Vol. 24 No. 4 情報処理学会論文誌 Jul. 1983

x が大きい場合のベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の数値計算†

吉田年雄†† 二宮市三††

第2種ベッセル関数 $Y\nu(x)$ について，$\nu\geqq0$ かつ正数 x が大きい場合の能率的な数値計算法を提案している．本論文では，$Y\nu(x)$ を $Y\nu(x)=\sqrt{t}\left\{\tilde{P}(\nu,t)\sin\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+\tilde{Q}(\nu,t)\cos\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}$ の形として，$\tilde{P}(\nu,t)$ および $\tilde{Q}(\nu,t)$ の計算式を求めている．ただし，$t=1/x$ である．その計算式は $f_\nu(t)=\tilde{P}(\nu,t)+i\tilde{Q}(\nu,t)$ が満たす微分方程式 $t^2f_\nu''(t)+2(t-i)f_\nu'(t)+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)f_\nu(t)=0$ に τ 法を適用することにより求められる $(i=\sqrt{-1})$．

求められた $\tilde{P}(\nu,t)$ および $\tilde{Q}(\nu,t)$ の計算式は，$\begin{Bmatrix}\tilde{P}(\nu,t)\\\tilde{Q}(\nu,t)\end{Bmatrix}\fallingdotseq\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\\mathrm{Im}\end{Bmatrix}\left(\dfrac{\sum_{l=0}^{m}t^l(-i)^l\dfrac{d_l}{W_l}\sum_{k=l}^{m}l^kW_{k+1}}{\sum_{k=0}^{m}i^kW_{k+1}}\right)$ である．ただし，$W_0=1$，$W_k=\prod_{n=0}^{k-1}\dfrac{e_n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\nu^2}$ $(k\geqq1)$ であり，d_l および e_n は定数である．

1. まえがき

$\nu\geqq0$ かつ正数 x が大きい場合に対して，C. Lanczos の τ 法[1] を適用した第2種ベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の数値計算法を提案する．本方法は，位相・振幅法[2](phase-amplitude method)，あるいは，漸化式を用いる計算法[3] と比べて，同じ計算量では，かなり精度が高い．また，漸近展開式とは異なり，計算量を増せば，x の小さいところまで $Y_\nu(x)$ の値を求めることができる．

本論文では，$0\leqq\nu\leqq2.5$ に対して，$Y_\nu(x)$ の近似式を与える．$\nu>2.5$ に対しては，ν の小数部分を μ とするとき，

$\mu\leqq0.5$ ならば，$Y_{\mu+1}(x)$ と $Y_{\mu+2}(x)$

$\mu>0.5$ ならば，$Y_\mu(x)$ と $Y_{\mu+1}(x)$

を本近似式により求め，漸化式

$$Y_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Y_\nu(x)-Y_{\nu-1}(x) \tag{1}$$

を用いて $Y_\nu(x)$ の値を計算する．

本論文では，x が大きい場合の $Y_\nu(x)$ の計算法を述べているが，x が小さい場合の $Y_\nu(x)$ の計算法はすでに報告した[4]．この両者の計算法により，すべての正数 x について，$Y_\nu(x)$ の値を計算することができる．

2. 計算法

第2種ベッセル関数 $Y_\nu(x)$ は，第1種ハンケル関数

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x) \tag{2}$$

の虚部として与えられる．ここで，i は虚数の単位 $(i=\sqrt{-1})$，$J_\nu(x)$ は第1種ベッセル関数である．

$H_\nu^{(1)}(x)$ は次のように積分表示できる[5]．

$$H_\nu^{(1)}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}e^{i(x-(1/2)\nu\pi-(1/4)\pi)}f_\nu(t) \tag{3}$$

ここで，

$$f_\nu(t)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{itu}{2}\right)^{\nu-1/2}du \tag{4}$$

である．ただし，$t=\dfrac{1}{x}$ であり，以後，t はすべてこの意味に用いることにする．$f_\nu(t)$ は複素数関数で，その実部，虚部を，それぞれ，$P(\nu,t)$, $Q(\nu,t)$ として，

$$f_\nu(t)=P(\nu,t)+iQ(\nu,t) \tag{5}$$

と表せば，式(2)および(3)より，$Y_\nu(x)$ は，

$$Y_\nu(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left\{P(\nu,t)\sin\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+Q(\nu,t)\cos\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right\} \tag{6}$$

