情報処理学会論文誌 Vol.57 No.5 1436–1440 (May 2016)

テクニカルノート

連邦制における議席配分について

一森 哲男[1,a)]

受付日 2015年11月12日, 採録日 2016年1月12日

概要：このノートの目的は，文献 [8] で扱った議員定数配分問題の結論を補足することである．人口に比例して選挙区に議席を配分する場合，人口が極端に少ない選挙区には議席が配分されない恐れがある．現実には，それを防止する対策が定められているが，文献 [8] ではその議論が皆無であった．本稿では，この点について詳しく議論する．

キーワード：議員定数配分，アルファ・ダイバージェンス，1 人 1 票，選挙区，連邦制

On Apportionment in a Federal System

Tetsuo Ichimori[1,a)]

Received: November 12, 2015, Accepted: January 12, 2016

Abstract: This note complements the paper [8] which treats the apportionment problem. The problem demands the allocation of legislative seats in proportion to the population of electoral districts. Accordingly, least populous districts might not be able to receive a seat. However, in reality, there are some special provisions that every district can get at least one seat. Because the paper [8] does not discuss anything on this subject, we discuss it in detail in this note.

Keywords: apportionment, alpha-divergence, one-man one-vote, electoral district, federal system

1. はじめに

本ノートでは，人口や得票に比例して議席を配分する議員定数配分問題を扱う．この問題は単純なように思えるが，最善の配分方式を見つけ出すことは非常に難しく，200 年以上の未解決問題となっている．我が国では，1 票の格差と呼ばれ，しばしばメディアに取り上げられている．文献 [6], [8], [9] では，情報理論の観点から，この問題が議論されている．特に，文献 [8] では新しい評価基準が提案され，現実的な解法として，Webster 方式（我が国では Sainte-Laguë 方式と呼ばれている）が最善の配分方式であると結論付けている．そこでは，人口や得票が極端に少ない場合も考慮に入れているが，このような場合，当然，選挙区や政党には，議席は配分されない．政党に議席を配分する比例代表制の場合であれば問題は生じないが，選挙区に議席を配分する場合には（これは連邦制における議席配分と呼ばれる），地域に代表者が存在しなくなり，ゆゆしき問題となる．この事態を避けるため，たとえば，アメリカ合衆国では，憲法で各州に 1 議席を保証している．あるいは，最近のわが国の公職選挙法の一部改正のように，2 つの選挙区が 1 つに合区される．具体的にいえば，参議院の選挙区において，鳥取県と島根県および徳島県と高知県がそれぞれ 1 つの選挙区を構成するように変わった．

しかしながら，合区する措置と異なり，アメリカのように人口の少ない州に 1 議席を保証する措置は，特例として議席を与えており，比例して議席を配分しているとはいえない．だから，選挙区が比例して議席を受け取るのであれば，ある程度の大きさの人口が期待される．本ノートの目的は，このことを考慮にいれて，文献 [8] の評価基準に対して最善の配分方式を見つけることである．得られた結論は，ここで考えた配分方式のクラスの中では，再度，Webster 方式が最善となった．

[1] 大阪工業大学
Osaka Institute of Technology, Hirakata, Osaka 573–0196, Japan
[a)] ichimori@is.oit.ac.jp

2. ダイバージェンス最小化に必要な議席数

この章では，対象とした配分方式のクラスの説明をし，最善の配分方式を特定するための準備をする．

連邦制における議席配分を議論するため，アメリカの下院議員の配分を考える．最初に記号を定義する．議席総数（議員定数）を h，州の数を s，州 i の人口を p_i，州 i に配分される議席数を a_i とする．これらの数値はすべて正の整数である[*1]．総人口を $\pi = \sum_{i=1}^{s} p_i$ とし，州 i の取り分を $q_i = hp_i/\pi$ とする．つまり，取り分とは完全に比例して配分した場合の議席数（実数値）のことである．

