マトロイド理論による連立方程式の構造的可解性判定†

室田一雄†† 伊理正夫††

大規模システムの設計や解析においてグラフ／マトロイド理論が有効である．本論文では，現実的な状況設定の下で，一般に非線形の連立方程式の構造的可解性を定式化し，そのための必要十分条件を，連立方程式に関連して定まる二つのマトロイドの合併の階数あるいはそれらの最大共通独立集合の大きさによって特徴づける．それらのマトロイドがそれぞれ2部グラフと行列によって表現できることを用いて，構造的可解性を効率的に判定するための算法を示す．また，ここで提案する手法が有効であるような実際的な例を提示する．

1. はじめに

大規模システムの設計，解析のためにグラフ／マトロイド的手法による接近法が有効である[6]．たとえば，電気回路網理論における基礎的な問題の多くがマトロイド理論を用いて定式化され解決されている[8),19)]．一方，わが国で開発され実用に供されている化学プロセス用システム解析プログラム JUSE-GIFS, DPS などにより実証されているように，大規模な線形・非線形連立方程式の数値解法の効率化のためにもグラフ論的な手法が有用である[9)~12),16),20)]．

本論文では，文献 9) に従い，$x_j\,(j=1,\cdots,N)$, $\boldsymbol{u}_k$ $(\boldsymbol{k}=1,\cdots,K)$ を未知数とし，$y_i\,(i=1,\cdots,M)$ を独立なパラメータとする“標準形”の線形・非線形連立方程式

$$\left.\begin{aligned} y_i&=f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \quad (i=1,\cdots,M)\\ u_k&=g_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \quad (k=1,\cdots,K)\end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

(f_i, g_k は適当に滑らかな実数値関数)を考え，これが一意解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ をもつ構造をしているかどうかの判定を問題とする．方程式(1.1)が一意解をもつためには，一般に，方程式の数と未知数の数が等しくなければならないので，以下 $M=N$ とする．

いま方程式(1.1)がパラメータ $\boldsymbol{y}$ のある値 $\hat{\boldsymbol{y}}$ に対して解 $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}})$ をもつとする．方程式(1.1)の $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ に関する Jacobi 行列は

$$J=J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix} J(f,x) & J(f,u)\\ J(g,x) & J(g,u)-I\end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

である．ここで

$$J(f,x)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

など．

そこで

$$\det J(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}})\neq 0 \qquad (1.3)$$

ならば，陰関数定理により，パラメータ $\boldsymbol{y}$ の $\hat{\boldsymbol{y}}$ の周りの任意の摂動に応じて解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ が $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}})$ の周りで一意的に定まる．また，(1.3)が成り立てば，(1.1)を Newton 法などによって解くための反復計算が実行できると考えてよい．しかし，(1.3)の条件は解の具体的な値 $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}})$ に依存し，解の値を計算しないうちに検証することは不可能である．

そこで，(1.2)に現れる関数 f_i, g_k の偏導関数を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ の値を特定したときの値としてではなく，“関数”と見なし，その Jacobi 行列の行列式が“関数”として0ではないという条件を考える．より正確には，関数 f_i, g_k の偏導関数が有理数体 $\boldsymbol{Q}$ のある拡大体 $\boldsymbol{F}$ の元[21]であると見なし，(1.2)の行列式が $\boldsymbol{F}$ の元として0でないとき，すなわち，$J=J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ を $\boldsymbol{F}$ 上の行列とみて

$$\det J\neq 0 \qquad (1.4)$$

が成り立つとき，連立方程式(1.1)は“構造的に可解”であると呼ぶことにする*．

関数 $f_i\,(i=1,\cdots,M)$, $g_k\,(k=1,\cdots,K)$ の偏導関数の集合を $\mathcal{D}(\subset\boldsymbol{F})$ と書く．関数 f_i, g_k の関数形の一般性に関して次の仮定：

GA 1：$\mathcal{D}$ の要素で0でないものは有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上で代数的に独立[21]である

が成り立つ場合には構造的可解性の条件(1.4)が方程

---

† Matroid-Theoretic Approach to the Structural Solvability of a System of Equations by KAZUO MUROTA and MASAO IRI (Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo).

†† 東京大学工学部計数工学科

* 文献9)においては，そこでの“一般性”の仮定(＝後述の GA 1)の下では方程式(1.1)から $u_k(k=1,\cdots,K)$ が消去できるという事実に基づいて，$\boldsymbol{u}$ を消去したときの $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の関数関係の Jacobi 行列が正則であるときに(1.1)は構造的に可解であると呼び，(1.4)はそのための必要十分条件として与えられた（文献9）の定理 2.1)．本論文では，$\boldsymbol{u}$ が消去できるとは限らない場合も扱うので，直接(1.4)を構造的可解性の定義として採用する．

式(1.1)の構造を表すグラフ上の条件として表現できる．すなわち，次の定理が成立する（用語の定義等，詳しくは文献 9）を参照のこと）．

[定理 1](文献 9) の定理 2.3) GA 1の下で，連立方程式(1.1)が構造的に可解であるためには，その表現グラフ上で x_j $(j=1,\cdots,N)$ の点から y_i $(i=1,\cdots,M)$ の点への Menger 型完全リンキングが存在することが必要かつ十分である．▮

この定理に基づく構造的可解性の判定は実用上は十分有効であることが，JUSE-GIFS, DPS などの使用経験からも明らかになっており，この定理と表現グラフの構造とに基づいて，方程式(1.1)を構造的に可解な部分問題に分解し，それらの部分問題間の階層構造を定めるための手法も提案されている[9)~12)]．しかし，その前提となる一般性の仮定 GA 1は理論的には少々強すぎる憾みがある．実際，多くのシステムモデルから生じる(1.1)の形の方程式においてかなりの割合の式が加減算などの非常に簡単な形をしているのが普通であり，そのような場合には，上の一般性の仮定 GA 1は厳密には満たされない．また，GA 1 が満たされていないために，定理1に基づく判定法によって構造的に可解と判定されながらも，実は構造的に可解でない例も実際のプラントのシミュレーションにおいて経験されている（その一つの典型例を3.2節に示す）．

