\beta$ なら，

$$\lim_{n\to\infty}\sup\,[\,|y_n|/(n!)^{\alpha/2}]^{1/n}=\sqrt{|a|}$$

となる自明でない解が存在する．

一般に，Bg_n+p_n のタイプの解は漸化式(1)の最小解 (minimal solution) とよばれる．順方向に漸化式を計算すると，この最小解が安定に求められないことはよく知られている[8)]．規格化条件(2)が与えられたとき，同次3項漸化式の最小解を安定に求める

Miller の算法は次のようである．十分大きい正の整数 N に対して，$y_{N+1}^N=0$, $y_N^N=1$ とおき漸化式を逆向きに，すなわち

$$y_{n-1}^N=-(b_n y_n^N+c_n y_{n+1}^N)/a_n,\quad n=N,\ N-1,\cdots,1,$$

によって順に y_n^N を計算する．この y_n^N に対して $\mu=\sum_{n=0}^{N}\lambda_n y_n^N$ とおくと y_n^N/μ が求める最小解 y_n, $0\leqq n\leqq L$, $L<N$, の近似値となる．しかし，この算法は非同次漸化式(1)に適用できない．さらに，誤差推定能力をもちえないことも明らかである．

3. 最小解に対する誤差推定能力をもつ解法

規格化条件(2)が与えられたとき，非同次3項漸化式(1)の最小解の重みつき $L+1$ 項の和 $S_L=\sum_{i=0}^{L}\alpha_i y_i$ を ε の精度で能率的に求める算法を示す．ある整数 M に対して，$n\geqq M$ で最小解が単調に0に収束すると仮定する．実際上，M の値は次のように決定される．不等式 $|b_n|\geqq|a_n|+|c_n|$ を常に満たす最小の n を M とおく．すなわち $n\geqq M$ に対して $|b_n|\geqq|a_n|+|c_n|$ で $|b_{M-1}|<|a_{M-1}|+|c_{M-1}|$．たとえば，ベッセル関数 $J_n(x)$ の場合 $M=[x]$ である．以上の準備をした後，本問題をある大きな整数 $N(>M,\ L)$ に対して $y_{N+1}^N=0$ とおいて連立方程式

$$A\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^N\\ S_L^N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ 0\end{bmatrix} \tag{4}$$

を解く問題におきかえる．ここで

$$A=\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & 0\\
& a_2 & b_2 & c_2 & & & & & 0\\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
& & a_M & b_M & c_M & & & & \\
\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{M-1} & & \lambda_M & \lambda_{M+1} & \lambda_{M+2}\cdots & & \lambda_N & & 0\\
& & & a_{M+1} & b_{M+1} & c_{M+1} & & & \vdots\\
& & & & a_{M+2} & b_{M+2} & c_{M+2} & & \\
& & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & 0\\
& & & & & & a_N & b_N & \\
\alpha_0\ \alpha_1\cdots & & \alpha_{L-1} & \alpha_L & 0\cdots & & & 0 & -1
\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y}^N=[y_0^N, y_1^N,\cdots, y_N^N]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{e}=[e_1, e_2,\cdots, e_M, k, e_{M+1}, e_{M+2},\cdots, e_N]^{\mathrm{T}}$$

すると $S_L^N=\sum_{i=0}^{L}\alpha_i y_i^N$ は求める S_L の近似値となる．ここで A と $\boldsymbol{e}$ も N に依存するが，この依存性を明記することを省略した．

以下で S_L^N の誤差評価について述べる．行列 A は次のようにも表現することができる．

$$A=\begin{bmatrix}B+\boldsymbol{u}_M\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} & 0\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -1\end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで

$$B=\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & & & & & \\
& a_2 & b_2 & c_2 & & & \mathbf{0} & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
& & a_M & b_M & c_M & & & \\
\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{M-1} & & \lambda_M & \lambda_{M+1} & & & & \\
& & & a_{M+1} & b_{M+1} & c_{M+1} & & \\
& \mathbf{0} & & & a_{M+2} & b_{M+2} & c_{M+2} & \\
& & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1}\\
& & & & & & a_N & b_N
\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=[0, 0,\cdots, 0, \lambda_{M+2}, \lambda_{M+3},\cdots, \lambda_N]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_0, \alpha_1,\cdots,\ \alpha_L, 0,\cdots, 0]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{u}_M$ は $u_i=0(0\leqq i\leqq N,\ i\neq M)$, $u_M=1$ である単位ベクトルとする．さらに B を LU 分解する．

$$B=LU \tag{7}$$

ここで

$$L=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& 1 & & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & 1 & & & \\
\mu_0\mu_1\cdots\mu_{M-1} & & & 1 & & & \\
& & & \gamma_{M+1} & 1 & & \\
& & & & \gamma_{M+2} & 1 & \\
& & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & \gamma_N & 1
\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\
& a_2 & b_2 & c_2 & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & a_M & b_M & c_M & & \\
& & & d_M & q_M & 0 & \\
& & & & d_{M+1} & c_{M+1} & 0\\
& & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & d_{N-1} & c_{N-1}\\
& & & & & & d_N
\end{bmatrix}$$

