

# チェビシェフの不等式を用いた 予測区間に基づくロバスト最適化

田川 聖治<sup>1,a)</sup> 藤田 翔平<sup>1</sup>

**概要:** 本稿では、目的と制約に含まれる関数値を確率変数とし、その予測区間に基づくロバスト最適化問題を定式化する。予測区間の導出にチェビシェフの不等式を用いることで、確率変数（関数値）の分布が未知であっても、任意の信頼係数で予測区間が推定できる。ただし、予測区間の推定では1つの解を繰り返し評価して、関数値の標本を集める必要がある。そこで、ロバスト最適化問題の解を効率的に探索するため、予測区間の推定に必要な標本数の最小値を示すと同時に、差分進化を拡張した新たな最適化アルゴリズムを提案する。最後に、提案手法の有用性をテスト問題と工学的な設計問題で検証する。

## Robust Optimization Technique based on Prediction Interval using Chebyshev Inequality

TAGAWA KIYOHARU<sup>1,a)</sup> FUJITA SHOHEI<sup>1</sup>

**Abstract:** In this paper, a robust optimization problem is formulated based on the prediction interval of the random variable, namely, the function value included in an objective or a constraint. The prediction interval with an arbitrary confidence level can be applied to completely unknown distributions, because it is derived from Chebyshev inequality. However, the prediction interval needs to be estimated from a number of samples, which are obtained by evaluating the same solution repeatedly. In order to solve the robust optimization problem efficiently, the minimum sample size necessary for estimating the prediction interval is shown. Furthermore, a new algorithm based on Differential Evolution is proposed. Finally, the usefulness of the proposed methodology is demonstrated through a test problem and an engineering design problem.

### 1. はじめに

不確実な環境下における最適化問題は、進化計算の分野でも広く研究されている [1]。ここで、一般的なロバスト最適化問題では、決定変数の変動や不確かさを考慮し、解を評価するごとに異なる目的関数値の平均を最小化する。

本稿では、最悪状況を考慮したロバスト最適化問題を定式化する。最悪状況の推定にはチェビシェフの不等式から任意の信頼係数で導出される予測区間の上限値を用いる。また、ロバスト最適化問題の解を効率的に探索するため、予測区間の計算に必要な標本数の最小値を示すと同時に、差分進化 [2] に基づく最適化アルゴリズムを提案する。

### 2. 標本によるチェビシェフの不等式

広く知られたチェビシェフの不等式は、平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  が存在する確率変数  $\mathcal{F}$  と定数  $\lambda > 1$  に対して

$$P_r(|\mathcal{F} - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad (1)$$

である。ここで、有意水準  $\alpha$  を  $\alpha = 1/\lambda$  と取ると、確率変数  $\mathcal{F}$  の値が確率  $(1 - \alpha)$  で含まれる予測区間は

$$P_r([\mu - \lambda\sigma, \mu + \lambda\sigma] \ni \mathcal{F}) \geq 1 - \alpha \quad (2)$$

となる。また、 $(1 - \alpha)$  は信頼係数とも呼ばれる。

チェビシェフの不等式の利点として、確率変数  $\mathcal{F}$  に正規分布のような特定の分布を想定する必要がない。しかし、確率変数  $\mathcal{F}$  の母平均  $\mu$  と母分散  $\sigma^2$  は、多くの場合において未知である。そこで、Saw ら [3] は標本に基づくチェビ

<sup>1</sup> 近畿大学  
Kinki University, Higashi-Osaka 577-8502, Japan  
<sup>a)</sup> tagawa@info.kindai.ac.jp

シェフの不等式を示している。確率変数  $\mathcal{F}$  の  $N$  個の標本  $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^N$  から、標本平均  $\bar{F}$  と標本不偏分散  $s^2$  は

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{F}^n \quad (3)$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\mathcal{F}^n - \bar{F})^2 \quad (4)$$