そこで，本論文ではより現実的な状況設定：

> $\mathcal{D}$ の要素は二つの部分 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{D}\backslash\mathcal{T}$ に分類されていて，$\mathcal{T}$ は $\boldsymbol{Q}(\mathcal{D}\backslash\mathcal{T})$ (有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に $\mathcal{D}\backslash\mathcal{T}$ の元を添加した拡大体）の上で代数的に独立である

の下で構造的可解性を論じる．これは，直観的には，偏導関数を“互いに独立な一般的な値をとるもの”($\mathcal{T}$)と，それ以外の“値がはっきり定まっているもの”あるいは“相互に関連のある値をとるもの”($\mathcal{D}\backslash\mathcal{T}$)とに分類して眺めようという意図を反映したものであるといってよい．従来の定式化における一般性の仮定 GA 1は，この定式化において $\mathcal{T}$ として $\mathcal{D}$ の中の非零要素全部をとることができるという仮定であると言い換えることができるので，この定式化は従来のものを包含する形の一般化である．

次章において行列の階数に関する準備を与え，それに基づいて3章で構造的可解性と同値な条件を示すとともに，ここで提案する手法が有効であるような実例を提示する．構造的可解性を判定するための効率的な算法を付録にやや詳細に記述する．

2. 行列の階数に関する準備

$\boldsymbol{F},\boldsymbol{K}$ を体として $\boldsymbol{F}\supset\boldsymbol{K}$ とする．$\boldsymbol{F}$ 上の $m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ $(a_{ij}\in\boldsymbol{F};\ i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ が $\boldsymbol{F}$ 上の行列 $T=(t_{ij})$ $(t_{ij}\in\boldsymbol{F})$ と $\boldsymbol{K}$ 上の行列 $Q=(q_{ij})$ $(q_{ij}\in\boldsymbol{K})$ によって

$$A=T+Q \tag{2.1}$$

と書かれ，T の非零要素は $\boldsymbol{K}$ 上で代数的に独立であるとする．これを**混合型行列**と呼ぶ．

行番号を $R\equiv\{1,\cdots,m\}$，列番号を $C\equiv\{1,\cdots,n\}$ とおき，$I\subset R$, $J\subset C$ に対して $I\times J$ に対応する A の部分行列を $A(I,J)$ と表す．また，行列 A の($\boldsymbol{F}$ 上の) 階数 (rank) を $r(A)$，項別階数 (term-rank)[4),22)] を $t(A)$ とかくとき，次の定理が成り立つ．

[定理 2]

$$r(A)=\max_{I\subset R,\,J\subset C}\{t(T(I,J))+r(Q(R\backslash I,C\backslash J))\} \tag{2.2}$$

[証明] (2.2)の右辺を $\hat{r}$ とおく．まず，$r(A)\leq\hat{r}$ を示す．Aの部分行列 $A(R',C')=T(R',C')+Q(R',C')$ で $r(A)=r(A(R',C'))=|R'|=|C'|$ となるものをとる．$\det A(R',C')$ は（符号は R',C' の要素の並べ方によるが），T の非零要素に関する $\boldsymbol{K}$ 上の多項式として 0 ではないので，ある $I\subset R'$ に対し $\prod_{i\in I}t_{ij(i)}$ なる項を含み，その係数は符号を除いて $\det Q(R'\backslash I,C'\backslash J)$ $(J\equiv\{j(i)\mid i\in I\})$ に等しく 0 でない．この I,J に対して，$t(T(I,J))=|I|=|J|$, $r(Q(R\backslash I,C\backslash J))\geq r(Q(R'\backslash I,C'\backslash J))=|R'|-|I|=r(A)-t(T(I,J))$ となり，$r(A)\leq\hat{r}$ が成り立つ．

次に，逆向きの不等式 $r(A)\geq\hat{r}$ を示そう．右辺の最大値を与える I,J をとる．ある $I'\subset I$, $J'\subset J$, $I''\subset R\backslash I$, $J''\subset C\backslash J$が存在して，$t(T(I,J))=t(T(I',J'))=|I'|=|J'|$, $r(Q(R\backslash I,C\backslash J))=r(Q(I'',J''))=|I''|=|J''|$となる．このとき，$A(I'\cup I'',J'\cup J'')$ は正則である．なぜならば，$\det A(I'\cup I'',J'\cup J'')$ を T の非零要素の $\boldsymbol{K}$ 上の多項式の形に展開したものは $\det Q(I'',J'')\det T(I',J')(\neq 0)$ を含み，T の非零要素は $\boldsymbol{K}$ 上で代数的に独立なのでこの項が打ち消されることはないからである．したがって，$r(A)\geq r(A(I'\cup I'',J'\cup J''))=|I'|+|I''|=t(T(I,J))+r(Q(R\backslash I,C\backslash J))=\hat{r}$. (証終)

定理2は，行列Aの定義するリンキングシステム[18)]が行列 T,Q の定義する二つのリンキングシステムの，リンキングシステムとしての合併 (union) となっていることを示している．また，文献 4) で導入され

た 2-block rank の一つの拡張と見ることもできる．

次に，定理2をマトロイド[6),18),22)]の言葉で表現する．$S\equiv R\cup C$ として関数 $\tau,\rho: 2^S\to\boldsymbol{Z}$ を，$I\subset R$, $J\subset C$ に対して

$$\tau(I\cup J)=t(T(R\backslash I,J))+|I| \tag{2.3}$$

$$\rho(I\cup J)=r(Q(R\backslash I,J))+|I| \tag{2.4}$$

で定義すると，τ,ρ はともにマトロイドの階数関数としての性質を満たす[18)]．これを用いて(2.2)を書き直すと，$m=|R|$ に注意して，

$$r(A)=\max_{S'\subset S}\{\tau(S')+\rho(S\backslash S')\}-m \tag{2.5}$$

$$=(\tau\vee\rho)(S)-m \tag{2.6}$$

ただし，$\tau\vee\rho$ は τ,ρ で定義される二つのマトロイド $\mathcal{M}(\tau),\mathcal{M}(\rho)$ の合併マトロイド $\mathcal{M}(\tau)\vee\mathcal{M}(\rho)$ の階数関数である．(2.6)および合併マトロイドの階数と最大共通独立集合の大きさとの関係により，定理2は次のように述べられる．ただし，$\mathcal{M}(\rho^*)$ は $\mathcal{M}(\rho)$ の双対マトロイドである．