具体的に LU 分解成分は，以下のように縁取り法によって順に N を $M+2$, $M+3,\cdots$ と大きくしながら帰納的に計算される．いま M 段階の M 次の行列 B の LU 分解は自明であって $L'=I$ で

$$U'=\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & & & \mathbf{0}\\
& a_2 & b_2 & c_2 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} & \\
& \mathbf{0} & & a_{M-1} & b_{M-1} & \\
& & & & a_M &
\end{bmatrix}$$

となる．これを使って $M+1$ 次と $M+2$ 次の行列 B の LU 分解の L の要素 $\mu_0, \mu_1,\cdots,\mu_{M-1}, \gamma_{M+1}$ と U の要素 d_M, d_{M+1}, q_M を計算する．ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\lambda}'$ をそれぞれ $\boldsymbol{\mu}=[\mu_0,\ \mu_1,\cdots,\ \mu_{M-1}]^{\mathrm{T}}$ および $\boldsymbol{\lambda}'=[\lambda_0,\ \lambda_1,$

$\cdots, \lambda_{M-1}]^T$ とおくと，(7)から $\boldsymbol{\mu}^T U' = \boldsymbol{\lambda}'^T$ が成り立つ．すなわち $U'^T \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}'$．したがって，次のように順代入によって μ_i, $i=0, 1, \cdots, M-1$, が求められる．

$$\begin{aligned} &\mu_0 = \lambda_0/a_1 \\ &\mu_1 = (\lambda_1 - \mu_0 b_1)/a_2 \\ &\mu_i = (\lambda_i - \mu_{i-1} b_i - \mu_{i-2} c_{i-1})/a_{i+1} \\ &i = 2, 3, \cdots, M-1 \end{aligned} \tag{8}$$

さらに

$$\begin{aligned} &q_M = \lambda_{M+1} - c_M b_{M-1} \\ &d_M = \lambda_M - \mu_{M-1} b_M - \mu_{M-2} c_{M-1} \\ &\gamma_{M+1} = a_{M+1}/d_M \\ &d_{M+1} = b_{M+1} - q_M \gamma_{M+1} \end{aligned} \tag{9}$$

以上で $M+2$ 次のBの LU 分解の要素がすべて確定した．これを出発値として $N+1$ 次のBの LU 分解を行う．

$$\begin{aligned} &\gamma_i = a_i/d_{i-1} \\ &d_i = b_i - c_{i-1}\gamma_{i-1} \\ &i = M+2, M+3, \cdots, N \end{aligned} \tag{10}$$

もしベクトル $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}$ を $L^{-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{t}$, $U\boldsymbol{y}^N = \boldsymbol{x}$, $U^{-T}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ とおけば(4)を解く問題は

$$(I + L^{-1}\boldsymbol{u}_M \boldsymbol{\lambda}^T U^{-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x} = S_L^N \tag{12}$$

と変形される．ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $L^{-1}\boldsymbol{u}_M = \boldsymbol{v}$, $U^{-T}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{w}$ によって定義し，(11)を $\boldsymbol{x}$ について解くと

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} - p^N \boldsymbol{v} \tag{13}$$

$$p^N = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{t}/(1 + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v}) \tag{14}$$

したがって(12)，(13)より，求めるべき最小解の重みつき有限和 S_L^N は

$$S_L^N = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{t} - p^N \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{v} \tag{15}$$

となる．以上において $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}$ の N への依存性を明記することを省略した．4個のベクトル $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}$ はそれぞれ下三角行列Lまたは U^T を係数行列にもつ次の4組の連立方程式

$$\begin{aligned} &U^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}, \quad U^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\lambda} \\ &L\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_M, \quad L\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{16}$$

を順代入により解くことによって得られる．具体的に成分で表すと，$L^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$ より

$$\begin{aligned} &\beta_0 = \alpha_0/a_1 \\ &\beta_1 = (\alpha_1 - b_1\beta_0)/a_2 \\ &\beta_i = (\alpha_i - b_i\beta_{i-1} - c_{i-1}\beta_{i-2})/a_{i+1} \\ &\quad i = 2, 3, \cdots, M-1 \\ &\beta_M = (\alpha_M - b_M\beta_{M-1} - c_{M-1}\beta_{M-2})/d_M \\ &\beta_{M+1} = (\alpha_{M+1} - \beta_M q_M - \beta_{M-1} c_M)/d_{M+1} \\ &\beta_i = (\alpha_i - \beta_{i-1} c_{i-1})/d_i \\ &\quad i = M+2, M+3, \cdots, N \end{aligned} \tag{17}$$

ここで便宜上 $\alpha_i = 0$ $(i > L)$ とおいた．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は $U^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\lambda}$ より

$$\begin{aligned} &w_0 = w_1 = \cdots = w_{M+1} = 0 \\ &w_{M+2} = \lambda_{M+2}/d_{M+2} \\ &w_i = (\lambda_i - c_{i-1} w_{i-1})/d_i \\ &\quad i = M+3, M+4, \cdots, N \end{aligned} \tag{18}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $L\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_M$ より

$$\begin{aligned} &v_0 = v_1 = \cdots = v_{M-1} = 0, \ v_M = 1 \\ &v_i = -\gamma_i v_{i-1}, \ i = M+1, M+2, \cdots, N \end{aligned} \tag{19}$$