† Computation of Bessel Functions $Y_\nu(x)$ for Large Argument x by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学

と表される．したがって，$Y_\nu(x)$ の計算においては，$P(\nu,t)$ および $Q(\nu,t)$ をいかに計算するかが問題となる．

さて，$P(\nu,t)$ および $Q(\nu,t)$ は，式(4)により，次式にて与えることができる．

$$P(\nu,t)=\frac{1}{2\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-1/2}\left\{\left(1+\frac{itu}{2}\right)^{\nu-1/2}+\left(1-\frac{itu}{2}\right)^{\nu-1/2}\right\}du \tag{7}$$

$$Q(\nu,t)=\frac{1}{2i\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-1/2}\left\{\left(1+\frac{itu}{2}\right)^{\nu-1/2}-\left(1-\frac{itu}{2}\right)^{\nu-1/2}\right\}du \tag{8}$$

式(7)および(8)において，$(1\pm itu/2)^{\nu-1/2}$ をテイラー展開し，形式的に項別積分を行うと，よく知られた漸近展開式

$$P(\nu,t)\sim\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{(\nu,2k)}{4^k}\left(\frac{1}{x}\right)^{2k}=1-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)(4\nu^2-7^2)}{4!(8x)^4}-\cdots \tag{9}$$

$$Q(\nu,t)\sim\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{(\nu,2k+1)}{2\cdot4^k}\left(\frac{1}{x}\right)^{2k+1}=\frac{4\nu^2-1^2}{8x}-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!(8x)^3}+\cdots \tag{10}$$

が得られる．ただし，

$$(\nu,\ k)=\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)} \tag{11}$$

である．これらの漸近展開式は，ν が半整数のときには，有限個の項となり，厳密な式になるが，それ以外のときには，発散級数であり，最適な項数で打ち切ったとしても，x が十分に大きいときを除いて数値計算には用いることはできない．

本論文では，x が十分に大きいときはいうまでもなく，x が比較的小さいところまで，能率的に，$P(\nu,t)$ および $Q(\nu,t)$ を計算する方法を提案する．

2.1 τ 法

第1種ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(x)$ は次の微分方程式を満足する[6]．

$$x^2w''(x)+xw'(x)+(x^2-\nu^2)w(x)=0 \tag{12}$$

式(3)を上式に代入することにより，$f_\nu(t)$ は次の微分方程式

$$t^2f_\nu''(t)+2(t-i)f_\nu'(t)+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)f_\nu(t)=0 \tag{13}$$

を満足することがわかる．この微分方程式に τ 法を適用して，t が小さいときの $f_\nu(t)$ の近似式を求めることにする．そこで，上式の右辺に，直交区間 $0\leqq t\leqq\eta$ のずらし超球多項式 (shifted ultraspherical polynomial) を τ 倍したものを付加した微分方程式

$$t^2f_{\nu m}''(t)+2(t-i)f_{\nu m}'(t)+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)f_{\nu m}(t)=\tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right) \tag{14}$$

を考える．ずらし超球多項式 $C_m^{*(\alpha)}(t)$($C_m^{*(\alpha)}(t)$ は，超球多項式[7] $C_m^{(\alpha)}(t)$ の直交区間 $-1\leqq t\leqq1$ を，$0\leqq t\leqq1$ にずらしたもので，$C_m^{*(\alpha)}(t)=C_m^{(\alpha)}(2t-1)$ なる関係がある）は，$\alpha>-\frac{1}{2}$，$\alpha\fallingdotseq0$ のとき，

$$C_m^{*(\alpha)}(t)=\sum_{k=0}^m C_{mk}^{*(\alpha)}t^k=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha)}\times\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}\frac{\Gamma(2\alpha+m+k)}{k!(m-k)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+k\right)}t^k \tag{15}$$