我々の問題は，s 州間で h 議席を配分し，人口 $P = (p_1, \ldots, p_s)$ に比例する配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ を見つけることである．しかしながら，現実の問題では P に比例する A は存在しない．これがこの問題の最大の難点である．これに対処するため，以下の配分方式のクラスが提案されている（文献 [8], [9] 参照）．

実数パラメータ θ（$-\infty < \theta < +\infty$）を持つ関数 $\psi_\theta(x)$（$x > 0$）を

$$\psi_\theta(x) = \begin{cases} x \log x - (x-1), & \theta = 1 \\ -\log x + (x-1), & \theta = 0 \\ \dfrac{x^\theta - 1}{\theta(\theta-1)} - \dfrac{x-1}{\theta-1}, & \theta \neq 1, 0 \end{cases} \tag{1}$$

と定義する．このとき，配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ から取り分 $Q = (q_1, \ldots, q_s)$ へのアルファ・ダイバージェンス [2] は

$$D_\theta(A||Q) = \sum_{i=1}^{s} q_i \psi_\theta\left(\frac{a_i}{q_i}\right) \tag{2}$$

と定義される [3]．慣例では，このダイバージェンスに含まれるパラメータの記号として α が使われるが，本稿では，代わりに θ を使用する．州全体の集合を $S = \{1, \ldots, s\}$ とし，正の整数の集合を $\mathbb{Z}_+$ とするとき，このダイバージェンスを最小にする配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ を求める最適化問題 $\mathbf{P}_\theta$：

$$\min D_\theta(A||Q) \text{ s.t. (i) } a_i \in \mathbb{Z}_+ \ (i \in S),\ \text{(ii) } \sum_{i \in S} a_i = h$$

を考える．記号 s.t. は制約を意味する．この最適解が議席の配分を定義するので，この最適化問題が 1 つの配分方式を意味する．より厳密には，ダイバージェンスにはパラメータ θ が含まれているので，パラメータ θ を持つ配分方式のクラスを意味する．いくつかのパラメータ θ の値と配分方式の対応を**表 1** に与える（詳細は文献 [6], [7] 参照）．

次に，パラメータ θ の値を特定し，最善の配分方式を見つけるための準備をする．上記の問題 $\mathbf{P}_\theta$ から制約 (ii) を除いた緩和問題 $\mathbf{R}_\theta$：

[*1] 文献 [8] では a_i の値として 0 を許している．

表 1 パラメータ θ と対応する配分方式
Table 1 Values of parameter θ and apportionment methods.

θ	配分方式
$-\infty$	Adams
-4	Dean
-1	Hill
0	TS
1	Theil
2	Webster
$+\infty$	Jefferson

$$\min D_\theta(A||Q) \text{ s.t. (i) } a_i \in \mathbb{Z}_+ \ (i \in S)$$

を考え，これの最適解を $a_i(\theta)$（$i \in S$）と書く．このとき，これらの和：$H(\theta) = \sum_{i \in S} a_i(\theta)$ は，変数 a_i を正の整数に限定したとき，ダイバージェンスを最小にするために必要な議席の総数を表している．さらに，非負の実数 r（$0 \leq r < h/s$）に対して，s 次元空間 $\mathbb{R}^s$ 内の $s-1$ 次元単体：

$$T = \left\{ (x_1, \ldots, x_s) \,\middle|\, \sum_{i \in S} x_i = h,\ x_i \geq r \ (i \in S) \right\} \tag{3}$$

を考える．ここで，制約 $x_i \geq r$ は，州 i の取り分 q_i が r より大きいこと $q_i > r$ に対応している．点 $\mathrm{Q} = (q_1, \ldots, q_s)$ が単体 T の内部 $\mathrm{int}(T)$ 全体にわたるとき，$a_i(\theta)$ の平均を $\bar{a}_i(\theta)$ とする．このときの $H(\theta)$ の平均 $\bar{H}(\theta) = \sum_{i \in S} \bar{a}_i(\theta)$ はダイバージェンスを最小にするために必要な議席数の平均値を表す．本稿では，文献 [8] で提案された評価基準に基づき，この $\bar{H}(\theta)$ が議席総数 h に最も近づく θ の値を求め，配分方式を特定する．