さらにベクトル $\boldsymbol{t}$ は定義 $L\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}$ より

$$\begin{aligned} &t_i = e_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, M-1 \\ &t_M = k - \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i t_i \\ &t_i = e_i - \gamma_i t_{i-1}, \ i = M+1, M+2, \cdots, N \end{aligned} \tag{20}$$

以上のようにして，ベクトル $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}$ が計算されると，(14)と(15)より S_L^N と p^N は

$$S_L^N = \sum_{i=0}^{N} \beta_i t_i - p^N \sum_{i=M}^{N} \beta_i v_i \tag{21}$$

$$p^N = \sum_{i=M+2}^{N} w_i t_i \Big/ \left(1 + \sum_{i=M+2}^{N} w_i v_i\right) \tag{22}$$

と表される．

ここで数列 S_L^N の N についての収束の速さを調べよう．上三角行列Uの対角成分 d_N は，(10)より次の漸化式

$$d_N = b_N - c_{N-1} a_N / d_{N-1} \tag{23}$$

によって順に計算される．もし

$$d_N = -c_N y_{N+1}/y_N \tag{24}$$

とおくと d_N に関する漸化式(23)は y_N に関する漸化式

$$a_N y_{N-1} + b_N y_N + c_N y_{N+1} = 0 \tag{25}$$

となる．したがって d_N は同次漸化式(25)を順方向に計算して得られた解 y_N（これは2個の基本解の一方の解 f_N に比例する）を(24)に代入して

$$d_N = -c_N f_{N+1}/f_N \tag{26}$$

と表される．さらにこれを(10)に用いると

$$\gamma_N = a_N/d_{N-1} = -a_N f_{N-1}/(c_{N-1} f_N) \tag{27}$$

が得られる．

定理1の(i)の場合を仮定すると，(26)，(27)より

$$d_N/c_N \sim -bN^{\beta}, \quad \gamma_N \sim (a/b)N^{\alpha-\beta}, \quad N \to \infty \tag{28}$$

ここで条件 $|a_N| + |c_N| < |b_N|$ より $\alpha < 0$ ならば $\beta > 0$．もし $\alpha > 0$ ならば $\beta > \alpha$．いずれにしても $\beta > 0$ が成り立つ．漸近的性質(28)を(17)～(20)に用いると，

$$\beta_N/\beta_{N-1}\sim N^{-\beta}/b,\quad v_N/v_{N-1}\sim -(a/b)N^{\alpha-\beta}$$
$$w_N\sim -(\lambda_N/c_N)N^{-\beta}/b,\quad t_N\sim e_N,\quad N\to\infty$$

となる．ここで(1)，(2)に現れる係数，λ_N/c_N, e_N は通常，たかだかNのべき乗のオーダとして十分であろう．したがって

$$\begin{aligned}&\beta_N=O((N!)^{-\beta}),\quad v_N=O((N!)^{\alpha-\beta})\\&w_N=O(N^{\xi}),\quad t_N=O(N^{\zeta}),\quad N\to\infty\end{aligned}\tag{29}$$

ここで ξ, ζ は定数である．漸近的振舞い(29)を考慮すれば，(21)と(22)で表された求めるべき和 S_L の近似値 S_L^N ($|S_L-S_L^N|\sim O((N!)^{-\beta})$) は$N$とともに急速に収束することがわかる．定理1のその他の場合にも同様に考察すればよい．

さて数列 S_L^N, $N=L+1$, $L+2, \cdots$, が十分速く収束するならば S_L^N の誤差を次式によって推定できる．

$$S_L^{N+1}-S_L^N=\beta_{N+1}t_{N+1}-p^{N+1}\sum_{i=M}^{N+1}\beta_i v_i+p^N\sum_{i=M}^{N}\beta_i v_i\tag{30}$$

要求絶対誤差 ε_a に対して，Nは(30)を用いて次式を満足するように決定される．

$$|S_L^{N+1}-S_L^N|<\varepsilon_a\tag{31}$$

要求相対誤差 ε_r に対しては，(21)と(30)を用いて

$$|(S_L^{N+1}-S_L^N)/S_L^N|<\varepsilon_r\tag{32}$$

表 1 非同次3項漸化式 $y_{n-1}-(17/4)y_n+y_{n+1}=-(7/4)2^{-n}$ の最小解 y_n とその重みつき和 $S=\sum_{n=0}^{16}2^n y_n$ の計算値と真値

Table 1 The comparison of calculated values and their true ones of the minimal solution y_n and its weighted sum $S=\sum_{n=0}^{16}2^n y_n$ of inhomogeneous three term recurrence relation $y_{n-1}-(17/4)y_n+y_{n+1}=-(7/4)2^{-n}$.