と定義され，$\alpha=0$ のときには，$C_m^{*(0)}(t)=\lim_{\alpha\to0}(1/\alpha)C_m^{*(\alpha)}(t)$ と定義される．ずらし超球多項式は，$\alpha=0$ のときには，ずらしチェビシェフ多項式[7] $T_m^*(t)$ を $2/m$ 倍したものに等しく，$\alpha=0.5$ のときには，ずらしルジャンドル多項式[7] $P_m^*(t)$，$\alpha=1$ のときには，第2種ずらしチェビシェフ多項式[7] $U_m^*(t)$ と等しい．式(14)は次の m 次の多項式を特解としてもつ．

$$f_{\nu m}(t)=-\tau\sum_{k=0}^m\frac{C_{mk}^{*(\alpha)}\sum_{l=0}^k a_lt^l}{2(k+1)a_{k+1}\eta^k} \tag{16}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} a_0&=1\\ a_l&=i^l\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots(4\nu^2-(2l-1)^2)}{l!8^l}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

であり，$C_{mk}^{*(\alpha)}$ は式(15)で与えられる係数である．式(14)の右辺の τ が十分に小さいならば，この $f_{\nu m}(t)$ は，$C_m^{*(\alpha)}(t/\eta)$ の直交区間 $0\leqq t\leqq\eta$ において，式(13)の $f_\nu(t)$ に対する近似式と考えることができるであろう．$f_\nu(0)=1$ であるので，初期条件として，$f_{\nu m}(0)=1$ を採用する．それで，τ は

$$\tau=-\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{2(k+1)a_{k+1}\eta^k}}\qquad(18)$$

と決められ，

$$f_{\nu m}(t)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(\alpha)}\sum_{l=0}^{k}a_lt^l}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}\qquad(19)$$

が得られる．上式は，式(13)の形式的級数解，すなわち，$f_\nu(t)$ の $t=0$ を中心とする漸近展開式

$$f_\nu(t)\sim\sum_{l=0}^{\infty}a_lt^l\qquad(20)$$

の k 項までの和 $(k=0,1,\cdots,m)$ の重みつき平均を表している．

2.2 誤差解析

$f_{\nu m}(t)$ の絶対誤差 $\varepsilon_{\nu m}(t)$ を次式にて定義する．

$$\varepsilon_{\nu m}(t)=f_{\nu m}(t)-f_\nu(t)\qquad(21)$$

$f_{\nu m}(t)$ は，

$$t^2f_{\nu m}''(t)+2(t-i)f_{\nu m}'(t)+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)f_{\nu m}(t)=\tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right)\qquad(22)$$

を満足する．ただし，上式の右辺および以下の式中の τ は式(18)で与えられたものとする．したがって，式(13)，(21)および(22)より，$\varepsilon_{\nu m}(t)$ の満足する微分方程式は，

$$t^2\varepsilon_{\nu m}''(t)+2(t-i)\varepsilon_{\nu m}'(t)+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\varepsilon_{\nu m}(t)=\tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right)\qquad(23)$$

として与えられる．上式の一般解を求めよう．式(13)の独立な解は，

$$f_\nu(t)=\left(\frac{\pi}{2t}\right)^{1/2}e^{-i((1/t)-(1/2)\nu\pi-(1/4)\pi)}H_\nu^{(1)}(x)\qquad(24)$$

$$g_\nu(t)=\left(\frac{\pi}{2t}\right)^{1/2}e^{-i((1/t)-(1/2)\nu\pi-(1/4)\pi)}H_\nu^{(2)}(x)\qquad(25)$$

である．ただし，$H_\nu^{(2)}(x)$ は第2種ハンケル関数であり，式(25)は，$H_\nu^{(2)}(x)$ が式(12)を満足することから得られる．したがって，定数変化の方法を用いて，式(23)の一般解を求めると，

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\nu m}(t)&=Af_\nu(t)+Bg_\nu(t)\\&\quad-f_\nu(t)\tau\int_0^t\frac{C_m^{*(\alpha)}\left(\dfrac{u}{\eta}\right)g_\nu(u)}{u^2\Delta(u)}du\\&\quad+g_\nu(t)\tau\int_0^t\frac{C_m^{*(\alpha)}\left(\dfrac{u}{\eta}\right)f_\nu(u)}{u^2\Delta(u)}du\end{aligned}\qquad(26)$$

