

5H-7 SMP 上での有限要素・境界要素併用法による 電磁界解析アプリケーション並列処理

金子 大作[†] 小幡 元樹[†] 若尾 真治[†] 小貫 天[†] 笠原 博徳[†]
[†]早稲田大学理工学部電気電子情報工学科

1 はじめに

電気機器の設計・開発においては、発生する電磁界を調べる必要がある。従来より、渦電流や磁性材料の飽和現象（ヒステリシス）などの非線形を有する物質中の電磁界解析には有限要素法 [1] が用いられているが、磁界は物質中・空気中のどちらにも存在可能なため空気領域のような無限領域を解析するには莫大な数の未知変数を扱わなければならない。一方、境界要素法 [2] は非線形領域解析には向いていないが、解析領域の境界上を複数の要素に分割して解析を行うため、次元を一つ落とすことになり、少ない未知変数で空気領域のような広大で均質な開領域の解析が自然に行える。そこで、著者等は電磁界の解析を数値的に精度良く行うために、これら二手法の長所を組み合わせた併用手法を開発している [4]。

この有限要素・境界要素併用法は有限要素法の汎用性を備えたまま、境界要素法による無限領域の解析も自然に行うことができるが、大規模問題の解析などにおいてはなお長時間を要するため、並列処理による解析の高速化が求められている。しかし、対象とする電磁界解析アプリケーションでは境界要素法を併用したことにより、最終的に生成される行列は、縁付きブロック対角、ランダムスパース、ストライプ、密行列等の異なる特徴を有する行列となるため、線形方程式の係数行列は反復法による効率的な並列求解が困難となる。

そこで、本論文ではこの有限要素・境界要素併用法を SMP 用に並列化し、その結果について報告する。また、市販のパソコンサーバ、PentiumII XEON(400MHz) ベース 4 プロセッサ SMP 上で性能評価を行った結果を述べる。

2 電磁界解析における有限要素・境界要素併用法

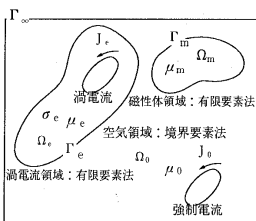


図 1: 解析領域

領域 Ω_e は渦電流が発生する多連結導体領域で、ここではその導電率 σ_e と透磁率 μ_e の線形性を仮定している。以下、空気領域 Ω_0 と線形磁性体領域には境界要素法を適用し、渦電流領域 Ω_e および非線形磁性体領域 Ω_m には有限要素法を適用して解析する。

有限要素法も境界要素法もそれぞれ様々な物理量を変数とすることができ、変数の組み合わせ方が複数考えられる。

著者らは渦電流領域と空気領域に注目し、両手法に適用する変数の組み合わせを数種類提案してきたが、ここでは変形磁気ベクトルポテンシャル A^* と磁界の強さ H を未知変数とした併用 $A^* - H$ 法 [4] の定式化の概要と生成される係数行列の特徴について述べる。

• 渦電流領域 Ω_e

変形磁気ベクトルポテンシャル A^* を未知変数とした有限要素法を適用する。(1) 式に、ガラーキンを適用した場合に得られる残差方程式を示す。ただし、式中の W はベクトル補間関数、 n は領域境界上の単位法線ベクトルである。

$$\int_{\Omega_e} \nabla \times W \cdot \frac{1}{\mu_e} \nabla \times A^* d\Omega + \int_{\Omega_e} W \cdot \sigma_e \frac{\partial A^*}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma_e} W \cdot (H \times n) d\Gamma = 0 \quad (1)$$

• 空気領域 Ω_0

Ω_0 領域に対しては、磁界の強さ H を変数とする境界要素法を空気領域 Ω_0 に適用する。ベクトル量を変数とする境界積分方程式はヘルムホルツの定理を用いることで容易にかつ系統的に導出でき、(2) 式が得られる。ただし、以下の式中で添え字 P 、 Q はそれぞれソース点および領域境界上に関する諸量を示す。また、 r はソース点 P と観測点 Q との距離である。

$$C_P H_P = \int_{\gamma_0} (H_Q \times n) \times \nabla_Q \frac{1}{r} d\Gamma - \int_{\gamma_0} (H_Q \cdot n) \nabla_Q \frac{1}{r} d\Gamma + \int_{\Omega_0} J \times \nabla_Q \frac{1}{r} d\Omega \quad (2)$$