N	EXACT VALUE	EPSA=1.0D-6		EPSA=1.0D-12	
0	0.2500000000000000D+00	0.250000104308D+00	0.10D-06	0.2500000000003981D+00	0.40D-12
1	0.3125000000000000D+00	0.312500026077D+00	0.26D-07	0.3125000000000995D+00	0.99D-13
2	0.2031250000000000D+00	0.203125006519D+00	0.65D-08	0.2031250000000249D+00	0.25D-13
3	0.1132812500000000D+00	0.113281251630D+00	0.16D-08	0.1132812500000062D+00	0.62D-14
4	0.5957031250000000D-01	0.595703129075D-01	0.41D-09	0.5957031250000155D-01	0.15D-14
5	0.3051757812500000D-01	0.305175782269D-01	0.10D-09	0.3051757812500038D-01	0.38D-15
6	0.1544189453125000D-01	0.154418945567D-01	0.25D-10	0.1544189453125010D-01	0.96D-16
7	0.7766723632812500D-02	0.776672363918D-02	0.64D-11	0.7766723632812523D-02	0.23D-16
8	0.3894805908203125D-02	0.389480590979D-02	0.16D-11	0.3894805908203131D-02	0.56D-17
9	0.1950263977050781D-02	0.195026397745D-02	0.40D-12	0.1950263977050782D-02	0.10D-17
10	0.9758472442626953D-03	0.975847244362D-03	0.99D-13	0.9758472442626956D-03	0.27D-18
11	0.4881024360656738D-03	0.488102436090D-03	0.24D-13	0.4881024360656738D-03	0.0
12	0.2440959215164185D-03	0.244095921519D-03	0.27D-14	0.2440959215164184D-03	0.14D-19
13	0.1220591366291046D-03	0.122059136616D-03	0.13D-13	0.1220591366291046D-03	0.68D-20
14	0.6103236228227615D-04	0.610323622258D-04	0.56D-13	0.6103236228227615D-04	0.0
15	0.3051687963306904D-04	0.305168794058D-04	0.23D-12	0.3051687963306904D-04	0.34D-20
16	0.1525861443951726D-04	0.152586135300D-04	0.91D-12	0.1525861443951726D-04	0.85D-21
17	0.7629350875504315D-05	0.762934723753D-05	0.36D-11	0.7629350875504314D-05	0.85D-21
18	0.3814686351688579D-05	0.381467179978D-05	0.15D-10	0.3814686351688579D-05	0.21D-21
19	0.1907345904328395D-05	0.190728769667D-05	0.58D-10	0.1907345904328394D-05	0.21D-21
20	0.9536736342852237D-06	0.953440803652D-06	0.23D-09	0.9536736342852236D-06	0.53D-22
21	0.4768369876728684D-06	0.475905665140D-06	0.93D-09	0.4768369876728684D-06	0.53D-22
22	0.2384185364689984D-06	0.234693246337D-06	0.37D-08	0.2384185364689983D-06	0.13D-22
23	0.1192092788926402D-06	0.104308118365D-06	0.15D-07	0.1192092788926402D-06	0.13D-22
24	0.5960464211085537D-07			0.5960464211085536D-07	0.33D-23
25	0.2980232172156150D-07			0.2980232172156148D-07	0.13D-22
26	0.1490116102731420D-07			0.1490116102731415D-07	0.53D-22
27	0.7450580555290465D-08			0.7450580555290253D-08	0.21D-21
28	0.3725290288053573D-08			0.3725290288052726D-08	0.85D-21
29	0.1862645146628872D-08			0.1862645146625484D-08	0.34D-20
30	0.9313225739649572D-09			0.9313225739514047D-09	0.14D-19
31	0.4656612871451089D-09			0.4656612870908988D-09	0.54D-19
32	0.2328306436132120D-09			0.2328306433963716D-09	0.22D-18
33	0.1164153218167704D-09			0.1164153209494087D-09	0.87D-18
34	0.5820766091092631D-10			0.5820765744147936D-10	0.35D-17
35	0.2910383045609843D-10			0.2910381657831062D-10	0.14D-16
36	0.1455191522820803D-10			0.1455185971705680D-10	0.56D-16
37	0.7275957614143721D-11			0.7275735569538796D-11	0.22D-15
38	0.3637978807081787D-11			0.3637090628662087D-11	0.89D-15
39	0.1818989403543375D-11			0.1815436689864575D-11	0.36D-14
40	0.9094947017723079D-12			0.8952838470571083D-12	0.14D-13
41	0.4547473508863090D-12			0.3979039320255107D-12	0.57D-13
S=	0.1550001144409180D+02	0.155000115846D+02	0.14D-06	0.1550001144409259D+02	0.79D-12

を満足するように N が決定される．最小解の近似値 y_i^N は(13)で与えられるベクトル $\boldsymbol{x}$ を定ベクトルとする連立方程式 $U\boldsymbol{y}^N=\boldsymbol{x}$ を逆代入によって解くことにより得られる．

$$
\begin{aligned}
&y_N^N=(t_N-p^N v_N)/d_N\\
&y_i^N=(t_i-p^N v_i-y_{i+1}^N c_i)/d_i\\
&\quad i=N-1,\ N-2,\cdots,\ M+1\\
&y_M^N=(t_M-p^N v_M-y_{M+1}^N q_M)/d_M\\
&y_i^N=(t_i-p^N v_i-y_{i+1}^N b_{i+1}-y_{i+2}^N c_{i+1})/a_{i+1}\\
&\quad i=M-1, M-2,\cdots,1
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