となる．ただし，A および B は初期条件によって決定される定数であり，

$$\begin{aligned}\Delta(u)&=f_\nu(u)g_\nu'(u)-f_\nu'(u)g_\nu(u)\\&=\frac{2i}{u^4}\exp\left\{-2i\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}\end{aligned}\qquad(27)$$

である．上式の第2式は，ハンケル関数のロンスキアン関係式[8]を用いて求められる．$f_\nu(t)=1+O(t)$ および $g_\nu(t)=\exp\left\{-2i\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\nu\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}\{1+O(t)\}$ より，初期条件 $\varepsilon_{\nu m}(0)=0$ は，

$$A\lim_{t\to0}f_\nu(t)+B\lim_{t\to0}g_\nu(t)=0\qquad(28)$$

と表される．$\lim_{t\to0}f_\nu(t)=1$ であるが，$\lim_{t\to0}g_\nu(t)$ は存在しないので，上式が成り立つためには，

$$A=B=0\qquad(29)$$

でなければならない．したがって，絶対誤差 $\varepsilon_{\nu m}(t)$ は，

$$\varepsilon_{\nu m}(t)=\tau\int_0^t\frac{\{f_\nu(u)g_\nu(t)-f_\nu(t)g_\nu(u)\}u^2C_m^{*(\alpha)}\left(\dfrac{u}{\eta}\right)}{2i\exp\left\{-2i\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{2}\nu\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}}du\qquad(30)$$

と表される．

$m\to\infty$ のとき，$0\leqq t<+\infty$ で，$|\varepsilon_{\nu m}(t)|$ が0へ一様収束するかどうかを調べよう．ここでは，$\alpha\geqq0$ の場合を考える．$-\dfrac{1}{2}<\alpha<0$ の場合は，紙面の都合で省略するが，$\alpha\geqq0$ の場合と同様な結果が得られる．$\alpha\geqq0$ ならば，$0\leqq u\leqq\eta$ において，

$$C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{u}{\eta}\right)\leqq\frac{\Gamma(m+2\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(2\alpha)}\quad(\alpha\neq0)\qquad(31)$$

$$C_m^{*(0)}\left(\frac{u}{\eta}\right)\leqq\frac{2}{m}\qquad(32)$$

であること[9]より，

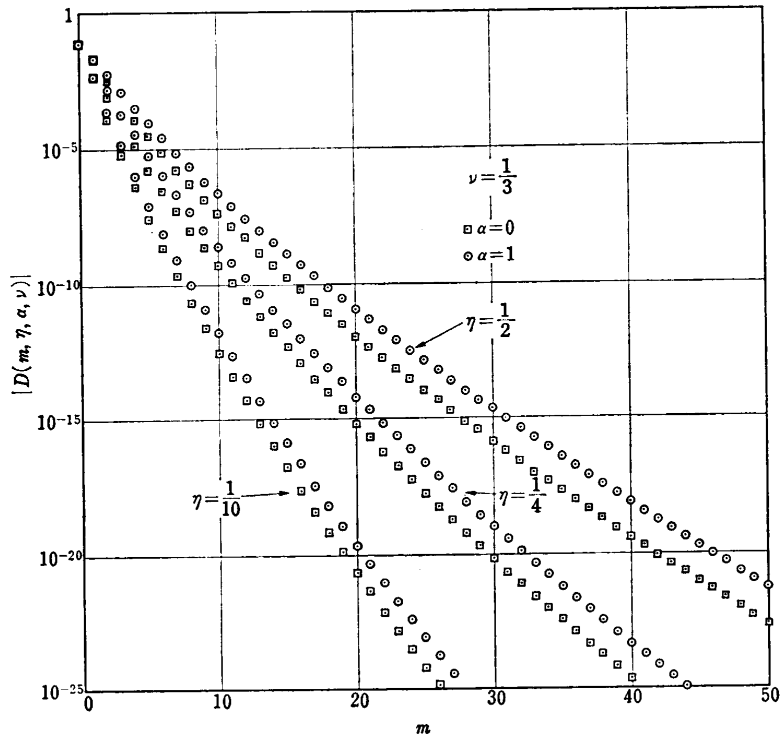

図 1　m に対する $|D(m,\eta,\alpha,\nu)|$ の値
Fig. 1　$|D(m,\eta,\alpha,\nu)|$ as a function of m.

