

幾何双対ナップサック多面体の体積のための FPTAS

安藤 映^{1,a)} 来嶋 秀治^{2,b)}

概要: n 次元多面体の体積の計算は一般に困難であり, 様々な多面体の計算が $\#P$ -困難であることが知られている. 本稿では次の問題 (幾何双対ナップサック多面体の体積) について考え, 決定性の完全多項式時間近似スキーム (FPTAS) が存在することを示す: 非負の整数ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ が与えられたとき, $P_{\mathbf{a}} = \text{conv}\{\pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n, \mathbf{a}\}$ の体積を求める. ただし, \mathbf{e}_i は i 番目の成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 の n 次元ベクトルである. この問題は Khachiyan によって $\#P$ -困難性が示されている. 本稿では次の手順で $\text{Vol}(P_{\mathbf{a}})$ を求める問題に対する FPTAS を示す. まず, $\text{Vol}(P_{\mathbf{a}})$ の計算を, 二つの cross polytope の重なり部分の体積を求める問題に帰着する. その後, 二つの cross polytope の重なり部分を定積分の繰返しで表現して, その積分を階段近似によって近似する. 提案手法は確定的なアルゴリズムであり, アルゴリズムの出力を V' とすると, $1 - \epsilon \leq V'/\text{Vol}(P_{\mathbf{a}}) \leq 1$ であり, 提案手法は $O(n^{13}/\epsilon^8)$ 時間で完了する.

1. はじめに

本稿では次の問題について考える: 非負の整数ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ が与えられたとき,

$$P_{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}\{\pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n, \mathbf{a}\} \quad (1)$$

の体積を計算する. ただし, \mathbf{e}_i ($i = 1, \dots, n$) は i 番目の成分だけが 1 であり, 他は 0 であるような n 次元ベクトルである. $P_{\mathbf{a}}$ を考える際には $\sum_{i=1}^n a_i \geq 1$ であると仮定する. そうでなければ $P_{\mathbf{a}}$ は単位 cross polytope $\text{conv}\{\pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n\}$ であるからである. なお, $P_{\mathbf{a}}$ はナップサック多面体と幾何双対の関係にあるため, 本稿では $P_{\mathbf{a}}$ を幾何双対ナップサック多面体と呼ぶ. ナップサック多面体の体積を計算する問題も $\#P$ -困難であることが知られており, [1] で FPTAS が提案されている. しかし, $\text{Vol}(P_{\mathbf{a}})$ について FPTAS が存在するかどうかはこれまで知られていない.

一般に, n 次元の体積を計算することは困難である. 決定的なアルゴリズムでは membership oracle の形で与えられる一般の凸体について, その体積の計算には近似比 1.999^n すら達成できないことが示されている [3], [10], [21]. 一般の凸体ではなく, 多面体に限れば問題が簡単になる可能性

はあるが, それでも例えばナップサック多面体の体積, 幾何双対ナップサック多面体の体積, Zonotope の体積など比較的単純な多面体の体積でもその計算は $\#P$ -困難であることが示されている [7], [9], [14], [15], [16].

一方, 近似アルゴリズムの観点から, MCMC を用いて membership oracle によって与えられる一般の凸体の体積を計算する問題に対して, ランダム化近似アルゴリズムが提案されている [5], [8], [22]. また, $\#P$ -困難な問題の一部に対しても完全多項式時間ランダム化近似スキーム (FPRAS) が知られている [2], [6].

他方で, 乱数を使わない決定的なアルゴリズムで $\#P$ -困難な問題を近似的に解くことはアルゴリズム設計上の課題である. また, 独立点集合の数, ナップサック問題の解の数, 有界な離散確率変数の和の分布関数, ナップサック多面体の体積などの問題は $\#P$ -困難であるが, FPTAS が存在することが知られている [4], [11], [12], [13], [17], [18], [19], [20], [23], [24].

本稿では次の定理を示す.

定理 1 \mathbf{a} が与えられた時に, $1 - \epsilon \leq V'/\text{Vol}(P_{\mathbf{a}}) \leq 1$ を満たすような V' を $O(n^{13}/\epsilon^8)$ 時間で出力するアルゴリズムが存在する.