次に本節で述べた算法の計算量について調べよう．LU 分解(8)，(9)，(10)において乗算 $N+M$ 回，除算N回が必要である．さらに，(17)～(20)式の計算において必要な乗算は $4N-2$ 回，除算は $2N-M$ 回である．式(21)，(22)を評価するために乗算 $4N-3M+1$ 回，除算 1 回が必要である．したがって，最小解の重みつき和 S_L^N に必要な演算量は，乗算が $9N-2M-1$ 回，除算が $3N-M+1$ 回である．さらに最小解 y_i^N $(0\leqq i\leqq L)$ が必要ならば，(33)に対して乗算が $2N+M-2$ 回，除算がN回必要となる．すなわち，全体として乗算 $11N-M-3$ 回，除算 $4N-M+1$ 回となる．

4. 数 値 例

4.1 問 題 1

規格化条件 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n=1$ が与えられたとき，非同次 3 項漸化式

$$y_{n-1}-\frac{17}{4}y_n+y_{n+1}=-\frac{7}{4}\cdot 2^{-n}$$

の最小解の重みつき和 $S_{16}=\sum_{n=0}^{16} 2^n y_n$ を $\varepsilon_a=10^{-6}$, 10^{-12} で求める．この漸化式は二つの基本解 4^n, 4^{-n} と特解 2^{-n} をもち，求めるべき最小解は $y_n=2^{-n}-3\cdot 4^{-n-1}$ である．この問題では $M=0$ であり，定理 1 の(ii)で $\alpha=\beta=0$, $t_1=4$, $t_2=1/4$ の場合に対応する．したがって $f_{N+1}/f_N\sim 4$ である．これを(26)，(27)に代入し，$\alpha_{16}=2^{16}$ であることを考慮すると，(17)～(22)より S_{16}^N の収束の速さは 2^{-N} となる，**表 1** において，本方法で計算された最小解 y_n と S_{16} がそれらの真値と比較されている．表 1 の第 4 列と第 6 列の値は，それぞれ $\varepsilon_a=10^{-6}$, 10^{-12} で計算された y_n と S_{16} の絶対誤差を示している．表 1 から，$\varepsilon_a=10^{-12}$ の精

表 2　ベッセル関数 $J_n(5.0)$ の計算値と真値の比較

Table 2　The comparison of calculated values and their exact ones of Bessel function $J_n(5.0)$ for non-negative integer n.

X=　5.00　　L= 20

N	EXACT VALUE	EPSR=1.0D-6		EPSR=1.0D-12	
0	-0.177596771314338 3D+00	-0.177596771314D+00	0.55D-15	-0.1775967713143381D+00	0.70D-15
1	-0.3275791375914653D+00	-0.327579137591D+00	0.42D-16	-0.3275791375914652D+00	0.17D-15
2	0.4656511627775205D-01	0.465651162778D-01	0.20D-15	0.4656511627775206D-01	0.20D-15
3	0.3648312306136669D+00	0.364831230614D+00	0.76D-16	0.3648312306136669D+00	0.11D-15
4	0.3912323604586482D+00	0.391232360459D+00	0.71D-16	0.3912323604586481D+00	0.14D-15
5	0.2611405461201702D+00	0.261140546120D+00	0.53D-16	0.2611405461201701D+00	0.16D-15
6	0.1310487317816921D+00	0.131048731782D+00	0.0	0.1310487317816920D+00	0.21D-15
7	0.5337641015589075D-01	0.533764101559D-01	0.26D-15	0.5337641015589073D-01	0.37D-15
8	0.1840521665480201D-01	0.184052166548D-01	0.14D-15	0.1840521665480201D-01	0.33D-15
9	0.5520283139475691D-02	0.552028313948D-02	0.16D-15	0.5520283139475690D-02	0.31D-15
10	0.1467802647310475D-02	0.146780264731D-02	0.55D-15	0.1467802647310474D-02	0.70D-15
11	0.3509274497662094D-03	0.350927449766D-03	0.46D-15	0.3509274497662091D-03	0.62D-15
12	0.7627813166084560D-04	0.762781316608D-04	0.80D-15	0.7627813166084553D-04	0.98D-15
13	0.1520758220584948D-04	0.152075822058D-04	0.84D-15	0.1520758220584946D-04	0.10D-14
14	0.2801295809571656D-05	0.280129580957D-05	0.91D-15	0.2801295809571653D-05	0.11D-14
15	0.4796743277517965D-06	0.479674327752D-06	0.12D-14	0.4796743277517958D-06	0.13D-14
16	0.7675015693912252D-07	0.767501569391D-07	0.12D-14	0.7675015693912241D-07	0.14D-14
17	0.1152667665858770D-07	0.115266766586D-07	0.39D-14	0.1152667665858767D-07	0.18D-14
18	0.1631244339273786D-08	0.163124433927D-08	0.11D-12	0.1631244339273783D-08	0.19D-14
19	0.2182825841835626D-09	0.218282584182D-09	0.57D-11	0.2182825841835622D-09	0.20D-14
20	0.2770330052128948D-10	0.277033005121D-10	0.33D-09	0.2770330052128941D-10	0.26D-14
21	0.3343819986753197D-11	0.334381991410D-11	0.22D-07	0.3343819986753135D-11	0.19D-13
22	0.3847873674373731D-12	0.384786766356D-12	0.16D-05	0.3847873674369228D-12	0.12D-11
23	0.4230884669568479D-13	0.423036298330D-13	0.12D-03	0.4230884669178550D-13	0.92D-10
24	0.4454022162926892D-14	0.440662810760D-14	0.11D-01	0.4454022127503823D-14	0.80D-08
25	0.4497660684134064D-15			0.4497657322512022D-15	0.75D-06
26	0.4363852120717190D-16			0.4363519500820144D-16	0.76D-04
27	0.4074552141181138D-17			0.4040295834092726D-17	0.84D-02