$$|\varepsilon_{\nu m}(t)|\leqq\frac{1}{2}|D(m,\eta,\alpha,\nu)|\times\int_0^t|\{f_\nu(u)g_\nu(t)-f_\nu(t)g_\nu(u)\}u^2|du \tag{33}$$

が成り立つ．ただし，

$$D(m,\eta,\alpha,\nu)=\frac{\Gamma(m+2\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(2\alpha)\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{2(k+1)a_{k+1}\eta^k}} \tag{34}$$

である．式(33)の被積分関数は，t が有限ならば，有界な関数であるので，その積分値は t の有界な関数となる．したがって，固定された η, α および ν に対して，$m\to\infty$ のとき，$|\varepsilon_{\nu m}(t)|$ が0に一様収束するためには，$|D(m,\eta,\alpha,\nu)|\to 0$ であればよい．$m\to\infty$ のとき，$|D(m,\eta,\alpha,\nu)|\to 0$ であることの解析的な証明は，現在のところ，成功していないが，η,α および ν のいろいろな値に対して行った数多くの数値実験は，そのようになることを示している．**図1**には，数値実験の一例として，$\eta=\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ および $\frac{1}{2}$, $\alpha=0$ および 1, $\nu=\frac{1}{3}$について，m に対する $|D(m,\eta,\alpha,\nu)|$ の減少の様子を示す．

2.3　α の選定

$f_{\nu m}(t)$ の相対誤差 $\epsilon_{\nu m}(t)$ を

$$\epsilon_{\nu m}(t)=\frac{\varepsilon_{\nu m}(t)}{f_\nu(t)}=\frac{f_{\nu m}(t)-f_\nu(t)}{f_\nu(t)} \tag{35}$$

と定義し，以下，相対誤差 $\epsilon_{\nu m}(t)$ の絶対値を，「相対誤差 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$」と略記する．なお，上式の実際の計算において，$f_\nu(t)$ の値としては，本論文の方法とは別の方法により，十分に高い精度で計算された値を採用した．別の方法については付録参照．

式(19)で与えられる近似式 $f_{\nu m}(t)$ は，パラメータ η, m, ν および α をもっている．ここでは，パラメータ $\alpha\left(\alpha>-\frac{1}{2}\right)$ について，その最適値を見つけることにしよう．そのため，パラメータ η, m および ν を固定して，$0\leqq t\leqq\eta$ における相対誤差 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の α 依存性を調べる．**図2**には，$\eta=\frac{1}{4}$, $m=10$, $\nu=\frac{1}{3}$ の場合，$\alpha=0, 0.5, 1$ および 1.5 に対して，$0\leqq t\leqq\eta$ における相対誤差 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の様子を示す．$|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の t に対する変化の様子は，α によって大きく異なってい

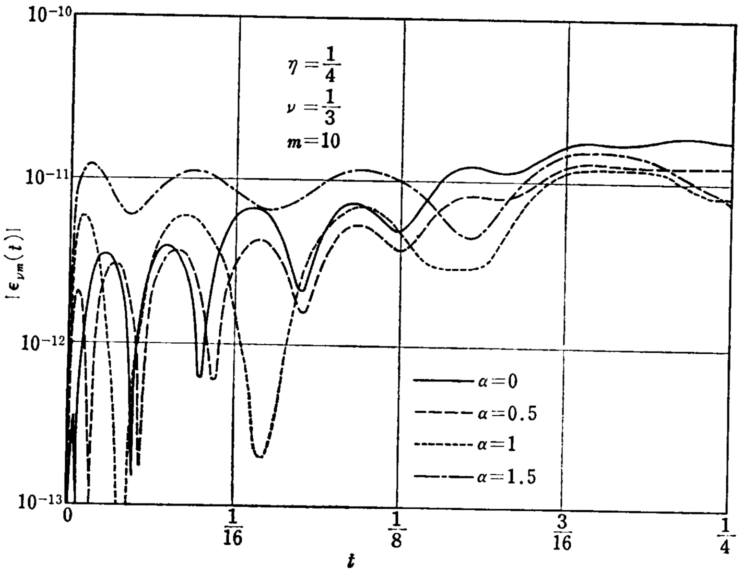

図 2 t に対する $|\epsilon_{\nu m}(t)|$
Fig. 2 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ as a function of t.