本稿の構成は次の通りである. まず 2 節で $P_{\mathbf{a}}$ の体積を計算する問題を 2 つの cross polytope の重なり部分 S の体積を求める問題に帰着する. 3 節では S の体積を $1 + \gamma$ 倍近似 ($\gamma = O(\epsilon^2/n)$) できれば $P_{\mathbf{a}}$ の体積を $1 - \epsilon$ 倍近似できることを示す. そして 4 節では S の体積を $1 + \gamma$ 倍近似するアルゴリズムを示す. アルゴリズムの実行時間はほとんどが S の体積を $1 + \gamma$ 近似するのにかかる時間に占めら

¹ 崇城大学
Sojo University, 4-22-1, Ikeda, Nishi-Ku, Kumamoto, Kumamoto, 860-0082, Japan

² 九州大学
Kyushu University

a) ando-ei@cis.sojo-u.ac.jp

b) kijima@inf.kyushu-u.ac.jp

れている．最後に5節で本稿のまとめとする．

2. 2つの cross polytope の重なり部分の体積への帰着

まずここでは，二つの cross polytope の重なり部分の体積を求めることができれば， $\text{Vol}(P_a)$ を計算できることを示す． $C(a, b)$ を，中心座標が a で与えられる半径 b の cross polytope であるとする．つまり，

$$\begin{aligned} C(a, c) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}\{\pm ce_1 + a, \dots, \pm ce_n + a\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \leq c \right\}. \end{aligned}$$

n 次元ベクトル $a' = (a'_1, \dots, a'_n) \in \mathbb{R}_+^n$ と $b \in \mathbb{R}_+$ が与えられたとき，次で与えられる多面体 $S(a'; 1, b)$ の体積を求める問題を考える：

$$\begin{aligned} S(a'; u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} C(0, u) \cap C(a', v) \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq u \wedge \sum_{i=1}^n |x_i - a'_i| \leq v \right\}. \end{aligned}$$

ここで， $0 < \delta < 1$ は後述のアルゴリズム 1 のパラメータとする．そして， P_a を cross polytope の無限列 $Q_0 = C(0, 1), Q_1, Q_2, \dots$ で近似する．ここで $k = 1, 2, \dots$ について

$$Q_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i - f_k(\delta)a_i| \leq (1 - \delta)^k \right\},$$

ただし $f_1(\delta) = \delta$ で $f_k(\delta) = 1 - (1 - f_{k-1}(\delta))(1 - \delta)$ である．まず次の補題を証明する．

補題 1

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \subseteq P_a.$$

証明

任意の $v \in Q_k$ に対して， $u = (u_1, \dots, u_n) \in Q_{k-1}$ が存在して， v は u と a を両端に持つ線分の上にあることを示す．ここで $u - a = (v - a)/(1 - \delta)$ とすると u, v, a は一直線上にあり，

$$\sum_{i=1}^n |u_i - f_{k-1}(\delta)a_i| = \sum_{i=1}^n \frac{|v_i - f_k(\delta)a_i|}{1 - \delta} \leq (1 - \delta)^{k-1}.$$

最後の不等式は $v \in Q_k$ であることから得られる．以上より， $u \in Q_{k-1}$ である．

上記の議論を繰り返すことで，任意の $v \in Q_k$ にたいして点 $u_0 \in Q_0$ が存在して， v は u_0 と a を端点に持つ線分の上にあるといえる．すると， P_a は凸であるので $k \geq 0$ について $Q_k \subseteq P_a$ である．□

ここで $a' = \delta a$ ， $b = 1 - \delta$ とする．また簡単のため， $Q = Q_0, Q' = Q_1, S = S(a'; 1, b)$ と書くことにする．そこ

で $\text{Vol}(P_a)$ を $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k)$ 近似することを考えると，

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P_a) &\geq \text{Vol}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k\right) \\ &= \text{Vol}(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(Q' - S)(1 - \delta)^{kn} \\ &= \text{Vol}(Q) + \frac{\text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S)}{1 - (1 - \delta)^n}. \end{aligned}$$

δ を小さくとると， $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k)$ は $\text{Vol}(P_a)$ に収束する．これは後で証明を行う．この cross polytope の無限列で P_a を近似する様子を図 1 に示す．

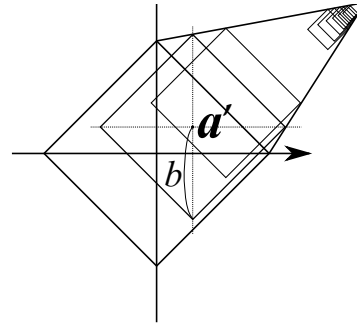


図 1 P_a を cross polytope の無限列で近似する

次に， $\text{Vol}(P_a)$ の上界を与えることで以下の補題を示す．

補題 2

$$\delta = \frac{\epsilon}{2n \sum_{i=1}^n a_i}$$

とすると，次式が成立する．

$$1 - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(P_a)} \leq 1$$

証明 まず $\frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(P_a)} \leq 1$ は補題 1 より明らかであるので，以下では $1 - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(P_a)}$ を証明する．