表 3 不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の $x=10.0$, $\nu=n+0.6$, $n=0,1,2,\cdots$, に対する計算値とその真値

Table 3 The comparison of calculated values and their exact ones of incomplete gamma function $\gamma(\nu, x)$ with $x=10.0$, $\nu=n+0.6$, $n=0,1,2,\cdots$.

X= 10.0 L= 3 NU= 3.6

NU	EXACT VALUE	EPSR=1.D-6			EPSR=1.D-12		
0.6	0.148917481496488OD+01	0.99998866D+00	0.14891754D+01	0.37D-06	0.9999882930845230D+00	0.1489174814965031D+01	0.10D-12
1.6	0.8933241486031175D+00	0.99978638D+00	0.89332448D+00	0.37D-06	0.9997860129827264D+00	0.8933241486032080D+00	0.10D-12
2.6	0.1427511234006881D+01	0.99852213D+00	0.14275118D+01	0.37D-06	0.9985217623464976D+00	0.1427511234007025D+01	0.10D-12
3.6	0.3693455170836820D+01	0.99365963D+00	0.36934565D+01	0.37D-06	0.9936592598994638D+00	0.3693455170837192D+01	0.10D-12
4.6	0.1311569823920181D+02	0.98015266D+00	0.13115703D+02	0.36D-06	0.9801523086577038D+00	0.1311569823920315D+02	0.10D-12
5.6	0.5852480814222123D+02	0.95078970D+00	0.58524829D+02	0.35D-06	0.9507893711756171D+00	0.5852480814222715D+02	0.10D-12
6.6	0.3096648880153696D+03	0.89835585D+00	0.30966499D+03	0.33D-06	0.8983555542433198D+00	0.3096648880153986D+03	0.94D-13
7.6	0.1863047885090733D+04	0.81891061D+00	0.18630484D+04	0.28D-06	0.8189103770731721D+00	0.1863047885090897D+04	0.88D-13
8.6	0.1235176016858255D+05	0.71437740D+00	0.12351763D+05	0.21D-06	0.7143772492177143D+00	0.1235176016858346D+05	0.73D-13
9.6	0.8815109986873942D+05	0.59282716D+00	0.88151109D+05	0.10D-06	0.5928271005485770D+00	0.8815109986874428D+05	0.55D-13
10.6	0.6655101829291962D+06	0.46621233D+00	0.66551013D+06	0.79D-07	0.4662123623515590D+00	0.6655101829292102D+06	0.21D-13
11.6	0.5247004180942453D+07	0.34676437D+00	0.52470022D+07	0.37D-06	0.3467644961279569D+00	0.5247004180942271D+07	0.35D-13
12.6	0.4279121091786204D+08	0.24379199D+00	0.42791175D+08	0.85D-06	0.2437921976593343D+00	0.4279121091785675D+08	0.12D-12
13.6	0.3584288817543594D+09	0.16206788D+00	0.35842829D+09	0.17D-05	0.1620681512556655D+00	0.3584288817542596D+09	0.28D-12
14.6	0.3067229033752263D+10	0.10197663D+00	0.30672195D+10	0.31D-05	0.1019769406647326D+00	0.3067229033750570D+10	0.55D-12
15.6	0.2670750631171266D+11	0.60818230D-01	0.26707354D+11	0.57D-05	0.6081857724628540D-01	0.2670750631168457D+11	0.11D-11
16.6	0.2358967226620142D+12	0.34434644D-01	0.23589421D+12	0.11D-04	0.3443501095240897D-01	0.2358967226515430D+12	0.20D-11
17.6	0.2108481837916409D+13	0.18540917D-01	0.21084387D+13	0.20D-04	0.1854129631754364D-01	0.2108481837908263D+13	0.39D-11
18.6	0.1903524276625864D+14	0.95103905D-02	0.19034470D+14	0.41D-04	0.9510776638642884D-02	0.1903524276611190D+14	0.77D-11
19.6	0.1733151396417090D+15	0.46552687D-02	0.17330063D+15	0.84D-04	0.4655658531706994D-02	0.1733151396389466D+15	0.16D-10
20.6	0.1589572978870470D+16	0.21781657D-02	0.15892872D+16	0.18D-03	0.2178557456739703D-02	0.1589572978816024D+16	0.34D-10
21.6	0.1467116578366154D+17	0.97568857D-03	0.14665264D+17	0.40D-03	0.9760812067555807D-03	0.1467116578253654D+17	0.77D-10
22.6	0.1361568051163875D+18	0.41898617D-03	0.13602919D+18	0.94D-03	0.4193792391703389D-03	0.1361568050920542D+18	0.18D-09
23.6	0.1269740037523338D+19	0.17265768D-03	0.12668546D+19	0.23D-02	0.1730509349290815D-03	0.1269740036973089D+19	0.43D-09
24.6	0.1189182730448053D+20	0.68281202D-04	0.11823717D+20	0.57D-02	0.6867453482685380D-04	0.1189182729149138D+20	0.11D-08
25.6	0.1117985758795192D+21	0.25851739D-04	0.11012293D+21	0.15D-01	0.2624510389098888D-04	0.1117985755599530D+21	0.29D-08
26.6	0.1054639784408673D+22	0.92777300D-05	0.10117417D+22	0.41D-01	0.9671107431666636D-05	0.1054639776227450D+22	0.78D-08
27.6	0.9979380684200489D+22	0.30468995D-05	0.88382789D+22	0.11D+00	0.3440281695079328D-05	0.9979380466576727D+22	0.22D-07
28.6	0.9469053107323174D+23	0.78935220D-06	0.63195984D+23	0.33D+00	0.1182736138344796D-05	0.9469052506678257D+23	0.63D-07
29.6	0.9007454305874106D+24				0.3933845450809731D-06	0.9007452588026416D+24	0.19D-06
30.6	0.8588027164317106D+25				0.1267117095188709D-06	0.8588022079484753D+25	0.59D-06
31.6	0.8205325541740174D+26				0.3956372404105970D-07	0.8205309982149779D+26	0.19D-05
32.6	0.7854791130828764D+27				0.1198524762403084D-07	0.7854741962520007D+27	0.63D-05
33.6	0.7532581505431543D+28				0.3525592281383949D-08	0.7532421216741756D+28	0.21D-04
34.6	0.7235436277179819D+29				0.1007837715119994D-08	0.7234897707178760D+29	0.74D-04
35.6	0.6960571937972008D+30				0.2801629849859032D-09	0.6958708485765057D+30	0.27D-03
36.6	0.6705598518110129D+31				0.7575997090329336D-10	0.6698964628250302D+31	0.99D-03
37.6	0.6468452995212906D+32				0.1991215284793547D-10	0.6444172958322730D+32	0.38D-02
38.6	0.6247345680930355D+33				0.5059009748106243D-11	0.6156052742219962D+33	0.15D-01
39.6	0.6040716747320977D+34				0.1211045214471728D-11	0.5688326003895583D+34	0.58D-01
40.6	0.5847200738320833D+35				0.2393369989074561D-12	0.4451733394353081D+35	0.24D+00