［定理3］

$r(A)=\mathcal{M}(\tau)\vee\mathcal{M}(\rho)$ の階数$-m$

$=\mathcal{M}(\tau)$ と $\mathcal{M}(\rho^*)$ の最大共通独立集合の大きさ ▮

(2.1)の形の行列 A の階数は，定理3に基づいて計算することができる．その際に，$\mathcal{M}(\tau)$ は2部グラフで，また $\mathcal{M}(\rho),\mathcal{M}(\rho^*)$ は $\boldsymbol{K}$ 上の行列で表現されることに注意する．ここで重要なのは，合併マトロイドの基を求める算法，あるいはそれと同等であるが最大共通独立集合を求める算法，をそれらに適用すれば，$\boldsymbol{F}$ 上の行列 A の階数が，$\boldsymbol{F}$ のなかの演算ではなく，$\boldsymbol{K}$ のなかの演算とグラフ上の操作によって計算できるということである．そのための具体的な算法は付録に述べる．

定理2に関連して次の事実が成り立つ．

［定理4］ (2.2)の右辺の最大値を与える (I,J) のなかで極大なものに対しては $|R\backslash I|=|C\backslash J|$ であり，

$\det A(R\backslash I,C\backslash J)\in\boldsymbol{K}^*(\equiv\boldsymbol{K}-\{0\})$

［証明］ $\bar{I}\equiv R\backslash I,\bar{J}\equiv C\backslash J$ とおく．$|\bar{I}|>r(Q(\bar{I},\bar{J}))$ ならば $\exists i\in\bar{I}: r(Q(\bar{I}\backslash\{i\},\bar{J}))=r(Q(\bar{I},\bar{J}))$であり，このとき $(I\cup\{i\},J)$ も(2.2)の右辺の最大値を与えるので，(I,J) の極大性に反す．$|\bar{J}|$ についても同様．ゆえに $Q(\bar{I},\bar{J})$ は正則であり，したがって $\det A(\bar{I},\bar{J})\neq 0$. $\det A(\bar{I},\bar{J})\notin\boldsymbol{K}$ とすると，ある $I'\subset\bar{I},J'\subset\bar{J}$ $(I'\neq\phi,J'\neq\phi)$ が存在して，$T(I',J')$，$Q(\bar{I}\backslash I',\bar{J}\backslash J')$ はともに正則であり，$(I\cup I',J\cup J')$ も(2.2)の右辺の最大値を与え，(I,J)の極大性に反する．(証終)

(2.1)の形の $\boldsymbol{F}$ 上の正方行列 A が $\det A\in\boldsymbol{K}^*$ を満たすならば，行と列を適当に入れかえることによって，$\boldsymbol{F}$ 上の(対角要素が1である)左下三角行列と $\boldsymbol{K}$ 上の右上三角行列の積に LU 分解できることも知られている[13)]．

3. 構造的可解性

3.1 構造的可解性の条件と一般性の仮定の緩和

標準形の連立方程式(1.1)に現れる関数 f_i,g_k の偏導関数 $\mathcal{D}$ が $\mathcal{T}$ と $\mathcal{D}\backslash\mathcal{T}$ に分類されていて，$\mathcal{T}$ は $\boldsymbol{Q}(\mathcal{D}\backslash\mathcal{T})$ 上で代数的に独立であるとする．その分類に応じて(1.1)の Jacobi 行列(1.2)を

$$J=T+Q \tag{3.1}$$

と書く($\mathcal{T}$ に属する偏導関数を行列 T の非零要素とする)と，これは前節で扱った形(2.1)において $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}(\mathcal{D}\backslash\mathcal{T})$ の場合である．したがって，(3.1)の行列 T, Q に対して(2.3)，(2.4)のようにして定まる階数関数 τ,ρ をもつマトロイドを $\mathcal{M}(\tau),\mathcal{M}(\rho)$ とすると，定理3と構造的可解性の定義(1.4)により次が成立する．

［定理5］ (1.1)において $M=N$ とするとき，次の3条件は同値である．

i) (1.1)が構造的に可解である．

ii) $\mathcal{M}(\tau)\vee\mathcal{M}(\rho)$ の階数が $2(N+K)$ に等しい．

iii) $\mathcal{M}(\tau)$ と $\mathcal{M}(\rho^*)$ の最大共通独立集合の大きさが $N+K$ に等しい．▮

偏導関数 $\mathcal{D}$ の一般性に関して，GA1より弱い仮定

GA2: $\mathcal{D}$ の要素のなかで $\boldsymbol{Q}$ の元でないものは $\boldsymbol{Q}$ 上で代数的に独立である

が成り立つ場合には，有理定数でない偏導関数の集合を $\mathcal{T}$ にとることができ，$\mathcal{D}\backslash\mathcal{T}\subset\boldsymbol{Q}$ となるので $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}(\mathcal{D}\backslash\mathcal{T})=\boldsymbol{Q}$ となる．したがって，GA2の下では，付録に示す算法によって，構造的可解性が有理数体上の演算とグラフ上の操作で判定できることになる．なお，とくにGA1が成り立つ場合には，(3.1)の行列 Q が

$$Q=\begin{pmatrix} O & O \\ O & -I \end{pmatrix}$$

のような簡単な形になることに注意．

あるいは，($\boldsymbol{F}\supset\boldsymbol{R}$ と見なして)次の仮定

GA3: $\mathcal{D}$ の要素のなかで実数体 $\boldsymbol{R}$ の元でないものは $\boldsymbol{R}$ 上で代数的に独立である

が成り立つ場合には，定数でない偏導関数の集合を $\mathcal{T}$ にとることができ，$\mathcal{D}\backslash\mathcal{T}\subset\boldsymbol{R}$ なので $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ とおける．したがって，GA3 の下では実数の四則演算とグ

ラフに対する操作によって構造的可解性が判定できることになる．なお GA 3 は，関数 f_i, g_k のなかで非線形なものは独立であるという状況を反映した仮定と見なすこともできる．

