x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算[†]

吉田年雄[††] 二宮市三[††]

不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu,x)$ について，$\nu\geqq 0$ かつ正数 x が大きい場合の能率的な数値計算法を提案している．本論文では，$\Gamma(\nu,x)=e^{-x}x^{\nu-1}f_\nu(1/x)$ で定義される $f_\nu(t)$ について，その近似式を求めている．$f_\nu(t)$ の満足する微分方程式に τ 法を適用すると，$f_\nu(t)$ に対する近似式 $f_{\nu m}(t)=\sum_{i=0}^{m}G_i(m,\nu)t^i\Big/\sum_{i=0}^{m}H_i(m,\nu)t^i$ が求められる．上式を変形すると，$\Gamma(\nu,x)$ の近似計算式として，$\Gamma(\nu,x)\fallingdotseq e^{-x}x^{\nu-1}\sum_{i=0}^{m}(1/x)^i\sum_{j=0}^{i}d_{ij}\nu^j\Big/\sum_{i=0}^{m}(1/x)^i e_i V_i$ が得られる．ただし，d_{ij} および e_i は定数，$V_0=1$，$V_i=\prod_{l=1}^{i}(m-l+2-\nu)$ $(i\geqq 1)$ である．

1. まえがき

本論文では，$\nu\geqq 0$ かつ正数 x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu,x)$ の数値計算法について述べる．不完全ガンマ関数は，

$$\Gamma(\nu,x)=\int_x^\infty e^{-u}u^{\nu-1}du \qquad (1)$$

で定義される[1]．上式を繰り返し部分積分すれば，漸近展開式

$$\Gamma(\nu,x)\sim e^{-x}x^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^k} \qquad (2)$$

が得られる．ここで，

$$\left.\begin{array}{l} a_0=1 \\ a_k=(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k) \quad (k\geqq 1) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

である．また，漸近展開式(2)は，式(1)を変数変換した

$$\Gamma(\nu,x)=e^{-x}x^{\nu-1}\int_0^\infty e^{-u}\left(1+\frac{u}{x}\right)^{\nu-1}du \qquad (4)$$

において，被積分関数の中の $(1+u/x)^{\nu-1}$ をテーラー展開し，形式的に項別積分しても得られる．式(2)は，ν が整数のときには，その展開は有限個の項で終わり，厳密な式となる．しかし，それ以外のときには，式(2)は発散級数であり，最適な項数で打ち切っても，x が十分に大きいときを除いて，精度が悪く，$\Gamma(\nu,x)$ の計算には不適切である．

本論文では，x が十分に大きいところはいうまでもなく，x が比較的小さいところまで，$\Gamma(\nu,x)$ を能率的に計算できる方法を提案する．x が小さい場合の計算法はすでに報告した[2]．この両者の計算法により，すべての正数 x について，$\Gamma(\nu,x)$ を計算することができる．

2. 計算法

$\Gamma(\nu,x)$ に対して，次の漸化式

$$\Gamma(\nu+1,x)=e^{-x}x^\nu+\nu\Gamma(\nu,x) \qquad (5)$$

が成り立つので，ν を $0\leqq\nu\leqq 1$ に限定することにする．

式(4)の積分の部分を

$$f_\nu(t)=\int_0^\infty e^{-u}(1+tu)^{\nu-1}du \qquad (6)$$

と置く．ただし，$t=1/x$ であり，以後，t はすべてこの意味に用いることにする．本論文では，$f_\nu(t)$ について，t が小さい（x が大きい）場合の近似式を求める．

2.1 τ 法

式(6)の $f_\nu(t)$ は次の微分方程式を満足する．

$$t^2f_\nu''(t)+\{(3-\nu)t+1\}f_\nu'(t)+(1-\nu)f_\nu(t)=0 \qquad (7)$$

この微分方程式に C. Lanczos の τ 法[3]を適用して，t が小さい場合の近似式を求めることにする．上式の右辺に，η を適当な定数として，直交区間 $0\leqq t\leqq\eta$ のずらし超球多項式 (shifted ultraspherical polynomial) を τ 倍したものを付加した微分方程式

$$t^2f_{\nu m}''(t)+\{(3-\nu)t+1\}f_{\nu m}'(t)+(1-\nu)f_{\nu m}(t)=\tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right) \qquad (8)$$

を考える．ずらし超球多項式 $C_m^{*(\alpha)}(t)$（$C_m^{*(\alpha)}(t)$ は，超球多項式[4] $C_m^{(\alpha)}(t)$ の直交区間 $-1\leqq t\leqq 1$ を $0\leqq t\leqq 1$ にずらしたもので，$C_m^{*(\alpha)}(t)=C_m^{(\alpha)}(2t-1)$ なる関係が