ただし、 $P_r(\mathcal{F}^1 = \dots = \mathcal{F}^N = \mathcal{F}^{N+1}) = 0$  とする。

ここで、標本によるチェビシェフの不等式は

$$\begin{aligned} P_r \left( |\mathcal{F} - \bar{F}| \geq \lambda \sqrt{\frac{N+1}{N}} s \right) \\ \leq \frac{1}{N+1} \left[ \frac{N+1}{N} \left( \frac{N-1}{\lambda^2} + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、 $[r]$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) は床関数である。

本稿では、式 (5) から標本による確率変数  $\mathcal{F}$  の予測区間を導出する。まず、式 (5) の右辺は  $[r] \leq r$  であるため、

$$\begin{aligned} P_r \left( |\mathcal{F} - \bar{F}| \geq \lambda \sqrt{\frac{N+1}{N}} s \right) \\ \leq \frac{1}{N} \left( \frac{N-1}{\lambda^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、以下のように  $\kappa^2$  を置く。

$$\kappa^2 = \lambda^2 \frac{N+1}{N} \quad (7)$$

式 (7) の  $\kappa$  を式 (6) に代入すると、

$$P_r(|\mathcal{F} - \bar{F}| \geq \kappa s) \leq \frac{N^2 - 1 + N \kappa^2}{N^2 \kappa^2} \quad (8)$$

有意水準  $\alpha$  を以下のように決める。

$$\alpha = \frac{N^2 - 1 + N \kappa^2}{N^2 \kappa^2} \quad (9)$$

式 (8) と式 (9) から、確率変数  $\mathcal{F}$  の予測区間は

$$\begin{aligned} P_r([\bar{F} - \kappa s, \bar{F} + \kappa s] \ni \mathcal{F}) \\ = P_r([\mathcal{F}^L, \mathcal{F}^U] \ni \mathcal{F}) \geq 1 - \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

また、式 (9) から  $\kappa^2$  は有意水準  $\alpha$  で定義できる。

$$\kappa^2 = \frac{N^2 - 1}{N(\alpha N - 1)} \quad (11)$$

さらに、式 (7) から  $\kappa^2 > 1$  であるため、予測区間を求めるために必要となる標本数  $N$  の最小値  $N_{\min}$  は

$$N \geq N_{\min} = \left\lceil \frac{1}{\alpha} + 1 \right\rceil \quad (12)$$

ちなみに、式 (11) から  $\kappa^2$  の下限値は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2 - 1}{N(\alpha N - 1)} = \frac{1}{\alpha} \quad (13)$$

図 1 に標本数  $N$  に対する係数  $\kappa$  の変化を示す。

本稿では、式 (10) の  $\mathcal{F}^U = \bar{F} + \kappa s$  を確率変数  $\mathcal{F}$  の上限値、 $\mathcal{F}^L = \bar{F} - \kappa s$  を下限値と呼ぶ。上限値  $\mathcal{F}^U$  と下限値  $\mathcal{F}^L$  は、式 (12) の条件を満たす数の標本  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \dots, \mathcal{F}^N$  と有意水準  $\alpha$  から、式 (3), (4), (11) により求まる。

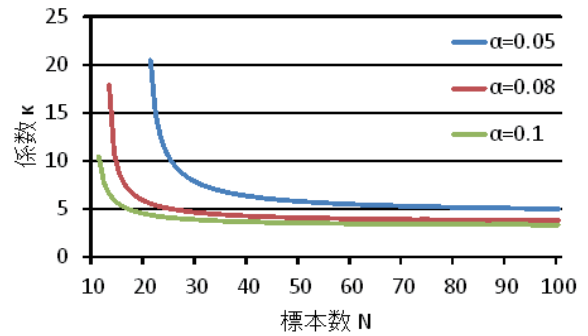


図 1 標本数  $N$  に対する係数  $\kappa$  の変化

### 3. ロバスト最適化問題の定式化

制約条件付き最適化問題は式 (14) で記述される。

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_D) \\ \text{subject to} & g_m(\mathbf{x}) \leq 0, m \in \mathbf{I}_M \\ & x_j^L \leq x_j \leq x_j^U, j = 1, \dots, D \end{cases} \quad (14)$$

ただし、制約条件の添字集合を  $\mathbf{I}_M = \{1, \dots, M\}$  とする。また、解  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$  は決定変数  $x_j \in \mathbb{R}$  のベクトルである。