仮定 GA 1 と GA 3 の間には論理的な強弱関係はない，すなわち，GA 1 が成立するからといって GA 3 が成立するとは限らないし，またその逆も成り立たない．同様に，GA 2 と GA 3 の間にも強弱関係はない[14]．現実の問題に対して $\mathcal{D}$ の要素をどのように $\mathcal{I}$ と $\mathcal{D}\backslash\mathcal{I}$ とに分類するかについては，以下の例でも明らかなように，かなり恣意的な面もあり，それ自身，システムの見方の問題といえる．

3.2　例題—二塩化エチレン生成系

図 1 のような二塩化エチレン ($C_2H_4Cl_2$) 生成系を考える (文献 16) の例題を修正した*)．管路①，②からそれぞれ塩素 (Cl_2)，エチレン (C_2H_4) を 100 mol/h ずつ入力する．反応器では管路④のエチレンの 90% が反応式

$$C_2H_4+Cl_2 \rightarrow C_2H_4Cl_2$$

に従って反応し，精製塔で管路⑤の二塩化エチレンの大部分が製品としてとり出され，塩素，エチレンの大部分が回収されリサイクルする．このとき，次の問題を考える．

[問題]　精製塔における塩素とエチレンの回収率 α_1, α_2 および，管路⑦に得られる二塩化エチレンの生産量 y が指定されているとき，それに見合うように，精製塔における二塩化エチレンの回収率 x を求めよ (たとえば $\alpha_1=0.98$, $\alpha_2=0.92$, $y=90$ mol/h などとする)．

管路ⓘの塩素，エチレン，二塩化エチレンの流量を u_{i1}, u_{i2}, u_{i3} とする．反応器における補助変数 (未知数) を u，エチレンの転化率を $r\,(=0.90)$ とおくと，解くべき方程式は次の標準形に書くことができる[16]．

③＝①＋⑥：$u_{31}=u_{61}+100$ mol/h

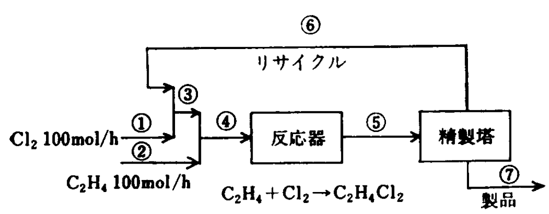

図 1　二塩化エチレン生成系
Fig. 1　Hypothetical ethylene dichloride production system.

* このシステムモデルは The Service Bureau Co. の Generalized Interrelated Flow Simulation, Users Manual による．

$u_{3j}=u_{6j}\quad (j=2,3)$

④＝②＋③：$u_{42}=u_{32}+100$ mol/h

$u_{4j}=u_{3j}\quad (j=1,3)$

反応器：$u=ru_{42}$

$u_{53}=u_{43}+u$

$u_{5j}=u_{4j}-u\quad (j=1,2)$

精製塔：$u_{6j}=\alpha_j u_{5j}\quad (j=1,2)$

$u_{63}=xu_{53}$

$u_{7j}=u_{5j}-u_{6j}\quad (j=1,2)$

$y=u_{53}-u_{63}$

(1.1) における M, N, K は $M=N=1$, $K=15$ である；すなわち，$\boldsymbol{x}=x$, $\boldsymbol{y}=y$, $\boldsymbol{u}=(u_{ij}, u)$ である．$\alpha_j\,(j=1,2)$ および $r\,(=0.90)$ は一般的な値をとる定数と見なす．

この連立方程式の表現グラフは**図 2** のようになり，極大点である未知数の点 $\{x\}$ からパラメータの点 $\{y\}$

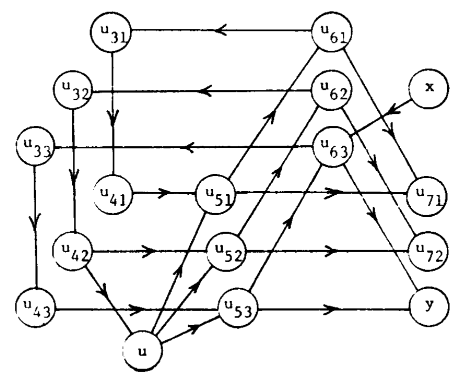

図 2　例題の表現グラフ
Fig. 2　Representation graph of the example.

未知数 \ 左辺変数	x	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{41}	u_{42}	u_{43}	u_{51}	u_{52}	u_{53}	u_{61}	u_{62}	u_{63}	u_{71}	u_{72}	u
y										1			-1			
u_{31}		-1									1					
u_{32}			-1									1				
u_{33}				-1									1			
u_{41}		1			-1											
u_{42}			1			-1										
u_{43}				1			-1									
u_{51}					1			-1								-1
u_{52}						1			-1							-1
u_{53}							1			-1						1
u_{61}								α_1			-1					
u_{62}									α_2			-1				
u_{63}	u_{53}									x			-1			
u_{71}								1			-1			-1		
u_{72}									1			-1			-1	
u						r										-1

図 3　例題の Jacobi 行列 J
Fig. 3　Jacobian matrix J of the example.

への Menger 型完全リンキング（たとえば $x \to u_{63} \to y$）が存在する．したがって，GA 1 を仮定して定理1を用いる従来の判定法によれば，この方程式は構造的に可解であると判定されることになる．ところが実際にはこの方程式系には一意解がない．このことは物理的な考察によっても納得できる．

そこで，Jacobi 行列を書き下して（**図3**），その行列式を式として計算すると $\det J=0$ であり，この例題が構造的に可解ではないことが判明する．従来の手法はグラフ論的な方法によって Jacobi 行列の項別階数を判定し，GA 1 の下ではそれが階数に等しいという事実に基づいて構造的可解性を判定していたといえる（文献9）の定理2.2参照）．ところが，この例題の方程式の多くは加減算であり，偏導関数 $\mathscr{D}$ のなかの非零要素の大部分が ±1 という特殊な―“一般的”とは見なしがたい―値をとっている．その結果，Jacobi 行列の項別階数は $N+K=16$ に等しいにもかかわらず，その行列式は 0 となっているのである．