† Computation of Incomplete Gamma Functions $\Gamma(\nu,x)$ for Large Argument x by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学

ある）は，$\alpha > -\frac{1}{2}$，$\alpha \neq 0$ のとき，

$$C_m^{*(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{m} C_{mk}^{*(\alpha)} t^k = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{\Gamma(2\alpha+m+k)}{k!(m-k)!\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+k\right)} t^k \tag{9}$$

と定義され，$\alpha=0$ のときには，$C_m^{*(0)}(t) = \lim_{\alpha\to 0} (1/\alpha) C_m^{*(\alpha)}(t)$ と定義される．ずらし超球多項式は $\alpha=0$ のときには，ずらしチェビシェフ多項式 $T_m^*(t)$ を $2/m$ 倍したものに等しく，$\alpha=0.5$ のときには，ずらしルジャンドル多項式 $P_m^*(t)$ となる．式(8)は，次の m 次の多項式

$$f_{\nu m}(t) = -\tau \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{l=0}^{k} a_l t^l}{(k+1)a_{k+1}\eta^k} \tag{10}$$

を特解としてもつ（$C_{mk}^{*(\alpha)}$ は式(9)で与えられた係数である）．式(8)の右辺の τ が十分に小さいならば，この $f_{\nu m}(t)$ は，$C_m^{*(\alpha)}(t/\eta)$ の直交区間 $0 \leqq t \leqq \eta$ において，式(7)の $f_\nu(t)$ に対する近似多項式と考えることができるであろう．$f_\nu(0)=1$ であるので，初期条件として，$f_{\nu m}(0)=1$ を採用する．そのとき，τ は，

$$\tau = -\frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}} \tag{11}$$

と決められ，$0 \leqq t \leqq \eta$ での $f_\nu(t)$ に対する近似式

$$f_{\nu m}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{l=0}^{k} a_l t^l}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}} \tag{12}$$

が得られる．上式は，漸近展開式(2)の k 項までの和 $(k=0, 1, \cdots, m)$ の重みつき平均を表している．

2.2 誤差解析

式(7)および(8)より，絶対誤差 $E_{\nu m}(t) = f_{\nu m}(t) - f_\nu(t)$ は次の微分方程式を満足する．

$$t^2 E_{\nu m}''(t) + \{(3-\nu)t+1\} E_{\nu m}'(t) + (1-\nu) E_{\nu m}(t) = \tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right) \tag{13}$$

ただし，上式の右辺および以下の式中の τ は，式(11)で与えられたものとする．上式の一般解は，式(7)の独立な解が

$$f_\nu(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{1-\nu} e^{1/t} \Gamma\left(\nu, \frac{1}{t}\right) \tag{14}$$

$$g_\nu(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{1-\nu} e^{1/t} \tag{15}$$

であることより，定数変化法を用いて，

$$E_{\nu m}(t) = A f_\nu(t) + B g_\nu(t) - f_\nu(t)\tau \int_0^t \frac{C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{u}{\eta}\right) g_\nu(u)}{u^2 \Delta(u)} du + g_\nu(t)\tau \int_0^t \frac{C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{u}{\eta}\right) f_\nu(n)}{u^2 \Delta(u)} du \tag{16}$$

となる．ただし，

$$\Delta(u) = f_\nu(u) g_\nu'(u) - f_\nu'(u) g_\nu(u) = -\left(\frac{1}{u}\right)^{3-\nu} e^{1/u} \tag{17}$$

であり，A および B は初期条件によって決定される定数である．$f_\nu(t) = 1 + O(t)$ および式(17)より，初期条件 $E_{\nu m}(0)=0$ は

$$A \lim_{t\to 0} f_\nu(t) + B \lim_{t\to 0} g_\nu(t) = 0 \tag{18}$$

と表される．$\lim_{t\to 0} f_\nu(t) = 1$ であるが，$\lim_{t\to 0} g_\nu(t)$ は存在しない（発散する）ので，上式が成り立つためには，

$$A = B = 0 \tag{19}$$

でなければならない．したがって，絶対誤差 $E_{\nu m}(t)$ は，

$$E_{\nu m}(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{1-\nu} e^{1/t} \tau \int_0^t \left\{\Gamma\left(\nu, \frac{1}{t}\right) - \Gamma\left(\nu, \frac{1}{u}\right)\right\} C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{u}{\eta}\right) du \tag{20}$$