まず少し大きな cross polytope U_0 を考えて， U_0 は Q と Q' を含むものとする．ここでは

$$U_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \left(1 + \sum_{i=1}^n a'_i\right) \right\}$$

とすれば U_0 は Q と Q' を含む．そして，次のようにして cross polytope の無限列 U_0, U_1, \dots を考える．つまり， $k = 0, 1, \dots$ について

$$U_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i - f_k(\delta)a_i| \leq (1 - \delta)^k \left(1 + \sum_{i=1}^n a'_i\right) \right\},$$

とする． $k = 0, 1, \dots$ について $Q_k \cup Q_{k+1} \subseteq U_k$ なので

$$P_a \setminus \{a\} \subseteq \text{conv}\{Q_0, a\} \setminus \{a\} \subseteq \text{conv}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k\right\} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$$

なので, $\text{Vol}(P_a) \leq \text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k)$ である. 明らかに, δ が $+0$ に向かうと $k = 0, 1, \dots$ について U_k は Q_k に収束するので, $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k)$ と $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k)$ は $\text{Vol}(P_a)$ に収束する. 従って,

$$\frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(P_a)} \geq \frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k)}.$$

ここで, $\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ と $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ は相似形ではない (U_k を考える際に a をスケールしていない) ことに注意する. しかし, 次のようにして $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k)$ の上界 $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} U'_k)$ を得る. 具体的には

$$U'_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i - f_k(\delta)La_i| \leq (1-\delta)^k L \right\},$$

ただし $L = 1 + \sum_{i=1}^n a'_i$ である. U_k と U'_k の違いは a を La で置き換えるところである.

$\bigcup_{k=0}^{\infty} U'_k$ は $\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ を各軸につき L 倍に拡大することで得られるので, $\bigcup_{k=0}^{\infty} U'_k$ と $\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ は互いに相似である. また $L \geq 1$ であるので, $\text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k) \leq \text{Vol}(\bigcup_{k=0}^{\infty} U'_k)$ であり, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k)} &\geq \frac{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k)}{\text{Vol}(\bigcup_{k=1}^{\infty} U'_k)} = \frac{\text{Vol}(Q)}{\text{Vol}(U)} \\ &= L^{-n} = \left(1 + \sum_{i=1}^n a'_i\right)^{-n} \geq 1 - n \sum_{i=1}^n a'_i. \end{aligned}$$

定義より $a' = \delta a$, また $\delta = \frac{\epsilon}{2n \sum_{i=1}^n a_i}$ なので, 次の式を得る.

$$\frac{\text{Vol}(Q)}{\text{Vol}(U)} \geq 1 - n \sum_{i=1}^n a'_i \geq 1 - \epsilon/2$$

□

提案アルゴリズムでは, $\text{Vol}(P_a)$ を無限等比級数 $(1-\delta)^{in} \text{Vol}(Q' - Q)$ ($i = 1, \dots$) の和と $\text{Vol}(Q)$ の和で近似する. なお, $\text{Vol}(Q' - Q) = \text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S)$ の近似を $\text{Vol}(S)$ を近似計算することによって得る. このような近似を考える際には, $\text{Vol}(Q' - Q)$ が 0 に近い際には $\text{Vol}(S)$ の近似は役に立たないことに注意が必要である. しかし, 次節では $\text{Vol}(Q' - Q)$ の下界を示すことで上述の方法による近似が可能であることを示す.

3. $\text{Vol}(P_a)$ に対する近似アルゴリズム

ここではオラクル $A(a', b; \gamma)$ が $\text{Vol}(S)$ の近似 S' を $1 \leq S'/\text{Vol}(S) \leq 1 + \gamma$ を満たすように $\text{poly}(n, 1/\gamma)$ 時間で答えるという仮定の元で, $\text{Vol}(P_a)$ の近似 V' を求めるアルゴリズムについて説明する. 以下に提案アルゴリズム 1 を示す.

Algorithm 1 入力: $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$;

1. $\delta := \frac{\epsilon}{2n \sum_{i=1}^n a_i}$;
2. $a' := \delta a, b := 1 - \delta$; (図 1 に a', b を図示する.)