これに対して，本論文で提案する方法によればこの例題が構造的に可解でないことが検出できる．すなわち，$\alpha_1, \alpha_2, r, x, u_{53}$ を $\boldsymbol{Q}$ 上で代数的に独立な元と見なして $\mathscr{T}=\{\alpha_1, \alpha_2, r, x, u_{53}\}$ とおいて Jacobi 行列 J を(3.1)の形に分解し，行列 T と Q によって定まるマトロイド $\mathscr{M}(\tau)$ と $\mathscr{M}(\rho^*)$ の最大共通独立集合の大きさを（付録に示す算法によって）求めると 15 となるので，定理5を用いて，この例題は構造的に可解でないと判定できる．

3.3 構造的可解性と簡約方程式

連立方程式(1.1)を数値的に反復法で解く場合には，その表現グラフを利用して本質的な未知数の数を減らすことができる[9),10),20)]．すなわち，表現グラフ上の閉路をすべて切るように $\boldsymbol{u}$ のなかから D 個の変数 w_d $(d=1, \cdots, D)$（⟨DD⟩ 型変数[9),10),16),20)] あるいは cut point[17)] などと呼ばれる）を選んで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ を本質的未知数として Newton 法等の反復計算を行う．

このことは，一つの ⟨DD⟩ 型変数 w_d に対して未知数 $\bar{x}_d$ とパラメータ $\bar{y}_d$ の組を新たに導入して関数 f_i, g_k に現れる w_d を $\bar{x}_d$ でおきかえ，(1.1)を

$$\left\{\begin{array}{ll} y_i=f_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}) & (i=1, \cdots, M) \\ \bar{y}_d=\bar{x}_d-w_d & (d=1, \cdots, D) \\ u_k=g_k(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}) & (k=1, \cdots, K) \end{array}\right. \tag{3.2}$$

の形に変更して $\bar{y}_d=0\,(d=1, \cdots, D)$ とおくことに相当する[12)]．ここで，$\{w_d \mid d=1, \cdots, D\} \subset \{u_k \mid k=1, \cdots, K\}$ に注意．

方程式(1.1)が一般性の仮定 GA 1 を満たしていても変更後の(3.2)は減算を含むので GA 1 を満たさない．これに対し，(1.1)が GA 2 を満たすならば(3.2)も GA 2 を満たす．このような観点からも GA 1 より GA 2 のほうがより自然な仮定と見ることができる．

方程式(3.2)の表現グラフは閉路を含まないので（⟨DD⟩ 型変数をそのように定めたため），$(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ の値から f_i, g_k の値を代入計算によって順次定めていけば $(\boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{y}})$ の値が計算できる．これを

$$\left\{\begin{array}{ll} y_i=F_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) & (i=1, \cdots, M) \\ \bar{y}_d=G_d(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) & (d=1, \cdots, D) \end{array}\right. \tag{3.3}$$

と書き，(3.3)を簡約方程式と呼ぶ．これは，(3.2)から“中間変数” $u_k\,(k=1, \cdots, K)$ を消去した方程式である．(3.3)の，変数 $(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ に関する Jacobi 行列 $\tilde{J}$ の行列式を体 $\boldsymbol{F}$ の元とみるとき，

$$\det \tilde{J} \neq 0 \Longleftrightarrow \det J \neq 0 \tag{3.4}$$

が成り立つ．ただし，J は (1.1) の Jacobi 行列で (1.2)で与えられる．したがって，(1.1)が構造的に可解ならば $(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ を本質的未知数とする簡約方程式(3.3)を解くための Newton 反復法は実行可能であると考えてよいことになる．

4. む す び

本論文では，現実的な状況設定の下で連立方程式の構造的可解性を定式化し，そのための必要十分条件を，連立方程式に関連して定まる二つのマトロイドの合併マトロイドの階数あるいは最大共通独立集合の大きさによって表現した．そして，それを判定するための効率的な算法を示した．

行列 A の要素の分類(2.1)：$A=T+Q$ から定まる二つのマトロイド $\mathscr{M}(\tau)$ と $\mathscr{M}(\rho^*)$ の最大共通独立集合を求める算法は，同時に，半順序構造をもった $R \cup C$（行と列の和集合）の分割―マトロイドの組 $(\mathscr{M}(\tau), \mathscr{M}(\rho^*))$ に関する基本分割[5),6),15)]―を与える．一方，行列 A の2部既約形[7)] に関連して $R \cup C$ の分割―DM 分解[1),2)]―が定まるが，このとき次のことが容易に示される．

［定理6］ (2.1)の形の正方行列 A が正則であるとき，$(\mathscr{M}(\tau), \mathscr{M}(\rho^*))$ に関する基本分割は，半順序を含めて，A の DM 分解の細分である．∎

連立方程式(1.1)の Jacobi 行列の DM 分解，あるいはそれと同等であるが表現グラフの M 分解[11)]は連立方程式(1.1)を階層構造をもつ部分問題に分解する際に有用である[12)]．$(\mathscr{M}(\tau), \mathscr{M}(\rho^*))$ に関する基本分割

は，そのようにして得られた部分問題をさらに細かく分解するが，その意味を明らかにすることが今後の課題である．なお，本論文で提案した手法を大規模な問題に適用する際には，まず DM 分解あるいは M 分解によって部分問題に分解した後，部分問題ごとに構造的可解性を判定するのがよいと思われる．

謝辞 最後に，実際的立場から多くの有益な討論，助言を賜った日本科学技術研修所の恒川純吉氏，小林茂雄氏，および日産化学工業株式会社の安部季夫氏に感謝の意を表します．また，本研究には，文部省科学研究費補助金およびセコム科学技術振興財団研究奨励金の援助を受けた．