ここで、各決定変数  $x_j \in \mathbb{R}$  に摂動  $\delta_j \in \mathbb{R}$  が加わるものとする。摂動  $\delta_j \in \mathbb{R}$  は未知の分布に従う確率変数である。摂動  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_D) \in \mathbb{R}^D$  の影響を加味し、式 (14) の関数  $f(\mathbf{x})$  と  $g_m(\mathbf{x})$  を式 (15) のように表記する。

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) \\ \mathcal{G}_m(\mathbf{x}) = g_m(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}), m \in \mathbf{I}_M \end{cases} \quad (15)$$

目的関数値  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  は解  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$  に依存するが、解を評価するごとに異なる値が観測される。そこで、目的関数値を確率変数と見做して、精度が保証された解の最悪状況を式 (10) の上限値  $\mathcal{F}^U$  で評価する。すなわち、解  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$  を繰り返し評価して標本集合  $\{\mathcal{F}^n(\mathbf{x}) \mid n = 1, \dots, N\}$  を求め、任意の有意水準  $\alpha$  で上限値  $\mathcal{F}^U(\mathbf{x})$  を計算する。同様に、制約条件に含まれる関数値  $\mathcal{G}_m(\mathbf{x})$ ,  $m \in \mathbf{I}_M$  の標本集合から、それらの上限値  $\mathcal{G}_m^U(\mathbf{x})$ ,  $m \in \mathbf{I}_M$  を計算する。

ここで、本稿で対象とする最悪状況を考慮したロバスト最適化問題 (WCOP: Worst Case Optimization Problem) は、式 (14) を拡張して式 (16) のように定式化される。

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathcal{F}^U(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^U(x_1, x_2, \dots, x_D) \\ \text{subject to} & \mathcal{G}_m^U(\mathbf{x}) \leq 0, m \in \mathbf{I}_M \\ & x_j^L \leq x_j \leq x_j^U, j = 1, \dots, D \end{cases} \quad (16)$$

### 4. 差分進化に基づく最適化アルゴリズム

#### 4.1 基本的な DE のアルゴリズム

既存の DE を直接 WCOP に適用する。まず、 $N_P$  個の WCOP の解候補  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ ,  $i = 1, \dots, N_P$  をランダムに生

成して初期集団  $\mathbf{P}$  とする。以降、解候補を個体と呼ぶ。各個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  を  $N$  回評価して関数値の標本集合を作り、それから上限値  $\mathcal{F}^U(\mathbf{x}_i)$  と  $\mathcal{G}_m^U(\mathbf{x}_i)$ ,  $m \in \mathbf{I}_M$  を計算する。

古典的な DE の制御パラメータは、集団サイズ  $N_P$ , スケール係数  $S_F$ , 交叉率  $C_R$  である。本稿では、Brest ら [4] による  $S_F$  と  $C_R$  の自動調整法を採用する。そのため、各個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  にそれぞれ異なるスケール係数  $S_{F,i}$  と交叉率  $C_{R,i}$  を持たせ、 $S_{F,i} = 0.5$ ,  $C_{R,i} = 0.9$  と初期化する。

各世代において、DE は各個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  を順番にターゲット・ベクトルとし、新たな個体の候補であるトライアル・ベクトル  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^D$  を以下に述べる戦略により生成する。

まず、ターゲット・ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  の  $S_{F,i}$  と  $C_{R,i}$  から、スケール係数  $S_F$  と交叉率  $C_R$  を以下のように決める。

$$S_F = \begin{cases} 0.1 + \text{rand}_1 \cdot 0.9, & \text{if } \text{rand}_2 < 0.1 \\ S_{F,i}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

$$C_R = \begin{cases} \text{rand}_3, & \text{if } \text{rand}_4 < 0.1 \\ C_{R,i}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

ただし、 $\text{rand}_n \in [0, 1]$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  は一様乱数である。

次に、ターゲット・ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  を除く集団  $\mathbf{P}$  からランダムに異なる 3 つの個体を選択する。これら 4 つの個体から、 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_D)$  を以下のように生成する。

$$u_j = \begin{cases} x_{r1,j} + S_F(x_{r2,j} - x_{r3,j}), & \text{if } \text{rand}_j < C_R \vee j = j_r \\ x_{i,j}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