パラメータ $\theta \neq 1, 0$ に対して，関数 $u(x, \theta)$（$x > 0$）を

$$u(x, \theta) = \left(\frac{(x+1)^\theta - x^\theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta - 1}} \tag{4}$$

と定義する．$u(x, 1)$ と $u(x, 0)$ はそれぞれ極限操作で定義され，$u(x, 1) = \lim_{\theta \to 1} u(x, \theta)$ と $u(x, 0) = \lim_{\theta \to 0} u(x, \theta)$ は，それぞれ，$x > 0$ に対して

$$u(x, 1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}, \quad u(x, 0) = \frac{1}{\log \frac{x+1}{x}}$$

となる．この関数 $u(x, \theta)$ は正の実数 x と $x+1$ のパラメータ θ の Stolarsky 平均といわれ，θ に関して連続かつ狭義増加で，$x < u(x, \theta) < x+1$ がなりたち，$\theta \to -\infty$ のとき $u(x, \theta) \to x$，および，$\theta \to +\infty$ のとき $u(x, \theta) \to x+1$ となる [10]．また，便宜的に，$u(0, \theta) = 0$ と約束しておく．このとき，以下の補題（文献 [8] の定理 4）がなりたつ．

補題 1 $u(k-1, \theta) < q_i < u(k, \theta)$ となる $k \in \mathbb{Z}_+$ が存在すれば $a_i(\theta) = k$ となる．

ここで，記号：$(x)_+$ を定義する．$x > 0$ ならば，$(x)_+ = x$ とし，そうでなければ，$(x)_+ = 0$ とする．また，$\lfloor x \rfloor$ を床

情報処理学会論文誌　Vol.57　No.5　1436–1440 (May 2016)

関数とする．

定理 1　整数 $m = \lfloor h - (s-1)r \rfloor$ を定義するとき，

$$\bar{H}(\theta) = s \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{(h - sr - (u(k,\theta) - r)_+)_+}{h - sr} \right)^{s-1}$$

が成り立つ[*2]．

この定理 1 の証明は付録に与える．

3. パラメータ値の決定

この章では，パラメータ θ の値が 2 のとき，定理 1 の $\bar{H}(\theta)$ が議席総数 h に最も近づくことを示す．

1 章で述べたように，人口に比例して議席を受け取るならば，州はある程度の人口が期待される．このことに関して，アメリカの Massachusetts 州の連邦地方裁判所で議論されたことがある[*3]．Balinski らは著書 [1] の中で，配分方式の偏りの計算において，合衆国憲法は非常に人口の少ない州を特別扱いしており，これを勘案すれば，取り分が 0.5 未満の州は計算から除外すべきとかねてより主張していた．一方，Ernst はその裁判で，取り分が 1 未満の州を計算から除外すべきと反論した．また，Balinski らは配分方式の偏りを調べるため数値シミュレーションを用いたが，このとき，取り分が 1.5 未満の州を計算から除外していた．いつもの 0.5 と異なり 1.5 未満の州を除外としたことを Ernst は裁判で追求した [4]．最終的に裁判官（Woodlock 判事）は，計算から除外する州と除外しない州の間の，取り分の閾値はとにかく 1.5 までの値であれば，どの値でも理にかなっていると述べた．

そこで，本稿では，すべての州の取り分の下限が 0.5 から 1.5 と仮定し，$q_i > r$（$i \in S$），$r \in (0.5, 1.5)$，定理 1 の $\bar{H}(\theta)$ が最も議席総数 h に近づくパラメータ θ の値を求める．