参考文献

1) Dulmage, A. L. and Mendelsohn, N. S.: Coverings of Bipartite Graphs, *Canad. J. Math.*, Vol. 10, pp. 517-534 (1958).
2) Dulmage, A. L. and Mendelsohn, N. S.: Two Algorithms for Bipartite Graphs, *SIAM J.*, Vol. 11, pp. 183-194 (1963).
3) Edmonds, J.: Minimum Partition of a Matroid into Independent Subsets, *J. Res. NBS*, Vol. 69 B, pp. 67-72 (1965).
4) Iri, M.: The Maximum-Rank Minimum-Term-Rank Theorem for the Pivotal Transforms of a Matrix, *Linear Algebra and Its Appl.*, Vol. 2, pp. 427-446 (1969).
5) Iri, M.: A Review of Recent Work in Japan on Principal Partitions of Matroids and Their Applications, *Ann. New York Acad. Sci.*, Vol. 319, pp. 306-319 (1979).
6) Iri, M. and Fujishige, S.: Use of Matroid Theory in Operations Research, Circuits and Systems Theory, *Int. J. Systems Sci.*, Vol. 12, pp. 27-54 (1981).
7) 伊理正夫，韓 太舜：線形代数，教育出版(1977).
8) 伊理正夫，冨澤信明：回路網理論の基礎的諸問題へのマトロイド理論による統一的接近法，電子通信学会論文誌，Vol. 58-A, pp. 33-40 (1975).
9) 伊理正夫，恒川純吉，室田一雄：グラフ論的手法による大規模連立方程式の構造的可解性判定とブロック三角化，情報処理学会論文誌，Vol. 23, pp. 88-95 (1982).
10) Iri, M., Tsunekawa, J. and Yajima, K.: The Graphical Techniques Used for Chemical Process Simulator "JUSE GIFS", *Information Processing 71* (Proc. IFIP Congr. 71), Vol. 2 (Appl.), pp. 1150-1155 (1972).
11) 室田一雄：グラフの Menger 型分解，情報処理学会論文誌，Vol. 23, pp. 280-287 (1982).
12) 室田一雄：グラフの M 分解による大規模連立方程式の構造解析，情報処理学会論文誌，Vol. 23, pp. 480-486 (1982).
13) Murota, K.: LU-Decomposition of a Matrix with Entries of Different Kinds, *Linear Algebra and Its Appl.*, to appear (1983).
14) 室田一雄，伊理正夫：連立方程式の可解性への組合せ論的アプローチ，日本 OR 学会 1981 年度秋季研究発表会アブストラクト集，D-II-1, pp. 198-199 (1981).
15) 中村政隆：離散システムの構造の数理的解析法とその応用，学位論文，東京大学大学院工学系研究科 (1982).
16) 日本科学技術研修所：JUSE-L-GIFS プログラム利用の手引き(JUSE-GIFS 第3版改訂増補版) (1976).
17) Shamir, A.: A Linear Time Algorithm for Finding Minimum Cutsets in Reducible Graphs, *SIAM J. Comput.*, Vol. 8, pp. 645-655 (1979).
18) Schrijver, A.: Matroids and Linking Systems, *Math. Centre Tracts*, Vol. 88, Amsterdam (1978).
19) 冨澤信明，伊理正夫：行列積 AXB の階数を決定する方法と回路の一意解の存在判定問題への応用，電子通信学会論文誌，Vol. 57-A, pp. 834-841 (1974).
20) 恒川純吉：ラージスケールシステムのグラフ論的分割，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 25, pp. 788-793 (1980).
21) Waerden, B. L., van der: *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin (1955).
22) Welsh, D. J. A.: *Matroid Theory*, Academic Press, London (1976).

付録 混合型行列の階数を求める算法

(2.1)の形の $m\times n$ 行列 $A=T+Q$ の階数を定理3に基づいて求める算法を示す．以下，列番号を $C=\{1,\cdots,n\}$，行番号を $R=\{n+1,\cdots,n+m\}$，$S=C\cup R$，$I\subset R$，$J\subset C$ とする．文献3) の方法で $\mathcal{M}(\tau)\vee\mathcal{M}(\rho)$ の階数を求めることもできるが，ここでは $\mathcal{M}(\tau)$ と $\mathcal{M}(\rho^*)$ の最大共通独立集合を求める形を採用し，文献6)，19) の算法を特殊化したものを示す．

$\mathcal{M}(\tau)$ は，$R\cup C$ を点集合とし，$t_{ij}\neq 0$ のとき枝 (i,j) $(i\in R, j\in C)$ をもつ2部グラフ（行列 T の随伴2部グラフ[7]）G_T によって表現できる．$I\cup J$ が $\mathcal{M}(\tau)$ の独立集合であることは，ある $J^*\subset R\backslash I$ に対して J^* と J の間に完全マッチングが存在することと同値である．独立集合 $I\cup J$ をこのように表現したとき，G_T においてマッチングに含まれる枝を逆向きにしたグラフを $\tilde{G}_T$ とする．$v\notin I\cup J$ のとき，v が $I\cup J$ の閉包に含まれないことは，v が $R\backslash(I\cup J^*)$

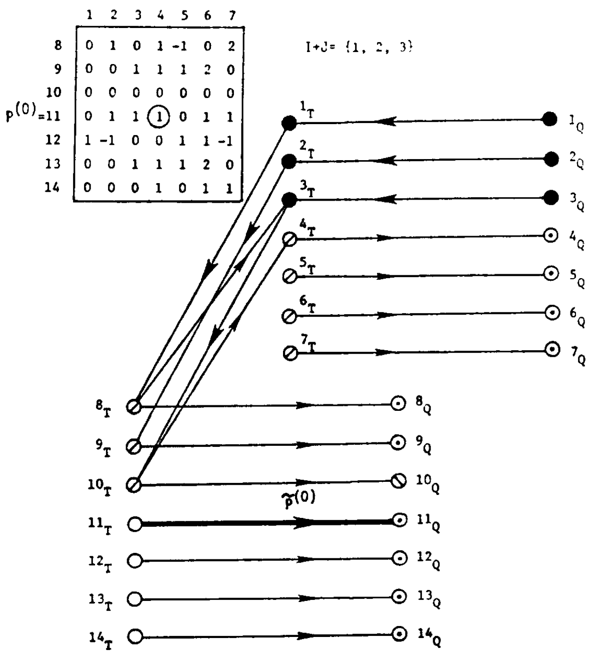

図 A.1(i)　補助グラフ $\tilde{G}^{(0)}$
(○：入口，⊙：出口)
Fig. A.1(i)　Auxiliary graph $\tilde{G}^{(0)}$.
(○ : entrance, ⊙ : exit)