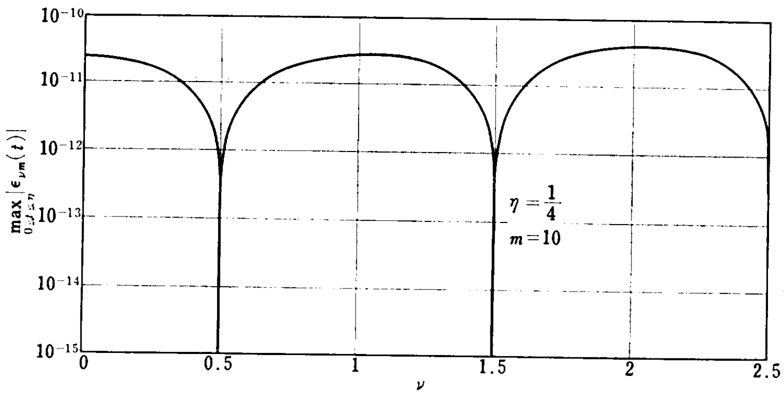

図 3 ν に対する $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$
Fig. 3 $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ as a function of ν.

るが，$\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ は，α によって大差ないことがわかる．この事実は，η, m および ν の他の値に対して行った結果についても同様である．したがって，α としては，何を選んでもよいわけであるが，いろいろな場合について調べた結果，$\alpha=1$ 付近で $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ が，わずかであるが最小となるので，

$$\alpha=1 \tag{36}$$

と選ぶことにする．このとき，$C_m^{*(\alpha)}(t)$ は第2種ずらしチェビシェフ多項式 $U_m^*(t)$ となる．

2.4 $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の ν 依存性

η および m をいろいろな値に固定して，$0\leq t\leq\eta$ における相対誤差 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の最大値 $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の ν 依存性について調べた．**図 3** には，その一例として，$\eta=\frac{1}{4}$, $m=10$ の場合について，$0\leq\nu\leq2.5$ における $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ の ν 依存性を示す．この $\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ は，$0\leq\nu\leq2.5$ において，$\nu=0, 1$ あるいは 2 付近で，最大の相対誤差 $\max_{0\leq\nu\leq2.5}\{\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|\}$ をとって

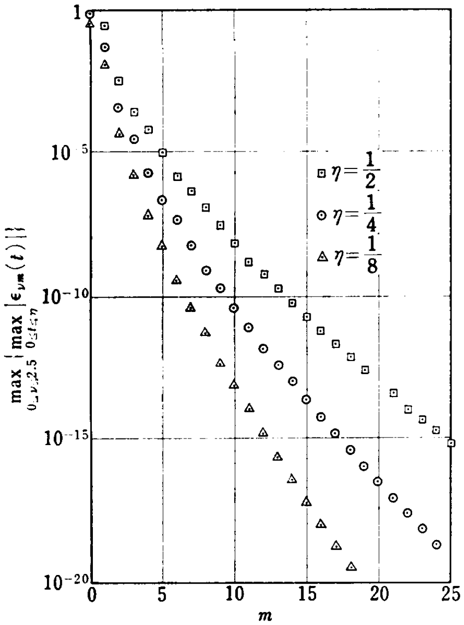

図 4　m に対する $\max_{0\leq\nu\leq2.5}\{\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|\}$

Fig. 4　$\max_{0\leq\nu\leq2.5}\{\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|\}$ as a function of m.