3. オラクル $A(a', b; \gamma)$ を呼び出して $1 \leq S'/\text{Vol}(S) \leq 1 + \gamma$ を満たすような S' を得る. ただし, $\gamma = \frac{\epsilon^2}{8n}$ である;
4. $V' = \text{Vol}(Q) + \frac{\text{Vol}(Q') - S'}{1 - (1-\delta)^n}$ を出力する.

補題 2 により, 仮に $\text{Vol}(S)$ の正確な値を得ることができたとしても既に近似比は $1 - \epsilon/2$ であるので, 以後では $\text{Vol}(Q' - Q)$ について S' を用いて近似比 $1 - \epsilon/2$ を実現することを示す.

補題 3 アルゴリズム中, オラクル A に与えるパラメータ γ について

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\text{Vol}(Q' - Q) \epsilon}{\text{Vol}(Q' \cap Q) 2}$$

であれば次式が成立する.

$$1 - \epsilon/2 \leq (\text{Vol}(Q') - S') / (\text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S)) \leq 1$$

証明 $\text{Vol}(Q' - Q) = \text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S)$ を考えると, オラクル A の定義より,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) (\text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S)) \\ \leq \text{Vol}(Q') - (1 + \gamma) \text{Vol}(S) \leq \text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S) \end{aligned}$$

を満たす γ の範囲を知りたい. まず後半より, $\gamma \geq 0$ を得る. また, 前半の不等式を変形して次式を得る.

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \frac{\text{Vol}(Q') - (1 - \frac{\epsilon}{2})(\text{Vol}(Q') - S)}{\text{Vol}(S)} - 1 \\ &= \left(\frac{\text{Vol}(Q')}{\text{Vol}(S)} - 1\right) \frac{\epsilon}{2} = \frac{\text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S) \epsilon}{\text{Vol}(S) 2}. \end{aligned}$$

□

まず明らかに $\text{Vol}(Q' \cap Q)$ の上界は $\text{Vol}(Q)$ であるので, 以後は $\text{Vol}(Q' - Q)$ の下界を示すことで γ の下界を示す. 最初に, $\text{Vol}(S)$ の上界を次の補題で示す.

補題 4 非負の実数 $a'_1, \dots, a'_n, u, v > 0$ が与えられたとすると, $\text{Vol}(S(a'; u, v))$ は a'_1, \dots, a'_n について単調非増加である.

証明 証明は次元 n に関する帰納法で行う. 一般性を失うことなく $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$ を仮定する.

基底段階として $n = 1$ の場合を考える. この場合は $S(a'; u, v)$ は 1 次元の線分であって, a'_1 について単調非増加であるのは明らかである. 次に帰納法の仮定として $k - 1$ 次元の多面体 $S((a'_1, \dots, a'_{k-1}); u, v)$ を考えて, $S((a'_1, \dots, a'_{k-1}); u, v)$ の体積は a'_1, \dots, a'_{k-1} について単調非増加であると仮定する. さて $n = k$ の場合, n 次元多面体 $S(a'; u, v)$ を超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = c\}$ で切り取った切り口を考える. するとこの切り口は $k - 1$ 次元の多面体であって, $S((a'_1, \dots, a'_{k-1}); u - |x_k|, v - |x_k - a'_k|)$ で表される. 帰納法の仮定よりこの切り口の面積 ($k - 1$ 次元の体積) は a'_1, \dots, a'_{k-1} について単調非増加である. さて $\text{Vol}(S(a'; u, v))$ はこの切り口の面積を x_k について積分することによって得られるため, 補題が示された. □

補題 4 により, $\text{Vol}(S(\mathbf{a}'; 1, b))$ は $S' = S((a'_1, 0, \dots, 0); 1, b)$ の体積によって上から抑えられている. 一般には $S(\mathbf{a}'; 1, b)$ は cross polytope ではないが, S' は cross polytope であることが示せる.

補題 5 $S' = S((a'_1, 0, \dots, 0); 1, b)$ は次式を満たす $x \in \mathbb{R}^n$ の集合である.

$$\sum_{i=2}^n |x_i| + \left| x_1 - \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\} \right| \leq \min \left\{ \frac{1+b-a'_1}{2}, b \right\} \quad (2)$$

証明 この補題は次が成立することを確認すれば証明できる.