と表される．

ここで，$\alpha \geqq 0$ の場合について，$m \to \infty$ のときに，$0 \leqq t < +\infty$ で $E_{\nu m}(t) \to 0$ に一様に収束することを証明することにする．$-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ の場合は，紙面の都合で省略するが，同様な結果が得られる．$0 \leqq u \leqq t$ において，

$$0 \leqq \Gamma\left(\nu, \frac{1}{t}\right) - \Gamma\left(\nu, \frac{1}{u}\right) \leqq \Gamma\left(\nu, \frac{1}{t}\right) \tag{21}$$

であること，および，$0 \leqq u \leqq \eta$ において，$C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{u}{\eta}\right)$ の最大値 $G(m, \alpha)$ は，

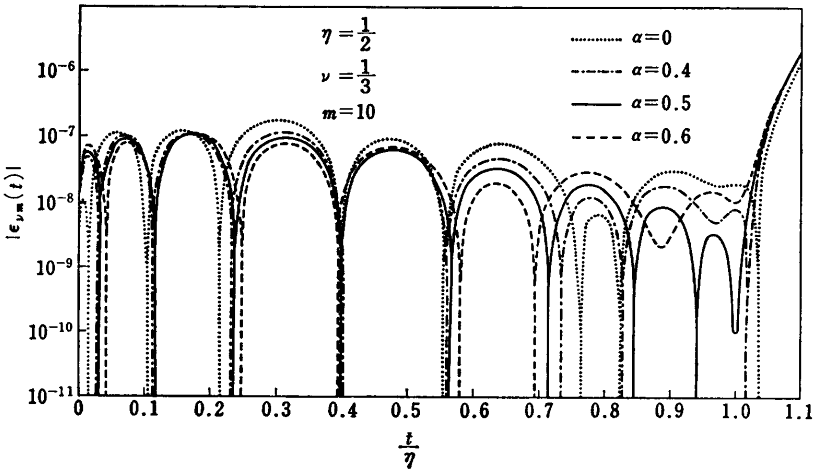

図 1 t に対する $|\epsilon_{\nu m}(t)|$
Fig. 1 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ as a function of t.

$$G(m,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2}{m} & (\alpha=0)\\[2mm] \dfrac{\Gamma(m+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(m+1)} & (\alpha>0)\end{cases} \tag{22}$$

であること[5] より，

$$|E_{\nu m}(t)|\leqq|tf_\nu(t)\tau G(m,\alpha)| \tag{23}$$

が成り立つ．いま考えている $0\leqq\nu\leqq1$ のときには，$(-1)^k a_k\geqq0$ であり，したがって，$C^{*(\alpha)}_{mk}/a_{k+1}\,(k=0,1,2,\cdots,m)$ は同符号であるので，

$$|\tau G(m,\alpha)| =\left|\frac{G(m,\alpha)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C^{*(\alpha)}_{mk}}{(k+1)a_{k+1}\eta^k}}\right| <\left|\frac{G(m,\alpha)}{\dfrac{C^{*(\alpha)}_{m1}}{2a_2\eta}}\right|=\frac{(2\alpha+1)a_2\eta}{m(m+2\alpha)} \tag{24}$$

が得られ，上式より，$m\to\infty$ のとき，$|\tau G(m,\alpha)|\to0$ となる．式(23)において，t が有限ならば，$tf_\nu(t)$ は有界な関数である．したがって，$m\to\infty$ のとき，$|E_{\nu m}(t)|$ は 0 に一様収束する． 〔証明終〕

2.3 α の選定

ここでは，式(12)に含まれているパラメータ α の最適値を見つけることにする．**図 1** は，$m=10$, $\nu=1/3$, $\eta=1/2$ のとき，$0\leqq t\leqq\eta$ における $f_{\nu m}(t)$ の相対精度 $\epsilon_{\nu m}(t)=(f_{\nu m}(t)-f_\nu(t))/f_\nu(t)$ を，$\alpha=0, 0.4, 0.5$ および 0.6 に対して示したものである．この図より，誤差の符号が変わることにより，精度が急激に高くなるところを除いて，