いま，下限 r を明示して，$I(\theta, r) = \bar{H}(\theta) - h$ と置く．定理 1 の $\bar{H}(\theta)$ に含まれる $u(k,\theta)$ は，固定された $k > 0$ に対して，θ の狭義増加関数であることから，$I(\theta, r)$ は θ に関して狭義減少関数となる[*4]．具体的に，現在のアメリカの州の数 $s = 50$ と下院の議席総数 $h = 435$ を用いて，$0 < r < 2$ の範囲に対して $I(1,r)$，$I(2,r)$，$I(3,r)$ のグラフを図に表す（**図 1** 参照）．区間 (0.5, 1.5) において，すべての r の値に対して $I(2,r)$ が 0 に最も近づいているわけではないが，全体的には $I(2,r)$ が 0 に一番近づいている．各 $\theta \in \{1,2,3\}$ に対して，区間 (0.5, 1.5) にわたる $I(\theta, r)$ の平均値，すなわち，積分 $\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr$ の値を数値的に求めてみると，順に，0.48，0.00，−0.47 となり，$\theta = 2$ のとき，すなわち，Webster 方式の場合，$\bar{H}(\theta)$ が $h = 435$ に平均的に最も近づいている．この数値計算の結果から，より厳密的なことがいえる．つまり，$I(\theta, r)$ の θ に関する狭義減少性より，$\theta < 2$ ならば，このとき，$\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr > 0.00$ となり，$\theta > 2$ ならば，このとき，$\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr < 0.00$ となる．$\theta = 2$ のときのみ，この積分値が 0.00 となり，Webster 方式のみ，$\bar{H}(\theta)$ が $h = 435$ に平均的に最も近づく．さらに，同様の計算を行ってみる．1790 年度の第 1 回の国勢調査から，2010 年度までの，すべての国勢調査結果に対して[*5]，下院議員の議席が配分されたが，そのときの州の数と議席総数のペア (s,h) に対して，積分 $\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr$ の値を数値的に求めてみた（**表 2** 参照）．すべての場合に対し，$\theta = 2$ の Webster 方式では，$\bar{H}(\theta)$ が h の値に平均的に最も近づいている．

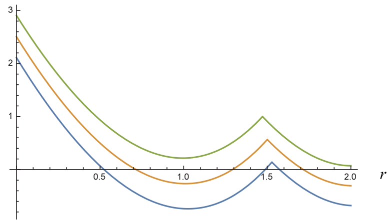

図 1　上から順に $I(1,r)$，$I(2,r)$，$I(3,r)$（$0 < r < 2$）
Fig. 1　Graphs of $I(1,r)$ (top), $I(2,r)$ and $I(3,r)$ (bottom) ($0 < r < 2$).

表 2　積分 $\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr$ の値
Table 2　Values of $\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr$.

年度	(s,h)	$\theta=1$	$\theta=2$	$\theta=3$
1790	(15, 105)	0.16	0.00	−0.16
1800	(16, 141)	0.15	0.00	−0.15
1810	(17, 181)	0.14	0.00	−0.14
1820	(24, 213)	0.23	0.00	−0.22
1830	(24, 240)	0.21	0.00	−0.21
1840	(26, 223)	0.25	0.00	−0.25
1850	(31, 234)	0.32	0.00	−0.32
1860	(34, 241)	0.37	0.00	−0.37
1870	(37, 292)	0.38	0.00	−0.37
1880	(38, 325)	0.37	0.00	−0.36
1890	(44, 356)	0.44	0.00	−0.44
1900	(45, 386)	0.44	0.00	−0.43
1910	(46, 433)	0.42	0.00	−0.41
1920–1950	(48, 435)	0.45	0.00	−0.44
1960–2010	(50, 435)	0.48	0.00	−0.47

これらよりも小さな s と h の組合せも考えた．具体的には $s \in \{3,4,5,6\}$，$h \in \{10,20,30,40,50\}$ の 20 通りの場合，および，$s \in \{7,8,9\}$，$h \in \{20,30,40,50\}$ の 12 通りの場合に対して，数値計算の結果，$\theta = 2$ のとき，積分 $\int_{0.5}^{1.5} I(\theta,r)\,dr$ の値はすべて 0.00 になった．

---

*2　単体 T や整数 m および $\bar{a}_i(\theta)$ と $\bar{H}(\theta)$ などはすべて下限 r に依存するが，記号を簡単化するために，それを明示していない．

*3　785 F. Supp. 230, Commonwealth of Massachusetts v. Mosbacher (1992).