いる．なお，$\nu=0.5$, 1.5 および 2.5 で，$\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ が急激に小さくなっているのは，そこでは，式(19)が漸近展開式（この場合には，漸近展開式は項が有限個となり，厳密な式になる）と一致するからである．この急激に小さくなる部分を除いて，$\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|$ は同程度の大きさであることがわかる．

2.5　η および m の選定

最大の相対誤差 $\max_{0\leq\nu\leq2.5}\{\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|\}$ は，パラメータとして，η と m のみを含んでいる．**図 4** には，$\eta=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ および $\frac{1}{8}$ について，m に対する $\max_{0\leq\nu\leq2.5}\{\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|\}$ が示されている．同じ相対精度を得るためには，η が小さいほど，m は少なくて済む．η は，t のどの範囲で，本計算法を用いるかによって決まる定数である．たとえば，$0\leq t\leq\frac{1}{2}$ $(2\leq x\leq\infty)$ で，本計算法を使うとすれば，$\eta=\frac{1}{2}$ としなければならない．η が決まれば，m は，$\max_{0\leq\nu\leq2.5}\{\max_{0\leq t\leq\eta}|\epsilon_{\nu m}(t)|\}$ が所要の精度（単精度あるいは倍精度）を満足する最小の m として決めることができる．ただし，この例の場合，t が小さいところ，たとえば，$0\leq t\leq\frac{1}{8}$ では，所要の精度を満足する m は，$\eta=\frac{1}{2}$ のときより，少なくて済むので，t の区間を適当に分けて，それぞれの区間で，個別の m に対する近似式を用いて計算すると効率がよい．

本方法は，x が大きい（t が小さい）場合の計算法であり，いかなる値以上の x で，本方法を用いるかを決めなければならない．x が小さい場合には，「x が小さい場合の $Y_\nu(x)$ の計算法」[4] を用いることができ，参考文献 4) の図 1 には，その方法の適用限界，すなわち，適用できる最大の x（ν に依存する）が示されている．x が小さい場合の方法，および，x が大きい場合の方法（本方法）を，ν および x により，使いわける必要があるが，ここでは，どちらの計算法を使うかを容易にするため，

$$x\leq4 \tag{37}$$

では，x が小さい場合の方法，そして，

$$x>4 \tag{38}$$

では，x が大きい場合の方法（本方法）を用いることにする．

本方法は，単精度（8D）の場合には，

$$\left.\begin{aligned}&4<x<10 \text{ では，} \eta=\frac{1}{4},\ m=7\\&x\geq10 \text{ では，} \eta=\frac{1}{10},\ m=5\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

とし，倍精度(18D)の場合には，

$$\left.\begin{aligned}&4<x<10 \text{ では，} \eta=\frac{1}{4},\ m=23\\&x\geq10 \text{ では，} \eta=\frac{1}{10},\ m=15\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

として，二つの区間において，別個の近似式を用いると能率がよい．

2.6　計　算　式

$Y_\nu(x)$ は，式(6)より，

$$Y_\nu(x)=\sqrt{t}\left\{\tilde{P}(\nu,t)\sin\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+\tilde{Q}(\nu,t)\cos\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right\} \tag{41}$$

と書くことができる．ただし，

$$\left.\begin{aligned}\tilde{P}(\nu,t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}P(\nu,t)\\\tilde{Q}(\nu,t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}Q(\nu,t)\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

である．$P(\nu,t)$ および $Q(\nu,t)$ は，それぞれ，$f_\nu(t)$ の実部および虚部であるので，$\tilde{P}(\nu,t)$ および $\tilde{Q}(\nu,t)$

は，$f_\nu(t)$ の近似式(19)を用いると，次式のように表される．

$$\begin{Bmatrix}\tilde{P}(\nu,t)\\ \tilde{Q}(\nu,t)\end{Bmatrix} \doteqdot \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix}\left[\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(1)}\displaystyle\sum_{l=0}^{k}a_l t^l}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(1)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}\right] = \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix}\left[\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\sum_{l=0}^{m}a_l t^l\sum_{k=l}^{m}\frac{C_{mk}^{*(1)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(1)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}\right] \tag{43}$$

上式を変形すれば，$\tilde{P}(\nu,t)$ および $\tilde{Q}(\nu,t)$ に対する能率的な計算式として，

$$\begin{Bmatrix}\tilde{P}(\nu,t)\\ \tilde{Q}(\nu,t)\end{Bmatrix} \doteqdot \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix}\left[\frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m}t^l(-i)^l\frac{d_l}{W_l}\sum_{k=l}^{m}i^k W_{k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}i^k W_{k+1}}\right] \tag{44}$$