$$\left.\begin{array}{l} t=\eta\\ \alpha=1/2\end{array}\right\} \tag{25}$$

のとき，すなわち，t が区間 $0\leqq t\leqq\eta$ の右端点であり，直交多項式がずらしルジャンドル多項式のとき，精度が最も高いことがわかる．$t=\eta$, $\alpha=0$（ずらしチェビシェフ多項式に相当）のときと比べて，2 桁程度精度が高い．式(25)のとき，精度が高いことは，$\eta=1/2$ 以外の場合でも同様である．このようになるのは，式(20)の積分の部分において，関数 $\Gamma(\nu,1/t)-\Gamma(\nu,1/u)$ が，$m-1$ 次の多項式で近似されやすい関数であるからと考えられる．なぜならば，いま，$F_{m-1}(u)$ を $m-1$ 次の多項式，$P^*_m(u)$ を m 次のずらしルジャンドル多項式とすれば，$P^*_m(u)$ の直交関係から，

$$\int_0^\eta F_{m-1}(u)P^*_m\left(\frac{u}{\eta}\right)du=0 \tag{26}$$

となるが，$F_{m-1}(u)$ が $m-1$ 次の多項式でなくとも，$m-1$ 次の多項式により，よい近似で表される関数ならば，その積分値は十分に小さな値となるはずであるからである．

以上より，式(12)において，t を η, α を 1/2 と置く．その式において，η は任意の値を取ることができるので，あらためて，その η を t とすれば，

$$f_{\nu m}(t)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P^*_{mk}\sum_{l=0}^{k}a_l t^l}{(k+1)a_{k+1}t^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P^*_{mk}}{(k+1)a_{k+1}t^k}} \tag{27}$$

となる．ただし，P^*_{mk} はずらしルジャンドル多項式

$$P^*_m(t)=\sum_{k=0}^{m}P^*_{mk}t^k \tag{28}$$

の係数である.

2.4 計 算 式

式(27)の分子, 分母に t^m を乗じ, t のベキでまとめれば,

$$f_{\nu m}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{m} G_i(m,\nu)t^i}{\sum_{i=0}^{m} H_i(m,\nu)t^i} \tag{29}$$

となる. ただし, 係数 $G_i(m,\nu)$ および $H_i(m,\nu)$ は,

$$G_i(m,\nu)=\sum_{k=0}^{i}\frac{P^*_{m,m-i+k}a_k}{(m+1-i+k)a_{m+1-i+k}} \tag{30}$$

$$H_i(m,\nu)=\frac{P^*_{m,m-i}}{(m+1-i)a_{m+1-i}} \tag{31}$$

である.

式(30)の $G_i(m,\nu)$ に着目しよう. $G_i(m,\nu)$ は, 式(3)により定義される a_k を含んでいる. この a_k は ν の k 次式であり, $a_k=(\nu-k)a_{k-1}$ $(k\geqq 1)$ なる関係を満たす. すなわち, 添字の大きいものは, 添字の小さいものの因子をすべて含む. また, 式(30)の分母の $a_{m+1-i+k}(0\leqq k\leqq i)$ のなかで, ν の次数の最も高いものは a_{m+1} である. したがって, 式(30)は, a_{m+1} を乗ずれば, 次数が $i(=k-(m+1-i+k)+m+1)$ の ν の多項式

$$G_i(m,\nu)=\frac{1}{a_{m+1}}\sum_{k=0}^{i}\frac{P^*_{m,m-k}R^{(1)}_{i-k}R^{(2)}_k}{m-k+1} \tag{32}$$

となる. ただし, $R^{(1)}_k$ および $R^{(2)}_k$ は ν の k 次多項式であり,

$$\left.\begin{aligned}&R^{(1)}_0=R^{(2)}_0=1\\&R^{(1)}_k=\prod_{l=1}^{k}(\nu-l)\quad(k\geqq 1)\\&R^{(2)}_k=\prod_{l=1}^{k}(\nu-m+l-2)\quad(k\geqq 1)\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

で与えられる. 式(32)を ν のベキで書きまとめると,

$$G_i(m,\nu)=\frac{1}{a_{m+1}}\sum_{j=0}^{i}b_{ij}\nu^j \tag{34}$$

の形となる. ここで, 係数 b_{ij} (m のみに依存する) は, 具体的には, 次式にて表される.

$$b_{ij}=\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=j-l}^{i-l}\frac{P^*_{m,m-k}p_{i-k,l}q_{k,j-l}}{m-k+1} \tag{35}$$

ただし, $p_{k,l}$ および $q_{k,l}$ は, それぞれ,

$$\left.\begin{aligned}&p_{0,0}=1\quad p_{1,0}=-1\quad p_{1,1}=1\\&q_{0,0}=1\quad q_{1,0}=-m-1\quad q_{1,1}=1\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

を初期値として, $2\leqq k\leqq i$ に対して, 次の漸化式

$$\left.\begin{aligned}&p_{k,0}=-kp_{k-1,0}\\&p_{k,l}=p_{k-1,l-1}-kp_{k-1,l}\quad(1\leqq l\leqq k-1)\\&p_{k,k}=p_{k-1,k-1}(=1)\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned}&q_{k,0}=-(m-k+2)q_{k-1,0}\\&q_{k,l}=q_{k-1,l-1}-(m-k+2)q_{k-1,l}\quad(1\leqq l\leqq k-1)\\&q_{k,k}=q_{k-1,k-1}(=1)\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

で与えられる.