*4　厳密には，$m \geq 2$，または，$m = 1$ かつ $u(1,\theta) - r > 0$ ならば，狭義減少となる．

*5　合衆国憲法に違反するが，1920 年度の国勢調査人口に基づく議席の再配分は行われなかった．ただ，当時の州の数は 48 で，下院議員の総数は 435 であった．

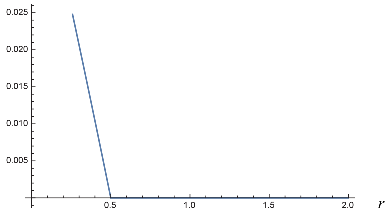

図 2　$I(2,r)$（$0<r<2$）のグラフ
Fig. 2　Graph of $I(2,r)$ $(0<r<2)$.

4.　あとがき

以前にも同じテーマで，すなわち，連邦制での議席配分で，同じ結論が得られている [5]．本ノートと大きく異なるところは，対象とした州の数と配分方式の数，および，配分方式の評価基準である．以前は州の数を 2 に限定し，対象とした配分方式も歴史上の 5 方式*6だけに限定している．配分方式の評価基準は人口の少ない方の州が人口の多い方の州よりも有利となる割合を用いている．この論文 [5] では，人口が極端に少ない場合も考慮に入れているが，その場合でも（特例としてではなく，比例配分の結果として）1 議席を与えており，他の文献ではみられない特殊な扱いをしている．その結果，どの配分方式も人口の少ない方の州が有利となる割合は一般的な評価よりもやや大きい．5 方式の中で，その割合が 50%に一番近いのが Webster 方式（数値シミュレーションによると 55%から 65%）である．

本稿のモデルで州の数 s が 2 の場合，任意の議席総数 $h\ge 3$ に対し，$I(2,r)=0$（$0.5\le r<1.5$）が理論的に示せ，$\theta=2$ の Webster 方式の場合，$\bar{H}(\theta)$ が議席総数 h にちょうど等しい．理論的な詳細は省略するが*7，その代わりとして，州の数 $s=2$，議席総数 $h=20$ として，$0<r<2$ の範囲に対して $I(2,r)$ のグラフを図に表す（**図 2** 参照）．州の数が 2 の場合は，このような意味で Webster 方式が最適である．この場合も含め，文献 [8] の評価基準のもとでは，連邦制での議席配分も Webster 方式が最も好ましいと思える．

参考文献

[1] Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation*, Yale University Press, New Haven (1982). 越山　康（監訳），一森哲男（訳）：公正な代表制，千倉書房，東京 (1987). 2nd ed., Brookings Institution Press, Washington D.C. (2001).

[2] Chernoff, H.: A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on a Sum of Observations, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.23, No.4, pp.493–507 (1952).

[3] Cichocki, A. and Amari, S.: Families of Alpha- Beta- and Gamma-Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities, *Entropy*, Vol.12, pp.1532–1568 (2010).

[4] Ernst, L.R.: Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges, *Management Science*, Vol.40, No.10, pp.1207–1227 (1994).

[5] 一森哲男：連邦制における議員定数の配分アルゴリズム，情報処理学会論文誌，Vol.50, No.12, pp.3127–3135 (2009).

[6] 一森哲男：分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について，情報処理学会論文誌，Vol.54, No.8, pp.1988–1995 (2013).

[7] 一森哲男：緩和除数方式の比例性と歴史上の 5 方式との関係について，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.56, pp.1–14 (2013).

[8] 一森哲男：ダイバージェンスを最小にする議席配分方式について，情報処理学会論文誌，Vol.56, No.6, pp.1442–1450 (2015).

[9] 一森哲男：ダイバージェンスによる議員定数配分方式の偏りについて，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.58, pp.42–55 (2015).