領域 Ω_e 、 Ω_0 の 2 領域を想定した場合、(1)、(2) 式を離散化したものを組み合わせた結果、図 2 のような係数マトリクスを持つ線形方程式を得る。これをそのまま解くことも可能だが、有限要素部分により粒度の粗い並列性を抽出するため、この係数マトリクスにサブストラクチャ法を適用する。その結果図 3 のような形状をした 4 つの異なる性質を有する係数マトリクスが得られる。図 3 中の K は縁付きブロック対角行列、 L はランダムスパース行列、 H は縦のストライプ状の行列、 G は密行列となる。

3 有限要素・境界要素併用法の並列処理

本節では、一般的な SMP 上で、OpenMP を用い、求解部分ではクラウド法を採用した有限要素・境界要素併用法を並列化する。

3.1 データ生成

係数行列の生成部分は、有限要素法・境界要素法の性質上、各要素を独立に計算できるので、この部分を並列化した。

* Parallel Processing of Hybrid FEM and BEM for Electrical Magnetic Field Analysis on SMP.
 Daisaku Kaneko[†], Motoki Obata[†], Shinji Wakao[†],
 Takashi Onuki[†], Hironori Kasahara[†]
[†]Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Waseda University

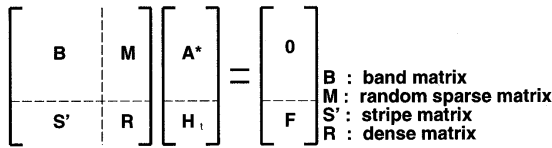


図 2: 併用法により得られる係数マトリクス形状

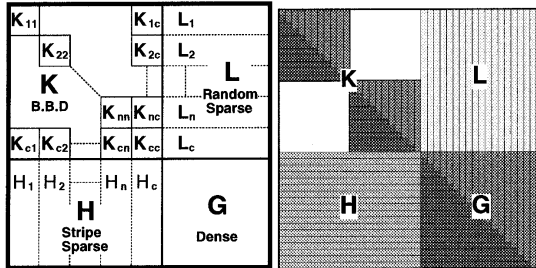


図 3: サブストラクチャ法適用後の係数行列

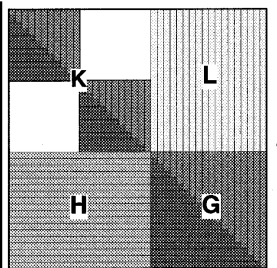


図 4: データの再配置

また、FORTRAN プログラムの場合、配列のメインメモリ上の領域確保はカラムメジャーオーダーで行われるため、キャッシュラインには目的配列要素を含め周辺の要素がカラムメジャーオーダーでまとめてフェッチされる。このため、キャッシュを有効利用するには、配列の参照方向とカラムメジャーオーダーの方向を一致させる必要がある。図 4 のような方向で配列データを再配置をすることでこれを可能とした。

3.2 クラウト法による分解計算

3.2.1 部分行列 K, L, H 部の分解

まず、図 3 の $H_i, K_{ci}, K_{ii}, K_{ic}, L_i$ を組にした逆 L 字型の領域内 ($i=1, 2, \dots, c$) でリオーダーリングを行う。具体的には図 5 のようにランダムスパース部分の非零要素の数が最も多い行が下になるように逆 L 字型の領域内のリオーダーリングを行う。このリオーダーリングによりランダムスパース部分の fill-in の発生を低く抑えることができる。また、ランダムスパース部分の分解時に非零要素のある行を一時的に配列に記録しておくことで、密行列部分の分解時のランダムスパース部分とストライプ部分の参照を非零要素のみに限定でき、G 部分の分解計算の速度向上が可能となる。

緑付きブロック対角部 K の分解計算は、ブロックをスレッドにサイクリックに割り当て、ブロック毎に独立に分解計算を行う。緑ブロック部分を加えたランダムスパース部分とストライプ部分の分解計算は、各段での分解計算ループのループ並列処理を行った。

3.2.2 密行列部分 G の分解

密行列部分は、行列の右下に位置するため、分解に最も時間を要するところである。そこで、用いるプロセッサ台数を p 台とすると、クラウト法の分解段を決定する最外側のループを p