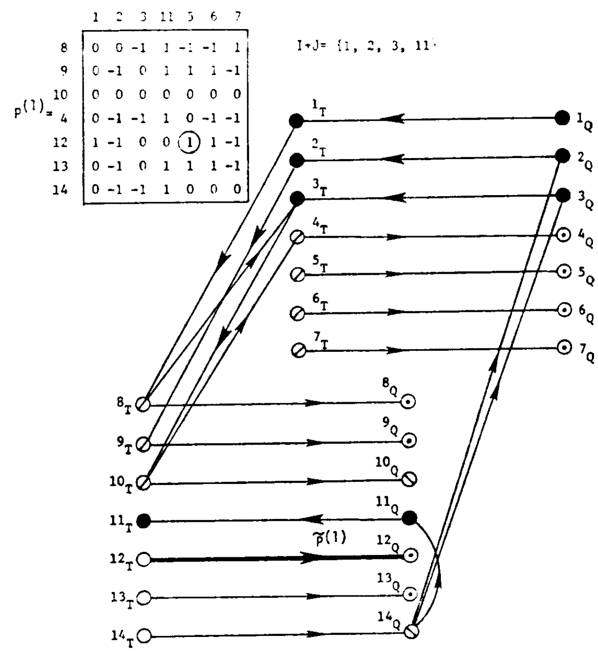

図 A.1(ii)　補助グラフ $\tilde{G}^{(1)}$
(○：入口，⊙：出口)
Fig. A.1(ii)　Auxiliary graph $\tilde{G}^{(1)}$.
(○ : entrance, ⊙ : exit)

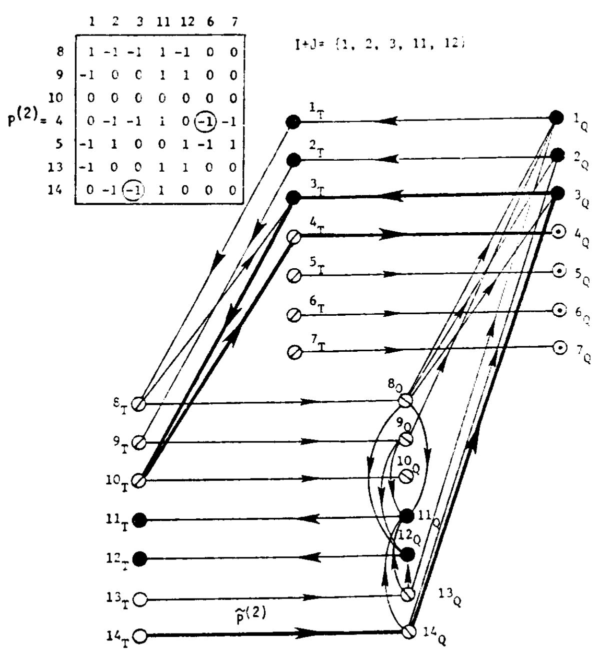

図 A.1(iii)　補助グラフ $\tilde{G}^{(2)}$
(○：入口，⊙：出口)
Fig. A.1(iii)　Auxiliary graph $\tilde{G}^{(2)}$.
(○ : entrance, ⊙ : exit)

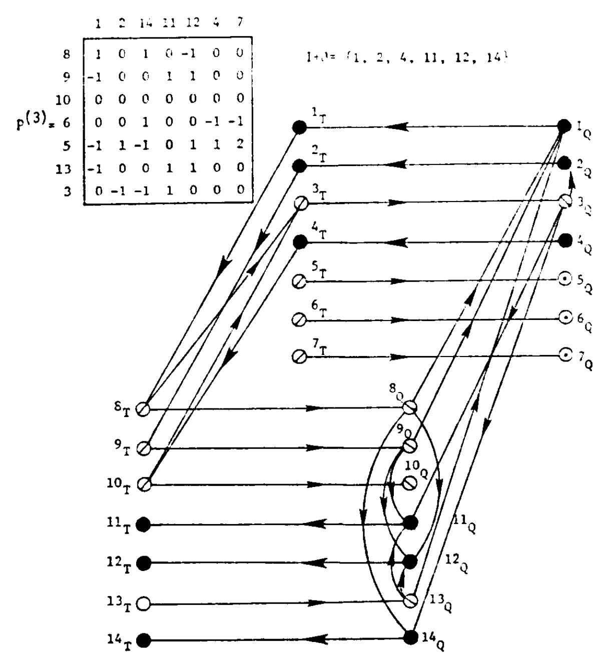

図 A.1(iv)　補助グラフ $\tilde{G}^{(3)}$
(○：入口，⊙：出口)
Fig. A.1(iv)　Auxiliary graph $\tilde{G}^{(3)}$.
(○ : entrance, ⊙ : exit)

のある点から $\tilde{G}_T$ 上の有向道によって到達できることと同値である．また，$u \in I \cup J$，$v \notin I \cup J$ で v が $I \cup J$ の閉包に含まれているとき，u が v の $I \cup J$(を含むある基底) に関する基本サーキットに含まれることは，$\tilde{G}_T$ 上で u から v に至る有向道が存在することと同値である．

$\mathcal{M}(\rho^*)$ は $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元行ベクトルの集合で表現される．すなわち，行列 Q の行ベクトルを $\boldsymbol{q}_i(i=n+1, \cdots, n+m)$ として，n 次元ベクトル $\boldsymbol{r}_i(i=1, \cdots, n+m)$ を

$$\boldsymbol{r}_i=\begin{cases} \text{第 } i \text{ 単位ベクトル} & (i=1, \cdots, n) \\ \boldsymbol{q}_i & (i=n+1, \cdots, n+m) \end{cases}$$

で定義すると，$\mathcal{M}(\rho^*)$ における独立性は，$\boldsymbol{K}$ 上のベクトルとしての $\boldsymbol{r}_i$ の線形独立性に一致する．σ を $n+m$ 次置換で $\{\boldsymbol{r}_{\sigma(j)} \mid j=1, \cdots, n\}$ が基底をなすようなものとすると，$m \times n$ 行列 $P=(p_{ij})(p_{ij} \in \boldsymbol{K})$ が存在して

$$\boldsymbol{r}_{\sigma(i)}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{r}_{\sigma(j)} \quad (i=n+1, \cdots, n+m) \qquad \text{(A. 1)}$$