つぎに, 式(31)の $H_i(m,\nu)$ を少し書き直した

$$H_i(m,\nu)=\frac{1}{a_{m+1}}\frac{P^*_{m,m-i}a_{m+1}}{(m+1-i)a_{m+1-i}} \tag{39}$$

に着目しよう. 式(3)より, 次の関係式が成り立つ.

$$\frac{a_{m+1}}{a_{m+1-i}}=(-1)^iV_i \tag{40}$$

ただし,

$$\left.\begin{aligned}&V_0=1\\&V_i=\prod_{l=1}^{i}(m-l+2-\nu)\quad(i\geqq 1)\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

である. したがって, 式(29)は, 式(34), (39)および(40)より,

$$f_{\nu m}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{m}t^i\sum_{j=0}^{i}b_{ij}\nu^j}{\sum_{i=0}^{m}t^ic_iV_i} \tag{42}$$

と表される. ただし,

$$c_i=\frac{(-1)^iP^*_{m,m-i}}{m+1-i} \tag{43}$$

である (c_i も m のみに依存する).

結局, 式(4), (6)と(42)を用いれば, x が大きい場合の $\Gamma(\nu,x)$ の能率的な計算式として,

$$\Gamma(\nu,x)=e^{-x}x^{\nu-1}\frac{\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{x}\right)^i\sum_{j=0}^{i}d_{ij}\nu^j}{\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{x}\right)^ie_iV_i} \tag{44}$$

が得られる. ただし,

$$\left.\begin{aligned}&d_{ij}=b_{ij}/c_1\\&e_i=c_i/c_1\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

である.

2.5 係数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ について

式(44)は, 所要の精度に応じて m を定めれば, 係数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ が定数の計算式となる. したがって, その定数 $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ の値を, あらかじめ, 計算して, 表にしておけば, 実際の $\Gamma(\nu,x)$ の計算は, それを用いて能率的に行うことができる. $\{d_{ij}\}$ および $\{e_i\}$ の計算は, 丸め誤差を防ぐため, 多倍長演算により求めておくことが好ましい.

さて, $\{d_{ij}|i=0,1,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,i\}$ の要素は, 一部, 負になるが, 問題となるような桁落ちは生じな

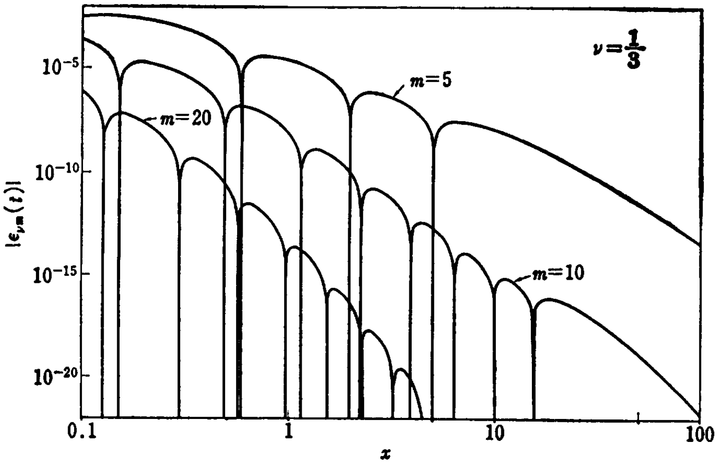

図 2 x に対する $|\epsilon_{\nu m}(t)|$
Fig. 2 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ as a function of x.