[10] Stolarsky, K.B.: Generalizations of the Logarithmic Mean, *Mathematics Magazine*, Vol.48, No.2, pp.87–92 (1975).

*6　5 方式とは，$\theta=-\infty,-4,-1,2,+\infty$ の配分方式，すなわち，Adams，Dean，Hill，Webster，Jefferson 方式である．

*7　定理 1 の等式に，$s=2$ を代入すればよい．$r=0$ の場合，文献 [9] において，$I(2,0)=0$ が理論的に示されている．

付　　録

A.1　定理 1 の証明

ここでは，定理 1 の証明を与えるが，その内容は文献 [8] の 4 章とほぼ同じである．本稿と異なるのは，$\theta>0$ のとき $u(0,\theta)>0$ と設定している点と取り分が $q_i>0$，つまり，下限が $r=0$ としている点の 2 カ所だけである．このことだけに注意し，文献 [8] の 4 章の内容に沿って行くと，容易に定理 1 の証明が得られる．繰返しを少なくするため，説明は簡潔にする．

最初に，関係式 $\bar{H}(\theta)=\sum_{i\in S}\bar{a}_i(\theta)$ は，2 州 i，j の対称性から，$\bar{H}(\theta)=s\cdot\bar{a}_1(\theta)$ と簡単化できる．$s-1$ 次元の単体：

$$\left\{(x_1,\ldots,x_{s-1})\,\middle|\,\sum_{i=1}^{s-1}x_i\le h-r,\ x_i\ge r\ (1\le i\le s-1)\right\}$$

を定義し，これを C とすると，

$$\bar{a}_1(\theta)=\frac{\int\cdots\int_C a_1(\theta)\,dx_1\cdots dx_{s-1}}{\int\cdots\int_C dx_1\cdots dx_{s-1}} \tag{A.1}$$

と表現できる．式 (A.1) の分母の積分は $s-1$ 次元の単体 C の体積を求めている．いま，単体 C を平行移動し，その頂点 $(r,\ldots,r)$ を原点に一致させると，容易に，単体 C の体積が $(h-sr)^{s-1}/(s-1)!$ であることが分かり，

$$\text{式 (A.1) の分母}=\frac{(h-sr)^{s-1}}{(s-1)!} \tag{A.2}$$

が得られる．

一方，式 (A.1) の分子の変数 x_2 から x_{s-1} に関する積分の値は，$r<x_1<h-(s-1)r$ のとき，$s-2$ 次元の単体

$$\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum_{i=2}^{s-1}x_i\le h-r-x_1,\ x_i\ge r\ (2\le i\le s-1)\right\}$$

の体積に等しいことが分かる．ここで，$\boldsymbol{x} = (x_2, \ldots, x_{s-1})$ と置いている．以前同様に，平行移動により，頂点 $(r, \ldots, r)$ を原点に一致させると，その体積が容易に求まり，$(h-(s-1)r-x_1)^{s-2}/(s-2)!$ に等しいことが分かる．よって，式 (A.1) の分子は

$$\frac{1}{(s-2)!}\int_r^{h-(s-1)r}(h-(s-1)r-x)^{s-2}a(\theta)\,dx$$

となる．ここでは，x_1 を x と書き直し，$a_1(\theta)$ を $a(\theta)$ と簡略化している．

この右辺の積分の計算を行うため，以下の 4 つの場合分け (i) $r \le u(1,\theta)$，$h-(s-1)r < u(m,\theta)$；(ii) $r \le u(1,\theta)$，$h-(s-1)r \ge u(m,\theta)$；(iii) $r > u(1,\theta)$，$h-(s-1)r < u(m,\theta)$；(iv) $r > u(1,\theta)$，$h-(s-1)r \ge u(m,\theta)$ を考える．他のケースの議論とほぼ同じなので，ここでは，ケース (i) のみを考える．まず，積分区間 $(r, h-(s-1)r)$ を $(r, u(1,\theta))$，$(u(k-1,\theta), u(k,\theta))$（$2 \le k \le m-1$），$(u(m-1,\theta), h-(s-1)r)$ の m 個の区間に分割する．このとき，各区間では補題 1 より $a(\theta)$ の値は，区間 $(r, u(1,\theta))$ では $a(\theta)=1$，$(u(k-1,\theta), u(k,\theta))$ では $a(\theta)=k$，$(u(m-1,\theta), h-(s-1)r)$ では $a(\theta)=m$ と定数となる．いま，