度を達成するためには $N=41$ が必要であることがわかり，上述の理論的予測ともほぼ一致する．17 個の最小解 y_i, $i=0, 1, \cdots, 16$, の計算値も要求精度を満足している．

4.2 問 題 2

ベッセル関数 $J_n(x)$ は同次 3 項漸化式

$$y_{n-1}-\frac{2n}{x}y_n+y_{n+1}=0$$

の最小解である．規格化条件 $J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)=1$ が与えられたとき，$\varepsilon_r=10^{-6}$, 10^{-12} で $J_{20}(5.0)$ を求める．定理 1 の(i)より $J_{n+1}(x)/J_n(x)\sim x/(2n)$, $f_{n+1}/f_n\sim 2n/x$, $n\to\infty$ となる．これを(26)，(27)に代入し(17)～(22)を用いると N に対する $J_L(x)$ の近似値の収束の速さは $(x/2)^{N-M}M!/N!|(x/2)^{N-L}L!/N!-(x/2)^{L-M}M!/L!|$ となる．ここで $M=[x]$ である．**表 2** において，計算された $J_n(5.0)$, $n=0, 1, \cdots, 20$, の値をそれぞれ真値と比較した．表 2 における第 4 列と第 6 列の値は，それぞれ $\varepsilon_r=10^{-6}$, 10^{-12} で計算された $J_n(5.0)$ の相対誤差を示している．表 2 より $\varepsilon_r=10^{-12}$ の精度で $J_{20}(5.0)$ を求めるためには，$N=27$ であることがわかる．この場合，上述の収束の速さの理論値は約 8.5×10^{-25} であり，一方 $|J_{20}(5.0)|\sim2.8\times10^{-11}$ であるから確かに相対誤差 10^{-12} が保証される．表 2 はすべての $J_n(5.0)$, $n=0,1,2,\cdots,20$, の計算値が要求精度を満足していることを示している．

4.3 問 題 3

不完全ガンマ関数は $\gamma(\nu,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\nu-1}dt$ は次のように漸化式によって計算される．$\Gamma(\nu)$ をガンマ関数として $P(\nu,x)$ を

$$P(\nu,x)=\gamma(\nu,x)/\Gamma(\nu) \qquad (34)$$

によって定義すると，$P(\nu,x)$ の満足する漸化式は

$$\nu P(\nu+1,x)-(\nu+x)P(\nu,x)+xP(\nu-1,x)=0$$

したがって $g_n=P(\nu+n,x)$ は次の漸化式の最小解である．

$$xg_{n-1}-(x+\nu+n)g_n+(\nu+n)g_{n+1}=0 \qquad (35)$$

定理 1 の(i)によって $f_{n+1}/f_n\sim1$, $g_{n+1}/g_n\sim x/n$, $n\to\infty$ である．規格化条件は $\lambda_n=\Gamma(\nu+n)/\{n!\Gamma(\nu)\}$ とおくと，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n g_n=x^{\nu}/\Gamma(\nu+1) \qquad (36)$$