い．また，$\{e_i|i=0,1,\cdots,m\}$ の要素は m に依らず，すべて正である．さらに，$0\leqq\nu\leqq1$ において，$\{V_i|i=0,1,\cdots,m\}$ の要素は，すべて正であるので，分母の計算で桁落ちはない．

なお，続けて同じ値の ν に対して，$\Gamma(\nu,x)$ の値を能率的に計算できるようにするためには，式(44)の $\sum_{j=0}^{i} d_{ij}\nu^j$ および e_iV_i の計算値 $(i=0,1,\cdots,m)$ を一時的に記憶しておくとよい．なぜならば，その場合には，それらの計算を省くことができるからである．

2.6 近似式の次数 m の決定について

近似式(44)の次数 m の決め方について考えよう．**図2**には，近似式の x に対する相対精度 $\epsilon_{\nu m}(t)$ の例として，$\nu=1/3$ について，$m=5$, 10 および 20 の場合が示されている．この図は，誤差の符号が変わることに起因して，精度が急激に高くなっている部分を除いて，m を大きくすると（x を固定して），精度が高くなり，また，x を大きくすると（m を固定して），精度が高くなることを示している．

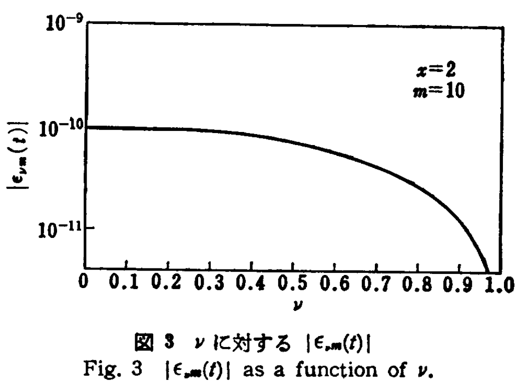

図 3 ν に対する $|\epsilon_{\nu m}(t)|$
Fig. 3 $|\epsilon_{\nu m}(t)|$ as a function of ν.

また，**図3**には，近似式の ν に対する相対精度 $\epsilon_{\nu m}(t)$ の例として，$x=2$, $m=10$ の場合が示されている．$\nu\fallingdotseq1$ で精度が高くなっているのは，$\nu=1$ のとき，$a_1=0$ となり，式(20)において，$\tau=0$ となるからである．精度は，急激に高くなる部分を除いて，ほぼ同じ程度であるので，ν によって m を変える必要はないと考えられる．

所要の精度に応じて，m を定めなければならないが，x のいかなる値以上で，式(44)を用いるかによって異なってくる．x が小さいときには，「x が小さい場合の $\Gamma(\nu,x)$ の計算法」[2] を用いることができ，参考文献 2) の図2の実線以下の x に対して，ある規準の誤差以内で $\Gamma(\nu,x)$ を求めることができることを示している．

x が小さい場合の方法および x が大きい場合の方法（本方法）を，ν および x の領域により使いわける必要がある．両者の方法の能率を検討した結果として，ν には依存させず，

$$x<2 \tag{46}$$

では，x が小さい場合の方法を用い，

$$x\geqq2 \tag{47}$$

では，x が大きい場合の方法を用いるとよいことがわかった．m をいろいろ変えて，式(44)の相対精度を調べることより，単精度（8 D）の場合には，

$$\left.\begin{array}{l} 2\leqq x<6 \text{ では，} m=8 \\ x\geqq6 \text{ では，} m=6 \end{array}\right\} \tag{48}$$

とし，倍精度（18 D）の場合には，

$$\left.\begin{array}{l} 2\leqq x<4 \text{ では，} m=24 \\ 4\leqq x<8 \text{ では，} m=18 \\ x\geqq8 \text{ では，} m=14 \end{array}\right\} \tag{49}$$

とすることにした．

2.7 d_{ij}, e_i の数表および数表作成プログラム

$\{d_{ij}|i=0,1,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,i\}$ は，m が大きいとき，大きい i に対して，j が大きくなるにつれて（i を固定して），急激に減少する．したがって，式(44)の分子の $\sum_{j=0}^{i} d_{ij}\nu^j$ の計算において，単精度の場合には，

$$d_{ij}\nu^j\leqq d_{ij}<0.5\times10^{-8}d_{i0}, \tag{50}$$

倍精度の場合には，

$$d_{ij}\nu^j\leqq d_{ij}<0.5\times10^{-18}d_{i0} \tag{51}$$

を満足する j に対して，$d_{ij}\nu^j$ の計算を行うことは無

表 1 $m=6$ のときの d_{ij} および e_i
Table 1 d_{ij} and e_i for $m=6$.