ただし、添字  $j_r \in [1, D]$  はランダムに選択する。

トライアル・ベクトル  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^D$  をターゲット・ベクトル  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  と比較し、以下の 3 つの条件の何れか 1 つが満たされれば、 $\mathbf{u}$  は既存の  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  に勝ると判定する [2]。

- $(\forall m \in \mathbf{I}_M; \mathcal{G}_m^U(\mathbf{u}) \leq 0) \wedge (\mathcal{F}^U(\mathbf{u}) \leq \mathcal{F}^U(\mathbf{x}_i))$
- $(\forall m \in \mathbf{I}_M; \mathcal{G}_m^U(\mathbf{u}) \leq 0) \wedge (\exists m \in \mathbf{I}_M; \mathcal{G}_m^U(\mathbf{x}_i) > 0)$
- $(\exists m \in \mathbf{I}_M; \mathcal{G}_m^U(\mathbf{u}) > 0) \wedge$   
 $(\forall m \in \mathbf{I}_M; \max\{\mathcal{G}_m^U(\mathbf{u}), 0\} \leq \max\{\mathcal{G}_m^U(\mathbf{x}_i), 0\})$

DE の世代交代モデルには同期型と非同期型がある [5]。本稿では、非同期型 DE を採用するため、 $\mathbf{u}$  が  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  に勝る場合、直ちに  $\mathbf{u}$  で  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  を上書きする。また、式 (17) の  $S_F$  と式 (18) の  $C_R$  を  $S_{F,i}$  と  $C_{R,i}$  に代入する。

#### 4.2 累積サンプリングを組み込んだ DE

既存の DE では各個体を  $N$  回ずつ評価して上限値を計算する必要がある。しかし、現実的な最適化問題では、シミュレーションによる個体の評価に計算コストを要する。そこで、提案する DE では累積サンプリング [6] を導入し、有望な個体に対する標本数を徐々に増やすことで、それらの精度を高めてゆく。累積サンプリングを組み込んだ DE を DEA (DE with Accumulative sampling) と呼ぶ。

表 1 テスト問題における予測区間の比較

	$\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$	$\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^*)$	$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}^*)$
$\mathcal{F}^U$	4.132	0.130	0.071
$\mathcal{F}^L$	3.877	-0.139	-0.073
	$\mathcal{F}(\mathbf{x}^\dagger)$	$\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^\dagger)$	$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}^\dagger)$
$\mathcal{F}^U$	7.465	-0.047	-0.033
$\mathcal{F}^L$	1.288	-0.226	-0.125

DEA は初期集団の個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  を  $N_{\min}$  回だけ評価して、上限値 ( $\mathcal{F}^U(\mathbf{x}_i)$ ,  $\mathcal{G}_m^U(\mathbf{x}_i)$ ,  $m \in \mathbf{I}_M$ ) を求める。  $N_{\min}$  は式 (12) に示した標本数の最小値である。以降、DEA は  $G_{int}$  世代ごとに集団内の各個体を  $N_{\min}$  回評価し、新たな標本を標本集合に追加した後、上限値を再計算する。また、ある世代で個体の評価回数の累計が  $N_G$  ならば、同世代に生成されるトライアル・ベクトル  $\mathbf{u}$  は  $N_G$  回評価する。

DEA の終了条件を世代数  $G_{\max} = G_{int} B$  とする。このとき、DEA による全個体の評価回数の総計  $T$  は

$$T = \frac{N_{\min} N_P G_{int} (B + 1) B}{2} + N_{\min} N_P B \quad (20)$$

ここで、各個体を  $N$  回ずつ評価する DE でも全個体の評価回数の総計が  $T$  であれば、式 (21) が成り立つとき、DEA は DE よりも多くの個体を調べることができる。

$$N > \frac{T}{N_P (1 + G_{int} B)} \quad (21)$$

## 5. 数値実験

提案手法の有用性をテスト問題と圧力容器の構造設計問題 [7] で検証した。それらの問題は式 (14) の制約条件付き最適化問題として与えられる。そこで、正規分布に従う摂動  $\delta_j \sim \mathcal{N}(0, 0.01^2)$  を各変数  $x_j \in \mathbb{R}$  に加え、有意水準を  $\alpha = 0.1$  とし、それぞれの問題を WCOP に拡張した。