が得られる．ただし，

$$W_0=1 \tag{45}$$

$$W_k=\prod_{n=0}^{k-1}\frac{e_n}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-\nu^2}\quad(k\geqq 1) \tag{46}$$

であり，d_l および上式の e_n は，

$$\left.\begin{aligned}d_0&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\\ d_l&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C_{m,l-1}^{*(1)}}{\eta^{l-1}l}\quad(l\geqq 1)\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned}e_0&=2C_{m0}^{*(1)}\\ e_n&=\frac{2nC_{mn}^{*(1)}}{\eta C_{m,n-1}^{*(1)}}\quad(n\geqq 1)\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

である．なお，いま考えている ν の範囲 $0\leqq\nu\leqq 2.5$ において，$\nu=0.5$, 1.5 および 2.5 の場合には，式(46)の分母は，それぞれ，$n=0$, 1 および 2 のとき，0 になり，都合が悪いが，この場合には，ν が半整数のとき，厳密な式となる漸近展開式(9)および(10)を用いて計算を行えばよい．

2.7 プログラム作成上の注意

能率的なプログラムを作成するために，次のことが必要である．

① 式(47)の $d_l(l=0,1,\cdots,m)$ および式(48)の e_n $(n=0,1,\cdots,m)$ は，固定された m および η に対して定数であるので，あらかじめ，計算して表にしておき，実際に，式(44)の値を求めるときには，その表の値を用いて計算を行う．なお，丸め誤差を防ぐために，d_l および e_n は，多倍長計算で求めておくことが好ましい．

② 式(44)の分子の $(-.)^l d_l/W_l\sum_{k=l}^{m}i^k W_{k+1}$ および分母の計算値を一時的に記憶しておくとよい．なぜならば，同じ値の ν に対して続けて 2 回以上計算するときには，それらの値の計算が不要となり，$Y_\nu(x)$ の値を能率的に計算できるからである．

3. む す び

以上において，x が大きい場合の $Y_\nu(x)$ の計算法を述べた．式(44)の $\tilde{P}(\nu,t)$ および $\tilde{Q}(\nu,t)$ の計算値を用いれば，$J_\nu(x)$ の値も，次式により，ほとんど手間をかけることなしに求めることができるであろう．

$$J_\nu(x)=\sqrt{t}\left\{\tilde{P}(\nu,t)\cos\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)-\tilde{Q}(\nu,t)\sin\left(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right\} \tag{49}$$

謝辞　日頃ご討論いただく本学鳥居達生助教授に感謝します．

参 考 文 献

1) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, pp. 464-507, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1956).
2) Goldstein, M. and Thaler, R. M.: Bessel Functions for Large Arguments, *MTAC*, Vol. 12, pp. 18-26 (1958).
3) Goldstein, M. and Thaler, R. M.: Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions, *MTAC*, Vol. 13, pp. 102-108 (1959).
4) 吉田年雄，二宮市三：x が小さい場合のベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol. 23, No. 3, pp. 296-303 (1982).
5) Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., p. 168, Cambridge University Press, Cambridge (1966).
6) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：数学公式III，p. 146，岩波書店，東京 (1968).
7) National Bureau of Standards: *Handbook of Mathematical Functions* (Appl. Math. Ser. 55), p. 774, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C. (1964).
8) 6) の p. 160.
9) Szegö, G.: *Orthogonal Polynomials*, p. 171, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1967).

付　録

式(35)の $f_\nu(t)$ の値は，漸化式による方法[3] を用いて $J_\nu(x)$ および $Y_\nu(x)$ の値を計算し，

$$f_\nu(t)=P(\nu,t)+iQ(\nu,t) \tag{A.1}$$

$$P(\nu,t)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{J_\nu(x)\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+Y_\nu(x)\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \tag{A.2}$$

$$Q(\nu,t)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{-J_\nu(x)\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+Y_\nu(x)\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \tag{A.3}$$

により求めた．ただし，この計算は4倍精度演算を用いて行い，$f_\nu(t)$ の値を 10^{-30} 程度の相対精度で求めた．

(昭和57年9月 8 日受付)
(昭和58年1月17日採録)