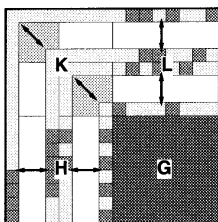


図 5: リオーダーリング

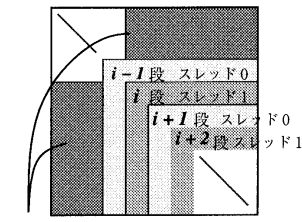


図 6: 二段同時分解法

表 1: PentiumII XEON 4 プロセッサ SMP 上での全体の実行時間 (括弧内は求解部の実行時間)

プロセッサ台数	サブストラクチャ分割数		
	なし	4	8
1	48.74 秒 (17.40 秒)	35.69(4.74)	38.99(4.21)
2	30.89(10.76)	20.26(2.64)	21.76(2.65)
4	19.74(9.12)	12.03(1.96)	13.09(2.16)

個のスレッドにサイクリック分割し、 p 段の同時分解を行った。簡単のためにプロセッサ 2 台用いた時の例を図 6 に示す。

通常クラウト法は、 i 段の分解計算は $i-1$ 段の分解計算終了後に行う。図 6 のような 2 台のプロセッサを用いる場合、 i 段の分解を割り当てられたスレッド 1 は、 $i-1$ 段の分解が終了してなくても $i-2$ 段までの要素のみを参照した部分的分解計算を行うことができる。スレッド 0 は割り当てられた $i-1$ 段の分解終了後、 i 段の分解終了を待たずに、 $i-1$ 段までの要素を参照する部分的分解計算を行っておく。 $i-1$ 段の分解計算終了後、スレッド 1 は $i-1$ 段を参照する残りの分解計算を行う。このようにスレッドサイクリックにパイプライン的な処理を行っていく。

4 性能評価

磁性体コアを持つ電磁石の作る磁界シミュレーションを用いて本手法の性能評価を行った。磁性体コア内部を有限要素解析領域、外部の空気領域を境界要素解析領域として解析している。このモデルは、有限要素法節点数が 637、境界要素法節点数 432、行列サイズ 1069×1069 、非零要素の割合 25.6% となっている。

評価環境として、PentiumII XEON(400MHz、二次キャッシュ 512Kbyte) を 4 台搭載した COMPAQ PROLIANT5500 を用い、OpenMP コンパイラとして Kuck & Associates 社の Guide を用いた。このシミュレーションモデルの全体の実行時間及び求解時間を測定した結果を表 1 に示す。ここでサブストラクチャ分割数なしの部分は、提案手法との比較のためのもので、サブストラクチャ分割を行わず、またキャッシュの有効利用のためのデータの再配置は行っていない。求解部は、各段での分解計算ループのループ並列処理を行ったものである。

本手法の評価対象としたサブストラクチャ分割なし、逐次実行時の全体の実行時間は、48.74 秒であるのに対して、サブストラクチャ 4 分割でデータを再配置した 4 プロセッサでの実行時間は 12.03 秒で、約 4.05 倍の速度向上率が得られた。

また、求解部についても同様に、サブストラクチャ分割なし、逐次実行時の求解時間は、17.4 秒であるのに対して、サブストラクチャ 4 分割、データの再配置をした 4 プロセッサでの求解時間は 1.96 秒で、約 8.87 倍の速度向上率が得られた。

5 まとめ

Pentium ベースの SMP 上で、有限要素・境界要素法を併用した電磁界解析アプリケーションの並列処理手法を実現した。特に、異なる性質を持つ 4 種の部分マトリクスに対する OpenMP を用いた並列求解手法を述べ、プロセッサ台数 4 台で全体の実行時間では逐次実行時の最大 4.05 倍、求解部分では最大 8.87 倍の速度向上率が得られ、本手法の有効性が確認できた。

参考文献

- [1] 矢川 元基, 吉村 忍: 「有限要素法」, 培風館 (1991).
- [2] 神谷 紀生: 「境界要素法の基礎」, 培風館 (1987).
- [3] 笠原博徳: 「並列処理技術」, コロナ社 (1991).
- [4] S.Wakao, T.Onuki: "Electromagnetic Field Computations by the Hybrid FE-BE Method Using Edge Elements", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol.29, No.2, pp.1487-1490 (1993).
- [5] 小幡元樹・前川仁孝・坂本哲也・若尾真治・小貫天・笠原博徳: 「電磁界解析のための有限要素・境界要素併用法の並列処理」, 情報処理学会第 54 回全国大会, 5F-7 (1997).