

ショートノート

Aitken 加速に関する一つの注意†

室田 一雄†† 杉原正顕†††

Aitken 加速は最も基本的な加速法である。これを $S_n = S + \lambda^n(c_1 n^{-\alpha_1} + c_2 n^{-\alpha_2} + \dots)$ の形で S に収束する数列 $\{S_n\}$ に k 回繰り返し適用して得られる数列 $\{A_n^{(k)}\}$ の漸近的収束性が $A_n^{(k)} = S + \lambda^n(c_1^{(k)} n^{-\alpha_1 - 2k} + \dots)$ の形になるという事実は必ずしも広く知られていないようなので、注意を与える。とくに、収束の遅い交代級数にも Aitken 加速が有効であることを数値例で示す。

1. はじめに

Aitken 加速 (Aitken の δ^2 法) は, Richardson 加速と並んで, 最も基本的な数列加速法であり, 実用上の有用性は大きい。数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ の Aitken 加速は

$$A_n^{(1)} = S_n - \frac{(S_n - S_{n-1})^2}{S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}} \quad (n=3, 4, \dots) \tag{1.1}$$

で定義される。この加速法を k 回繰り返し適用して得られる数列を, ここでは k 段加速列と呼び $\{A_n^{(k)}\}_{n=2k+1}^{\infty}$ とかく。とくに $\{A_n^{(0)}\} = \{S_n\}$ と定める。

数列 $\{S_n\}$ が漸近的に

$$S_n = S + c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots \tag{1.2}$$

($\lambda_1 \neq 1, |\lambda_1| > \dots > |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_{k+2}| \geq \dots; c_1 \neq 0$) のような形で極限值 S に収束するときには, k 段加速列 $\{A_n^{(k)}\}$ は, 漸近的に

$$A_n^{(k)} = S + c_{k+1}' \lambda_{k+1}^n + \dots \tag{1.3}$$

のように収束することは周知のとおりである。

これに対し,

$$S_n = S + \lambda^n(c_1 n^{-\alpha_1} + c_2 n^{-\alpha_2} + \dots) \tag{1.4}$$

($\lambda \neq 1, |\lambda| \leq 1; \alpha_1 < \alpha_2 < \dots; c_1 \neq 0$)

のように収束する数列 $\{S_n\}$ から得られる加速列 $\{A_n^{(k)}\}$ の振舞いについては, 基本的事項であるにもかかわらず, 必ずしも広く知られているとはいえないようである。筆者の知る限り, わが国の数値計算の教科書のなかで, このことを扱っているのは文献2)だけのようであるが, その記述は誤ってはいないものの適切ではな

い。すなわち, 文献2) (pp. 20-21)には, (1.4)の数列の Aitken 加速 $\{A_n^{(1)}\}$ の収束の様子は, n が大きいとき

$$A_n^{(1)} = S + c \lambda^n n^{-\alpha} + o(\lambda^n n^{-\alpha}) \tag{1.5}$$

ただし, $\alpha = \min(\alpha_2, \alpha_1 + 1)$ (1.6)

と述べられている。しかし, 次章に示すように, (1.5)の収束の速さを表す指数 α は, $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ には依らずに

$$\alpha = \alpha_1 + 2 \tag{1.7}$$

となる。

本論で扱う (1.4)の形は, その特別な場合 ($\lambda = -1$) として, 調和級数型の交代級数をも含んでいる。(1.7)の評価は, Aitken 加速がこれらの級数についても有効な加速法であることを示唆する。

本小論では, (1.4)の形の数列から得られる k 段加速列 $\{A_n^{(k)}\}$ は, k を固定して n を十分大きくするとき,

$$A_n^{(k)} = S + c \lambda^n n^{-\alpha_1 - 2k} + o(\lambda^n n^{-\alpha_1 - 2k}) \tag{1.8}$$

のように収束するという初等的事実に注意を喚起し, 調和級数型の交代級数の加速についても, Euler 変換とはほぼ同程度に, Aitken 加速の逐次適用が有効であることを簡単な数値例を用いて示す。

2. Aitken 加速列の収束性

数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, n の大きいところで, (1.4)の形の収束をするとしよう。記述の便宜上, これを

$$S_n = S + \lambda^n f(n+1) \tag{2.1}$$

ただし, $f(n+1) = c_1 n^{-\alpha_1} + c_2 n^{-\alpha_2} + \dots$ (2.2)

とかく ((2.2)の右辺の "... "の部分は, 十分な回数項別微分ができる程度に性質のよいものとする)。

定義式 (1.1) を

$$A_n^{(1)} - S = \frac{(S_n - S)(S_{n-2} - S) - (S_{n-1} - S)^2}{S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}} \tag{2.3}$$

† A Remark on Aitken's δ^2 Process by KAZUO MURATA (Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba) and MASAOKI SUGIHARA (Institute of Electronics and Information Sciences, University of Tsukuba).