d_{00}	0. 2857142857 E +00
d_{10}	0. 6714285714 E +01
d_{11}	−0. 7142857143 E +00
d_{20}	0. 5084415584 E +02
d_{21}	−0. 1058441558 E +02
d_{22}	0. 6493506494 E +00
d_{30}	0. 1459220779 E +03
d_{31}	−0. 4212987013 E +02
d_{32}	0. 5558441558 E +01
d_{33}	−0. 2597402597 E +00
d_{40}	0. 1430389610 E +03
d_{41}	−0. 4370995671 E +02
d_{42}	0. 1078787879 E +02
d_{43}	−0. 1069264069 E +01
d_{44}	0. 4329004329 E −01
d_{50}	0. 3189610390 E +02
d_{51}	−0. 3926406926 E +01
d_{52}	0. 5183982684 E +01
d_{53}	−0. 4870129870 E +00
d_{54}	0. 6277056277 E −01
d_{55}	−0. 2164502165 E −02
d_{60}	0. 2597402597 E +00
d_{61}	0. 5930735931 E +00
d_{62}	0. 4870129870 E +00
d_{63}	0. 1839826840 E +00
d_{64}	0. 3246753247 E −01
d_{65}	0. 2164502165 E −02
e_0	0. 2857142857 E +00
e_1	0. 1000000000 E +01
e_2	0. 1363636364 E +01
e_3	0. 9090909091 E +00
e_4	0. 3030303030 E +00
e_5	0. 4545454545 E −01
e_6	0. 2164502165 E −02

意味となる．そこで，$\sum_{j=0}^{i} d_{ij}\nu^j$ の j の上限は，i ではなくて，意味のあるところまでしか取らないことにする．**表 1** および **表 2** には，単精度用として，それぞれ，$m=6$ および 8 に対して，d_{ij} および e_i の数値が示されている．倍精度用に対しては，表が大きくなるので，代りに，**図 4** に，表を出力する FORTRAN プログラム（4 倍精度演算を使用している）を示す．適当に修正すれば，単精度用の表の出力もできることはいうまでもない．なお，出力の形式および引用するサブルーチン副プログラム PUNCH と RPL は参考文献 6) を参照せよ．

3. むすび

以上において，x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の計算法について述べた．本方法は，連分数

表 2 $m=8$ のときの d_{ij} および e_i
Table 2 d_{ij} and e_i for $m=8$.