DEA は Java 言語で実装した。集団サイズ  $N_P = 10 D$ , 世代間隔  $G_{int} = 10$ , 世代数  $G_{\max} = 200$  とした。また、 $\alpha = 0.1$  から  $N_{\min} = 11$  である。さらに、各 WCOP に対して、異なる初期集団を用いて DEA を 30 回適用した。

### 5.1 テスト問題

下記のテスト問題の最適解は  $\mathbf{x}^* = (2, 2)$  であり、各関数値は  $f(\mathbf{x}^*) = 4$ ,  $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$ ,  $g_2(\mathbf{x}^*) = 0$  となる。

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{subject to} & g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 4)^2 - 2x_2 \leq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0 \\ & -5 \leq x_1, x_2 \leq 10 \end{cases} \quad (22)$$

テスト問題を WCOP に拡張して DEA を適用したところ、ロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger \approx (2.042, 1.982)$  が得られた。

表 1 に最適解  $\mathbf{x}^*$  とロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger$  の各関数値の予測区間を比較する。標本数は  $N = 231$  である。目的関数値

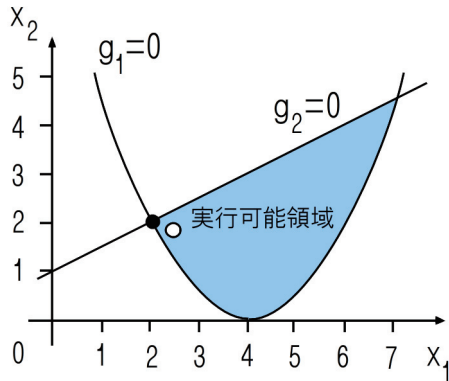


図2 テスト問題の実効可能領域

は  $\mathcal{F}^U(\mathbf{x}^*) = 4.132$  と  $\mathcal{F}^U(\mathbf{x}^\dagger) = 7.465$  であり、最適解  $\mathbf{x}^*$  がロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger$  に勝る。しかし、制約条件の関数値は  $\mathcal{G}_1^U(\mathbf{x}^*) = 0.130$  と  $\mathcal{G}_2^U(\mathbf{x}^*) = 0.071$  で  $\mathcal{G}_m^U(\mathbf{x}) \leq 0$  を満たさず、最適解  $\mathbf{x}^*$  は WCOP の実効可能解でない。

図2にテスト問題の決定変数空間における実効可能領域を示す。また、図2の●印は最適解  $\mathbf{x}^*$  であり、○印はロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger$  である。最適解は実効可能領域の境界上に存在するが、ロバスト最適解は内側に位置している。

## 5.2 構造設計問題

図3に压力容器の構造を示す。筒状の容器の両端に半球型の蓋が付いている。決定変数は容器の厚さ  $x_1$ 、蓋の厚さ  $x_2$ 、容器の内径  $x_3$ 、蓋を除く容器の長さ  $x_4$  である。压力容器の構造設計問題は式(23)のように記述される[7]。目的関数  $f(\mathbf{x})$  は材料、加工、溶接のコストを含む。

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f(\mathbf{x}) = 0.6224 x_1 x_3 x_4 \\
 & && \quad + 1.7781 x_2 x_3^2 + 19.84 x_1^2 x_3 \\
 & && \quad + 3.1661 x_1^2 x_4 \\
 & \text{subject to} && g_1(\mathbf{x}) = -x_1 + 0.0193 x_3 \leq 0 \\
 & && g_2(\mathbf{x}) = -x_2 + 0.00954 x_3 \leq 0 \\
 & && g_3(\mathbf{x}) = -\pi x_3^2 x_4 - \frac{4}{3} \pi x_3^3 \\
 & && \quad + 1296000 \leq 0 \\
 & && g_4(\mathbf{x}) = x_4 - 240 \leq 0 \\
 & && 0.0625 \leq x_1, x_2 \leq 6.1875 \\
 & && 10 \leq x_3, x_4 \leq 200
 \end{aligned} \tag{23}$$