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=2}^n |x_i| + |x_1 - a'_1| \leq b \Leftrightarrow (2)$$

(\Leftarrow) まず、(2) の左辺を考えると、

$$\sum_{i=2}^n |x_i| + \left| x_1 - \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\} \right| \geq \sum_{i=2}^n |x_i| + |x_1 - a'_1|$$

であるので (2) を満たせば $\sum_{i=2}^n |x_i| + |x_1 - a'_1| \leq b$ である. 次に, $x < \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\}$ の場合を考えると, $1 - |x_1| \geq b - |x_1 - a'_1|$ であるので, $\sum_{i=2}^n |x_i| + |x_1 - a'_1| \leq b$ が成立すれば $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$ も成立する. また $x_1 \geq \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\}$ の時も (2) を満たせば $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$ を満たすことが確認できる.

(\Rightarrow) $x_1 \geq \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\}$ かつ $1 - b \leq a'_1$ の場合を考えると $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$ であれば (2) が成立することが確認できる. また $x_1 \geq \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\}$ かつ $1 - b > a'_1$ の場合および, $x_1 < \min \left\{ \frac{1+a'_1-b}{2}, a'_1 \right\}$ の場合を考える. するとどちらの場合でも $\sum_{i=2}^n |x_i| + |x_1 - a'_1| \leq b$ であれば (2) が成立することが確認できる. \square

次に, $\text{Vol}(Q' - Q)$ の下界を示す.

補題 6 $a_1 \geq 2$ のとき,

$$\text{Vol}(Q' - Q) \geq \frac{\epsilon}{16n} \text{Vol}(Q).$$

証明 まず $a'_1 = \delta a_1$, $b = 1 - \delta$ であるので, 補題 4 と 5 より,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(Q' - Q) &\geq \text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S') \\ &= \left((1 - \delta)^n - \left(1 - \frac{1+a_1}{2} \delta \right)^n \right) \text{Vol}(Q) \\ &= \underbrace{\left(\left(\frac{1-\delta}{1 - \frac{1+a_1}{2} \delta} \right)^n - 1 \right)}_{(A)} \underbrace{\left(1 - \frac{1+a_1}{2} \delta \right)^n}_{(B)} \text{Vol}(Q). \end{aligned}$$

ここで $a_1 \geq 2$ かつ, a_1 は \mathbf{a} の最大成分であるので,

$$\begin{aligned} (A) &\geq \left(1 - \delta + \frac{1+a_1}{2} \delta \right)^n - 1 = \left(1 + \frac{a_1-1}{2} \delta \right)^n - 1 \\ &\geq 1 + \frac{a_1-1}{2} n \delta - 1 \geq \frac{a_1-1}{2} n \delta \\ &\geq \frac{n\epsilon}{4n \sum_{i=1}^n a_i} (a_1 - 1) \\ &\geq \frac{\epsilon}{4 \sum_{i=1}^n a_i} \frac{a_1}{2} \quad (\because a_1 \geq 2) \\ &\geq \frac{\epsilon}{8n} \quad (a_1 \text{ は } \mathbf{a} \text{ の最大成分}). \end{aligned}$$

さらに, 以下も言える.

$$\begin{aligned} (B) &\geq 1 - \frac{1+a_1}{2} n \delta \\ &\geq 1 - a_1 n \delta \quad (\because a_1 \text{ は正の整数}) \\ &\geq 1 - \epsilon/2 \quad (\because a_1 \text{ は } \mathbf{a} \text{ の最大成分}) \\ &\geq 1/2 \quad (\because \epsilon < 1). \end{aligned}$$

よって補題は示された. \square

さらに $a_1 = 1$ の場合として次の補題を示す.

補題 7 もし $a_1 = 1$ ならば

$$\text{Vol}(Q' - Q) \geq \frac{\epsilon}{128} \text{Vol}(Q). \quad (3)$$

証明 補題 4 と仮定 $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ により, $S((1, 1, 0, \dots, 0); 1, b)$ の体積は $S(\mathbf{a}; 1, b)$ の体積の下界である. ここで $S((1, 1, 0, \dots, 0); 1, b)$ は cross polytope ではないものの, $x_1 = c$ として x_1 を固定するとその断面は

$$\begin{aligned} S' &= \{(x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} | \\ &\quad (c, x_2, \dots, x_n) \in S((1, 1, 0, \dots, 0); 1, b)\} \end{aligned}$$

であって, $n-1$ 次元の cross polytope である. S' の定義により $x \in S'$ について次が成立する.

$$\sum_{i=2}^n |x_i| \leq 1 - |c| \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=3}^n |x_i| + |x_2 - \delta| \leq 1 - \delta - |c - \delta|.$$

これは次式と同値である.