d_{00}	0. 2222222222 E +00
d_{10}	0. 8777777778 E +01
d_{11}	−0. 7777777778 E +00
d_{20}	0. 1258444444 E +03
d_{21}	−0. 2240000000 E +02
d_{22}	0. 1088888889 E +01
d_{30}	0. 8230666667 E +03
d_{31}	−0. 2169555556 E +03
d_{32}	0. 2186666667 E +02
d_{33}	−0. 7777777778 E +00
d_{40}	0. 2535948718 E +04
d_{41}	−0. 8523675214 E +03
d_{42}	0. 1355470085 E +03
d_{43}	−0. 1019658120 E +02
d_{44}	0. 2991452991 E +00
d_{50}	0. 3435610256 E +04
d_{51}	−0. 1293316239 E +04
d_{52}	0. 3042307692 E +03
d_{53}	−0. 3647008547 E +02
d_{54}	0. 2312820513 E +01
d_{55}	−0. 5982905983 E −01
d_{60}	0. 1693751049 E +04
d_{61}	−0. 5787048951 E +03
d_{62}	0. 2340427350 E +03
d_{63}	−0. 3712354312 E +02
d_{64}	0. 4060916861 E +01
d_{65}	−0. 2275058275 E +00
d_{66}	0. 5439005439 E −02
d_{70}	0. 1945286713 E +03
d_{71}	−0. 1949650350 E +02
d_{72}	0. 5357637918 E +02
d_{73}	−0. 4674281274 E +01
d_{74}	0. 1733954934 E +01
d_{75}	−0. 1087801088 E +00
d_{76}	0. 7148407148 E −02
d_{77}	−0. 1554001554 E −03
d_{80}	0. 7832167832 E +00
d_{81}	0. 2030769231 E +01
d_{82}	0. 2040714841 E +01
d_{83}	0. 1051903652 E +01
d_{84}	0. 3045843046 E +00
d_{85}	0. 5003885004 E −01
d_{86}	0. 4351204351 E −02
d_{87}	0. 1554001554 E −03
e_0	0. 2222222222 E +00
e_1	0. 1000000000 E +01
e_2	0. 1866666667 E +01
e_3	0. 1866666667 E +01
e_4	0. 1076923077 E +01
e_5	0. 3589743590 E +00
e_6	0. 6526806527 E −01
e_7	0. 5594405594 E −02
e_8	0. 1554001554 E −03

```
      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
      DIMENSION P(50,50),Q(50,50),FCT(51)
     &,AM(50),C(50),D(50),E(50)
      DIMENSION MM(2)
      DATA Q0,Q1,QM1/0.0Q0,1.0Q0,-1.0Q0/
      DATA RE/0.5Q-18/
      DATA MM/14,24/
      MMAX=MAX0(MM(1),MM(2))
      P(1,1)=Q1
      P(2,1)=QM1
      P(2,2)=Q1
      Q(1,1)=Q1
      Q(2,2)=Q1
      FCT(1)=Q1
      FCT(2)=Q1
      DO 110 K=2,MMAX
      FK=QFLOAT(K)
      P(K+1,1)=-P(K,1)*FK
      P(K+1,K+1)=Q1
      Q(K+1,K+1)=Q1
      FCT(K+1)=FCT(K)*FK
      KM1=K-1
      DO 100 L=1,KM1
      P(K+1,L+1)=-P(K,L+1)*FK+P(K,L)
  100 CONTINUE
  110 CONTINUE
      FCT(MMAX+2)=QFLOAT(MMAX+1)*FCT(MMAX+1)
      DO 500 IM=1,2
      M=MM(IM)
      MP1=M+1
      AM(1)=QFLOAT(M+1)
      AM(2)=QFLOAT(M)
      Q(2,1)=-AM(1)
      DO 210 K=2,M
      FMK=QFLOAT(M-K+2)
      Q(K+1,1)=-Q(K,1)*FMK
      AM(K+1)=FMK-Q1
      KM1=K-1
      DO 200 L=1,KM1
      Q(K+1,L+1)=-Q(K,L+1)*FMK+Q(K,L)
  200 CONTINUE
  210 CONTINUE
      W=FCT(M+1)
      C(1)=Q1
      DO 220 K=1,M
      W=-QFLOAT(M+K)/QFLOAT(K)**2*W
      C(K+1)=W/FCT(M-K+1)
  220 CONTINUE
      C2=-C(M)/AM(2)
      DO 360 I=1,MP1
      DO 330 J=1,I
      S=Q0
      DO 310 L=1,J
      JML=J-L+1
      IML=I-L+1
      DO 300 K1=JML,IML
      K=K1-1
      S=P(I-K,L)*Q(K+1,J-L+1)/AM(K+1)
     &*C(MP1-K)+S
  300 CONTINUE
  310 CONTINUE
      D(J)=S/C2
      IF(QABS(D(J)/D(1)).GE.RE) GO TO 330
      IE=J-1
      GO TO 350
  330 CONTINUE
      IE=I
  350 CALL PUNCH(D,IE)
  360 CONTINUE
      TI=Q1
      DO 400 I=1,MP1
      E(I)=C(MP1-I+1)/(AM(I)*C2)*TI
      TI=TI*QM1
  400 CONTINUE
      CALL PUNCH(E,MP1)
  500 CONTINUE
      STOP
      END
```

図 4　表の出力のためのプログラム
Fig. 4　Program for output of tables.

展開[7)]

$$\Gamma(\nu, x)=x^{\nu-1}e^{-x}\left[\frac{1|}{|1}+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\Phi}}\left\{\frac{k-\nu|}{|\ x}+\frac{k|}{|1}\right\}\right] \tag{52}$$

を，その分子，分母を漸化式で計算する場合と比べて，x が約 10 以上では，能率は同程度であるが，それ以下になると能率がよい（たとえば，$\nu=0$, $x=2$ では，計算時間は約半分で済む）．また，続けて同じ値の ν に対して，$\Gamma(\nu, x)$ を求めるときには，本方法は途中の計算を省くことができるので，連分数展開と比べると，非常に能率的である．

謝辞　日頃ご討論いただく本学鳥居達生助教授に感謝します．

参 考 文 献

1) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：数学公式Ⅲ，岩波全書，p. 14，岩波書店，東京 (1968).
2) 吉田年雄，二宮市三：x が小さい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol. 23, No. 5, pp. 522-528 (1982).
3) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, p. 464, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1956).
4) National Bureau of Standards: *Handbook of Mathematical Functions*, Appl. Math. Ser. 55, p. 774, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (1964).
5) Szegö, G.: *Orthogonal Polynomials*, p. 171, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1967).
6) 吉田年雄，二宮市三：x が大きい場合の変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol. 22, No. 4, pp. 312-319 (1981).
7) 山内二郎，宇野利雄，一松　信：電子計算機のための数値計算法Ⅲ，p. 137，培風館，東京 (1972).

（昭和 58 年 6 月 22 日受付）
（昭和 58 年 9 月 13 日採録）