$$B = \int_r^{h-(s-1)r}(h-(s-1)r-x)^{s-2}a(\theta)\,dx$$

と置き，$a(\theta)$ の値が一定となるように，上記のように積分区間を細分すると，

$$\begin{aligned} B = &\int_r^{u(1,\theta)}(h-(s-1)r-x)^{s-2}\,dx \\ &+\sum_{k=2}^{m-1}k\times\int_{u(k-1,\theta)}^{u(k,\theta)}(h-(s-1)r-x)^{s-2}\,dx \\ &+m\times\int_{u(m-1,\theta)}^{h-(s-1)r}(h-(s-1)r-x)^{s-2}\,dx \end{aligned}$$

となる．各項の積分を行い，さらに，$B = B'/(s-1)$ と置くと，

$$\begin{aligned} B' = &-(h-(s-1)r-u(1,\theta))^{s-1}+(h-sr)^{s-1} \\ &-\sum_{k=2}^{m-1}k\times(h-(s-1)r-u(k,\theta))^{s-1} \\ &+\sum_{k=2}^{m-1}k\times(h-(s-1)r-u(k-1,\theta))^{s-1} \\ &+m\times(h-(s-1)r-u(m-1,\theta))^{s-1} \end{aligned}$$

となる．第 1 項と最終項を 2 つの総和の記号にそれぞれ含めると，

$$\begin{aligned} B' = &(h-sr)^{s-1} \\ &-\sum_{k=1}^{m-1}k\times(h-(s-1)r-u(k,\theta))^{s-1} \\ &+\sum_{k=2}^{m}k\times(h-(s-1)r-u(k-1,\theta))^{s-1} \end{aligned}$$

となる．後者の総和の中で，k を $k+1$ に置き換えると，

$$\begin{aligned} B' = &(h-sr)^{s-1} \\ &-\sum_{k=1}^{m-1}k\times(h-(s-1)r-u(k,\theta))^{s-1} \\ &+\sum_{k=1}^{m-1}(k+1)\times(h-(s-1)r-u(k,\theta))^{s-1} \end{aligned}$$

となり，結局，

$$B' = (h-sr)^{s-1}+\sum_{k=1}^{m-1}(h-(s-1)r-u(k,\theta))^{s-1}$$

が得られる．本稿では，$r \ge 0$ かつ $u(0,\theta)=0$ と設定しているので，$(u(0,\theta)-r)_+ = 0$ となり，第 1 項を総和の記号に含めることができる．よって，

$$B' = \sum_{k=0}^{m-1}(h-sr-(u(k,\theta)-r)_+)^{s-1}$$

が得られる．ケース (i) では，$u(m,\theta) > h-(s-1)r$ なので，$k=m$ のとき $(h-sr-(u(k,\theta)-r)_+)_+ = 0$ となることから，

$$B' = \sum_{k=0}^{m}(h-sr-(u(k,\theta)-r)_+)_+^{s-1}$$

が導かれる．さらに，$\bar{H}(\theta) = s\cdot\bar{a}_1(\theta)$ は

$$\bar{H}(\theta) = s\times\frac{(s-1)!}{(h-sr)^{s-1}}\times\frac{1}{(s-2)!}\times\frac{B'}{s-1}$$

となることから，定理 1 の関係式が得られる． □

一森 哲男　（正会員）

昭和 28 年生．昭和 57 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和 60 年より大阪工業大学工学部専任講師．昭和 63 年より大阪工業大学工学部助教授．平成 8 年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化に関する研究に従事．工学博士．昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．平成 25 年日本応用数理学会論文賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会各会員．