式(23)の構造設計問題にDEを適用して得られた解を最適解  $\mathbf{x}^*$  とした。また、構造設計問題をWCOPに拡張した後、DEAを適用してロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger$  を求めた。

表2に最適解  $\mathbf{x}^*$  とロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger$  の各関数値の予測区間を比較する。標本数は  $N = 231$  である。最適解  $\mathbf{x}^*$  は目的関数値でロバスト最適解  $\mathbf{x}^\dagger$  に勝るが、WCOPの実効可能解でない。また、 $\mathcal{G}_3^U(\mathbf{x}^*)$  の値が非常に大きく、決定変数の変動を考慮することの重要性が確認できる。

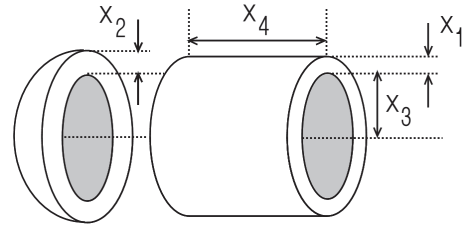


図3 压力容器の構造

表2 構造設計問題における予測区間の比較

	$\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$	$\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^*)$	$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}^*)$	$\mathcal{G}_3(\mathbf{x}^*)$	$\mathcal{G}_4(\mathbf{x}^*)$
$\mathcal{F}^U$	6142.437	0.034	0.031	2118.937	-40.097
$\mathcal{F}^L$	5632.119	-0.034	-0.032	-2285.873	-40.161
	$\mathcal{F}(\mathbf{x}^\dagger)$	$\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^\dagger)$	$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}^\dagger)$	$\mathcal{G}_3(\mathbf{x}^\dagger)$	$\mathcal{G}_4(\mathbf{x}^\dagger)$
$\mathcal{F}^U$	11190.043	-0.012	-0.019	-2485.068	-13.869
$\mathcal{F}^L$	1932.789	-0.051	-0.059	-6465.664	-80.578

## 6. おわりに

本稿では、チェビシェフの不等式を用いて、最悪状況を考慮したロバスト最適化問題(WCOP)を定式化した。また、WCOPの解を効率的に探索するため、DEに基づく最適化アルゴリズム(DEA)を提案した。さらに、決定変数の変動を考慮せずに求めた最適解と、WCOPのロバスト最適解を比較することで、提案手法の有用性を確認した。不確実性の要因に決定変数の変動を想定したが、提案手法は関数値にノイズが含まれる場合[1]にも有効である。

今後の課題は、DEAの探索性能の検証と改良である。

## 参考文献

- [1] Jin, Y. and Branke, J.: Evolutionary optimization in uncertain environments, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 9, No. 3, pp. 303-317 (2005).
- [2] Price, K. V., Storn, R. M., and Lampinen, J. A.: *Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization*, Springer (2005).
- [3] Saw, J. G., Yang, M. C. K., and Mo, T. C.: Chebyshev inequality with estimated mean and variance, *The American Statistician*, Vol. 38, No. 2, pp. 130-132 (1984).
- [4] Brest, J., Greiner, S., Bošković, B., Merink, M., and Žumer, V.: Self-adapting control parameters in differential evolution: a comparative study on numerical benchmark problems, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 10, No. 6, pp. 646-657 (2006).
- [5] 田川聖治: (解説) 差分進化の基礎と並行プログラミング, システム/制御/情報, システム制御情報学会誌, Vol. 59, No. 2, pp. 47-52 (2015).
- [6] Park, T. and Ryu, K. R.: Accumulative sampling for noisy evolutionary multi-objective optimization, *Proc. of GECCO '11 Proc.*, Dublin, Ireland, pp. 793-800 (2011).
- [7] Kannan, B. K. and Kramer, S. N.: An augmented lagrange multiple based method for mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design, *Journal of Mechanical Design. Trans. of the ASME*, No. 116, pp. 318-320 (1994).