†† 筑波大学社会学系

††† 筑波大学電子情報工学系

とかきかえてから (2.1) を代入すると,

$$\frac{A_n^{(1)} - S}{\lambda^n} = \frac{f(n+1)f(n-1) - (f(n))^2}{\lambda^2 f(n+1) - 2\lambda f(n) + f(n-1)} \quad (2.4)$$

となる. (2.2) の f に対し, (2.4) の右辺分母の主要項は

$$(1-\lambda)^2 f(n) \quad (2.5)$$

$$\sim c_1(1-\lambda)^2 n^{-\alpha_1} \quad (2.6)$$

である ($c_1 \neq 0, \lambda \neq 1$ に注意). 一方,

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(\xi) \quad (n \leq \xi \leq n+1)$$

$$f(n-1) = f(n) - f'(n) + \frac{1}{2} f''(\zeta) \quad (n-1 \leq \zeta \leq n)$$

を用いると, (2.4) の右辺の分子の主要項は

$$f(n)(f''(\xi) + f''(\zeta))/2 - (f'(n))^2 \quad (2.7)$$

$$\sim c_1^2 \alpha_1 n^{-2\alpha_1 - 2} \quad (2.8)$$

となる. したがって, (2.6) と (2.8) により,

$$\frac{A_n^{(1)} - S}{\lambda^n} \sim \frac{c_1 \alpha_1}{(1-\lambda)^2} n^{-\alpha_1 - 2} \quad (2.9)$$

となる.

(2.9) を繰り返して用いることにより, k 段加速列 $\{A_n^{(k)}\}$ の $n \rightarrow \infty$ (k は固定) の漸近評価として

$$\frac{A_n^{(k)} - S}{\lambda^n} \sim \frac{(-1)^{k-1} c_1 \alpha_1 (\alpha_1 + 2) \cdots (\alpha_1 + 2k - 2)}{(1-\lambda)^{2k}} n^{-\alpha_1 - 2k} \quad (2.10)$$

が得られる.

(1.4) で $\lambda = -1, \alpha_i = i$ の特別な場合に対する評価 (2.9) は文献 1) の Th. 45 に ϵ -算法について与えられている結果の特別な場合 (文献 1) の記号で $k=1$) として得られるものと一致している.

上に示した導出法は, f が (2.2) より一般的な場合にも適用でき, n が大きいところで

$$f(n) \gg f'(n) \gg f''(n)$$

となるような素直な関数 (たとえば $f(n) = (\log n)^\theta$ など) についても (2.5) と (2.7) により

$$\frac{A_n^{(1)} - S}{\lambda^n} \sim \frac{f(n)f''(n) - (f'(n))^2}{(1-\lambda)^2 f(n)} \quad (2.11)$$

という評価が得られ, 粗い目安として, 加速の効果は

$$\frac{A_n^{(1)} - S}{S_n - S} \sim \frac{1}{(1-\lambda)^2} (\log f(n))^\theta \quad (2.12)$$

で表される.

3. 数値例

例 1 S_n を交代級数の部分和:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (3.1)$$

とする. この種の交代級数の部分和の収束性は, (1.4) で $\lambda = -1$ の形にかかれることが多いが, この場合も, $\lambda = -1, \alpha_1 = 1, S = \log 2$ として (1.4) の形である.

Aitken 加速を施した結果 (図 1) から, (2.10) の成立が観察される. この例では, “公比” $\lambda = -1$ が既知なので Richardson 加速:

$$R_n^{(1)} = \frac{S_n - \lambda S_{n-1}}{1 - \lambda} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

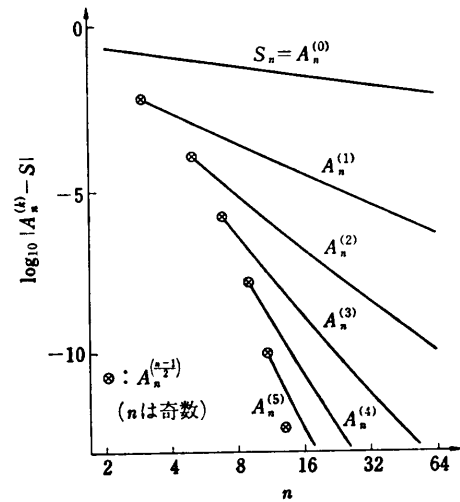


図 1 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の Aitken 加速

Fig. 1 Aitken acceleration for $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