とかける．$I \cup J \subset \{\sigma(j) \mid j=1, \cdots, n\}(\equiv B$ とおく) とするとき，$\sigma(i)(\notin I \cup J)$ が $I \cup J$ の閉包に含まれることは，$n+1 \leq i \leq n+m$ であって，かつ，$\sigma(j) \in B \backslash (I \cup J)$ なるすべての j に対して $p_{ij}=0$ であることと同値である．また，$\sigma(j) \in I \cup J$，$\sigma(i) \notin I \cup J$ で $\sigma(i)$ が $I \cup J$ の閉包に含まれているとき (このとき $1 \leq j \leq n$，$n+1 \leq i \leq n+m$ である)，$\sigma(j)$ が $\sigma(i)$ の $B(\supset I \cup J)$ に関する基本サーキットに含まれることは $p_{ij} \neq 0$ と同値である．

行列 T, Q の行(列)番号を $R_T(C_T), R_Q(C_Q)$ とするとき，$R_T \cup C_T \cup R_Q \cup C_Q$ を点集合とする補助グラフ $\tilde{G}$，(A. 1)を表す行列 P，および置換 σ を用いて行列 A の階数を求める．$i \in R$ に対応する R_T, R_Q の点を i_T, i_Q と書く．$j \in C$ についても同様に j_T, j_Q と書く．$\tilde{G}$ は

$$I=\{i \in R \mid \text{有向枝}(i_Q, i_T) \text{が } \tilde{G} \text{ 上にある}\}$$

$$J=\{j \in C \mid \text{有向枝}(j_Q, j_T) \text{が } \tilde{G} \text{ 上にある}\}$$

によって独立集合 $I \cup J$ を表す．$\tilde{G}$ の入口とは R_T の点で入る枝をもたないものをいう．$\tilde{G}$ の出口とは，$R_Q \cup C_Q$ の点 u_Q であって $u \in R \cup C$ が $I \cup J$ の $\mathcal{M}(\rho^*)$ における閉包に含まれないものをいう；すなわち，$i=\sigma^{-1}(u)$ とおくとき，$1 \leq i \leq n$ で $u \notin I \cup J$ であるか，あるいは，$n+1 \leq i \leq n+m$ で $\sigma(j) \notin I \cup J$ なるある $j\,(1 \leq j \leq n)$ に対して $p_{ij} \neq 0$ であるものをいう．算法の具体的な記述は以下のとおりである．

$\mathcal{M}(\tau)$ と $\mathcal{M}(\rho^*)$ の最大共通独立集合を求める算法

1) $\sigma(k):=k(k=1, \cdots, n+m)$；$P:=Q$；$G_T$ 上で最大マッチング M を求め，M の端点である C の点の集合を J とする；$\tilde{G}$ の枝集合を次のように定める：

$$\begin{aligned}&\{(i_T, j_T) \mid (i_T, j_T) \text{ は } M \text{ に含まれない}\}\\ &\cup \{(j_T, i_T) \mid (i_T, j_T) \text{ は } M \text{ に含まれる}\}\\ &\cup \{(i_T, i_Q) \mid i \in R\} \cup \{(j_T, j_Q) \mid j \in C \backslash J\}\\ &\qquad \cup \{(j_Q, j_T) \mid j \in J\}\\ &\cup \{(i_Q, j_Q) \mid p_{ij} \neq 0 \text{ で } p_{ik}=0 (\forall k \in C \backslash J)\}\end{aligned}$$

2) $\tilde{G}$ 上で入口から出口へ枝数最小の有向道 $\tilde{P}$ を探す．($\tilde{P}$ が存在しなければそのときの $I \cup J$ が最大共通独立集合であり，終了する．) $\tilde{P}$ 上の枝 (u_Q, v_Q) のすべてに対して，$k=\sigma^{-1}(u)$，$l=\sigma^{-1}(v)$ として，(k, l) をピボットとするピボット演算

$$\begin{cases} p_{ij}:=p_{ij}-p_{il}p_{kj}/p_{kl} & (i \neq k, j \neq l) \\ p_{kj}:=-p_{kj}/p_{kl} & (j \neq l) \\ p_{il}:=p_{il}/p_{kl} & (i \neq k) \\ p_{kl}:=1/p_{kl} \\ \sigma(k):=v\,;\ \sigma(l):=u \end{cases}$$

を行う；$\tilde{P}$ の出口を v_Q として，$k=\sigma^{-1}(v)>n$ ならば，$\sigma(l) \notin I \cup J$，$p_{kl} \neq 0$ なる l を一つとって (k, l) をピボットとするピボット演算を行う；$\tilde{P}$ 上の枝の向きを逆転し $I \cup J$ を更新する；$R_Q \cup C_Q$ の点を両端点とする $\tilde{G}$ の枝を行列 P に従って更新する：$p_{ij} \neq 0$ $(1 \leq j \leq n, n+1 \leq i \leq n+m)$ かつ $\sigma(k) \notin I \cup J$ なる任意の $k\,(1 \leq k \leq n)$ に対して $p_{ik}=0$ のとき，$u=\sigma(i)$，$v=\sigma(j)$ に対して枝 (u_Q, v_Q) を設ける；2) に戻る．▮

例を示そう．$\{t_1, \cdots, t_5\}$ を $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}$ 上で代数的に独立であるとして 7×7 行列

$$A=\begin{bmatrix} t_1 & 1 & t_4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & t_2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & t_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

の階数を求める．A を(2.1)の形にかくと $t(T)=3$，$r(Q)=4$ であり，また $r(A)=6$ である．算法の 1) における G_T 上の最大マッチングとして T の要素 $\{t_1, t_2, t_3\}$ に対応するものをとったとして，算法の進行する様子を**図 A.1** に示す．補助グラフ $\tilde{G}^{(3)}$ 上には入口から出口に至る有向道が存在しないので終了する．このとき，$I=\{11, 12, 14\}$，$J=\{1, 2, 4\}$ であり，$t(T(R \backslash I, J))=|J|=3$，$r(Q(I, C \backslash J))=|I|=3$，$r(A)=|I \cup J|=6$ となる．

(昭和 57 年 6 月 2 日受付)
(昭和 57 年 9 月 6 日採録)