である．証明は次のように簡単に示される．

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n g_n &=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\nu+n)/\{n!\Gamma(\nu)\}\\ &\quad\times\int_0^x e^{-t}t^{\nu+n-1}dt/\Gamma(\nu+n)\\ &=\int_0^x e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}(t^n/n!)t^{\nu-1}dt/\Gamma(\nu)\\ &=\int_0^x t^{\nu-1}dt/\Gamma(\nu)=x^{\nu}/\Gamma(\nu+1)\end{aligned}$$

実際的には，λ_n は $\lambda_0=1$ として $\lambda_n=\{(\nu+n-1)/n\}\lambda_{n-1}$ によって順に計算される．もし $0<\nu<1$ に ν を限定すれば，$0<\lambda_n<\lambda_{n-1}<1$, $n>1$, となる．

漸化式(35)は任意の n に対して $|a_n|+|c_n|=|b_n|$ であるが，$M=0$ として本方法を適用して $\varepsilon_r=10^{-6}$, 10^{-12} の精度で $\gamma(\nu=3.6,\ x=10.0)$ の値を求める．**表 3** において第 2 列は，$\gamma(\nu,\ x=10.0)$ $\nu=n+0.6$, $n=0,1,2,\cdots$, の真値であり，第 3 列と第 4 列はそれぞれ $\varepsilon_r=10^{-6}$ に対する $g_n=P(\nu,x=10.0)$, $\nu=n+0.6$, $n=0,1,\cdots$, の計算値とこれを $\Gamma(\nu)$ 倍した不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu,\ x=10.0)$ の計算値である．第 5 列は第 4 列で示される $\gamma(\nu,\ x=10.0)$ の計算値の相対誤差を示している．第 6 列から第 8 列は $\varepsilon_r=10^{-12}$ に対する同様の結果である．表 3 からわかるように，$\gamma(\nu=3.6,\ x=10.0)$ の値を $\varepsilon_r=10^{-6}$, 10^{-12} で求めるために必要な N はそれぞれ 28 と 40 である．さて $f_{n+1}/f_n\sim1$ を(26)，(27)に代入し(17)～(22)を用いると，$L=[\nu]$ として $g_L=\gamma(\nu,x)/\Gamma(\nu)$ の収束の速さは $x^N/(L\cdot e^x\cdot N!)$ となる．この値は，$\nu=3.6$, $x=10.0$, $N=28$ に対して約 5×10^{-7} である．これと $|g_3|\sim1.0$ であることから $\gamma(\nu=3.6,\ x=10.0)$ を $\varepsilon_r=10^{-6}$ で求めるためには $N=28$ が必要であったことが理論的にも確認される．

5. 結論および討論

本論文において，規格化条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n y_n=k$ が与えられたときの非同次 3 項漸化式の最小解の重みつき和 $\sum_{i=0}^{L}\alpha_i y_i$ を任意の精度で能率的に求める方法を示した．本方法を 4 項以上の高次の非同次漸化式の最小解を求める問題に適用できるように拡張することは今後の課題である．特異積分を数値計算する際，生ずる重み係数[1] の計算に本方法を適用した結果は別に発表する．

参 考 文 献

1) Piessens, R. and Branders, M.: Numerical

Solution of Integral Equations of Mathematical Physics Using Chebyshev Polynomials, *J. Comput. Phys.*, Vol. 21, No. 2, pp. 178-195 (1976).

2) British Association for the Advancement of Science: Mathematical Tables, *Bessel Functions*, Part II, Vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge (1952).

3) Olver, F. W. J.: Numerical Solution of Second-Order Linear Difference Equations, *J. Res. Nat. Bur. Stand. Sect. B*, Vol. 71 B, pp. 111-129 (1967).

4) Olver, F. W. J. and Sookne, D. J.: Note on Backward Recurrence Algorithms, *Math. Comp.*, Vol. 26, No. 120, pp. 941-947 (1972).

5) Cash, J. R.: An Extension of Olver's Method for the Numerical Solution of Linear Recurrence Relations, *Math. Comp.*, Vol. 32, No. 142, pp. 497-510 (1978).

6) Cash, J. R.: A Note on the Numerical Solution of Linear Recurrence Relations, *Numer. Math.*, Vol. 34, No. 4, pp. 371-386 (1980).

7) Gautschi, W.: Computational Aspect of Three-Term Recurrence Relations, *SIAM Rev.*, Vol. 9, pp. 24-82 (1967).

8) Oliver, J.: Relative Error Propagation in the Recursive Solution of Linear Recurrence Relations, *Numer. Math.*, Vol. 9, No. 4, pp. 323-340 (1967).

(昭和57年1月18日受付)
(昭和57年4月19日採録)