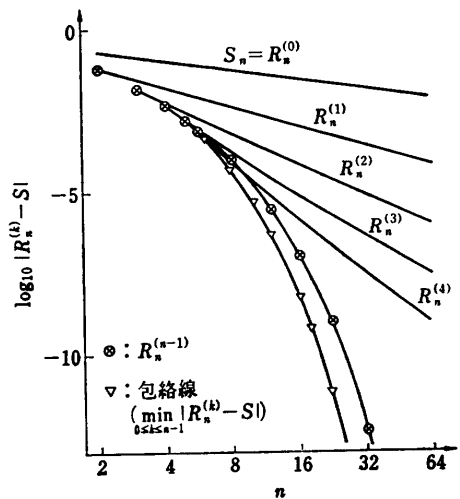


図 2 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の Richardson 加速

Fig. 2 Richardson acceleration for

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

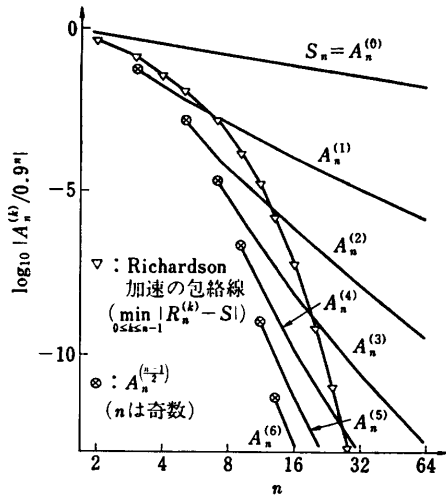


図3 $S_n = (-0.9)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{0.5}{n^{1.25}} \right)$ の Aitken 加速

Fig. 3 Aitken acceleration for $S_n = (-0.9)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{0.5}{n^{1.25}} \right)$.

(ただし $S_0=0$) も考えられる。これを k 回繰り返し適用して得られる数列を $\{R_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($R_n^{(0)}=S_n$) とすると $\{R_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ は交代級数の加速法として著名な Euler 変換³⁾ に一致し、各 k に対し $\{R_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ は (3.1) の最初の k 項を除いて Euler 変換を施したものに一致する⁴⁾。(3.1) の例に Richardson 加速を適用した結果を図2に示す。図2の包絡線(各 n に対して $\min_{0 \leq k \leq n-1} |R_n^{(k)} - S|$ を与える)と図1に⊗で示した数列 $\{A_n^{(\frac{n-1}{2})}\}_{n=1,3,5,\dots}$ を比較すると、この例においては、Aitken 加速の反復適用のほうが Euler 変換より加速性がよいことがわかる(ただし、ここでは仮数部16進28桁で計算しており、丸め誤差については考察外としている。以下の例でも同様)。

例2 $S=0$ に収束する数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$S_n = (-0.9)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{0.5}{n^{1.25}} \right) \quad (3.3)$$

に Aitken 加速を適用した結果を図3に示す。(1.4)で $\alpha_1=1, \alpha_2=1.25$ の場合であり、(1.5)の指数 α が3に等しいことが観察される。これは、(1.6)の評価に反し、(2.9)に一致する。比較のため、 $\lambda=-0.9$ の値が既知として Richardson 加速を適用したときの包絡線(例1参照)を図中に示す(S_n の Richardson 逐次加速は、 S_n の差分に Euler 変換の Fort による拡張³⁾を適用することと等価であることにも注意)。

例3 最終に、(1.4)からはずれた形の数列

$$S_n = (-0.9)^n / (\log 2n)^2 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

に対する Aitken 加速の効果を図4に示す。(2.11)に

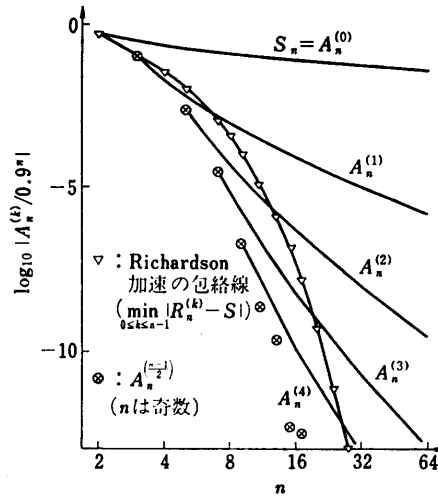


図4 $S_n = \frac{(-0.9)^n}{(\log 2n)^2}$ の Aitken 加速

Fig. 4 Aitken acceleration for $S_n = \frac{(-0.9)^n}{(\log 2n)^2}$.

よると

$$\frac{A_n^{(1)} - S}{(-0.9)^n} \sim \frac{0.554}{n^2 (\log 2n)^3} \quad (3.5)$$

程度となる。このような数列に対しても Aitken 加速は有効である(図中の、Richardson 加速の包絡線も参照のこと)。

4. むすび

本小論では、(1.4)の形の数列に対する Aitken 加速の効果について初等的な評価に基づく注意を与えた。本論の漸近評価は容易に導出できるので、その導出自体に新しさはないが、実用上有用な結果と思われたので報告した。

謝辞 最後に、本稿の投稿を薦めてくださった東京大学工学部伊理正夫教授に感謝します。

参考文献

- 1) Brezinski, C.: Accélération de la Convergence en Analyse Numérique, in *Lecture Notes in Mathematics*, No. 584, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- 2) 伊理正夫: 数値計算, 朝倉書店 (1981).
- 3) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: 数学公式II, 岩波全書 (1957).
- 4) 高橋秀俊: 振動的関数の積分法, 京都大学数理解析研究所講究録 483, pp. 238-248 (1983).

(昭和59年2月7日受付)

(昭和59年4月17日採録)