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^n |x_i| + \left| x_2 - \min \left\{ \frac{|c-\delta| - |c|}{2} + \delta, \delta \right\} \right| \\ \leq 1 - \delta - \max \left\{ \frac{|c| + |c-\delta|}{2}, |c-\delta| \right\}. \end{aligned}$$

これは補題 5 と同様に示される. さてこの断面の面積を c について積分することで S' の体積が得られる. つまり

$$\text{Vol}(S') = \left(1 - \frac{3}{2} \delta \right)^{n-1} \left(1 + \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2} \right) \delta \right) \text{Vol}(Q).$$

すると

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(Q' - Q) &= \text{Vol}(Q') - \text{Vol}(S') \\
&= \left((1 - \delta)^n - \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^{n-1} \left(1 + \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2}\right)\delta\right) \right) \text{Vol}(Q) \\
&= \left(\left(\frac{1 - \delta}{1 - \frac{3}{2}\delta}\right)^n - \frac{1 + \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2}\right)\delta}{1 - \frac{3}{2}\delta} \right) \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^n \text{Vol}(Q) \\
&\geq \left(\left(1 - \delta + \frac{3}{2}\delta\right)^n - \frac{1 + \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2}\right)\delta}{1 - \frac{3}{2}\delta} \right) \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^n \text{Vol}(Q) \\
&\geq \left(1 + \frac{n}{2}\delta - \frac{1 + \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2}\right)\delta}{1 - \frac{3}{2}\delta}\right) \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^n \text{Vol}(Q) \\
&\geq \left(1 + \frac{n-3}{2}\delta - \frac{3n}{4}\delta^2 - 1 - \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2}\right)\delta\right) \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^{n-1} \text{Vol}(Q) \\
&\geq \left(\frac{n}{4}\delta - \frac{3n}{4}\delta^2\right) \left(1 - \frac{3}{2}\delta\right) \text{Vol}(Q) \\
&\geq \left(\frac{\epsilon}{16} - \frac{3\epsilon^2}{64n}\right) \left(1 - \frac{3}{8}\epsilon\right) \text{Vol}(Q) \quad (\because \delta = \frac{\epsilon}{4n}) \\
&\geq \frac{\epsilon}{128} \text{Vol}(Q) \quad (\because n \geq 1, 0 < \epsilon \leq 1).
\end{aligned}$$

以上により，補題が示された。□

補題 3, 6, 7 より直ちに次の系が言える。

系 1 アルゴリズム 1 で γ が次式を満たすとき，出力 V' は $\text{Vol}(P_a)$ の $1 - \epsilon$ 倍近似である。

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\epsilon^2}{256n}$$

4. Vol(S) の近似

以降では $S = S(a'; 1, b)$ の体積を近似比 $1 + \gamma$ で近似するオラクル A を実現する方法について述べる。

定理 2 $\text{Vol}(S(a'; 1, b))$ を $O(n^9/\gamma^4)$ 時間で $1 + \gamma$ 近似するアルゴリズムが存在する。

4.1 近似アルゴリズム

次の手順で $\text{Vol}(S)$ を近似するアルゴリズムのアイデアを説明する。まず， $\text{Vol}(S)$ を積分の形で記述する。そして， $\text{Vol}(S)$ を定積分の繰り返しで表現する方法を示す。最後にその定積分の繰り返しを階段近似する方法について述べる。

記述のために， $H(x)$ をステップ関数とする。つまり，

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0). \end{cases} \quad (4)$$

すると $\text{Vol}(S)$ は次の積分で書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(S) &= \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} H\left(1 - \sum_{i=1}^n |x_i|\right) H\left(b - \sum_{i=1}^n |x_i - a'_i|\right) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

この積分形式は，確率を用いた定積分の繰り返しで書き直せる。 $\mathbf{X} \in [-M, M]^n$ を一様な確率変数として， \mathbf{X} が

S に入っている確率を考える。すると，

$$\text{Vol}(S) = 2^n \Pr \left[\sum_{j=1}^n |X_j| \leq M \wedge \sum_{j=1}^n |X_j - a'_j| \leq bM \right]$$

である。ただし $M = 4n^2/\gamma$ はあとで述べるアルゴリズム 2 のパラメータである。そこで次のように $\Psi_i(a'; u, v)$ を定義する。

$$\Psi_i(a'; u, v) = \Pr \left[\sum_{j=1}^i |X_j| \leq u \wedge \sum_{j=1}^i |X_j - a'_j| \leq v \right]$$

すると $\text{Vol}(S) = \Psi_n(a'/M; M, bM)$ である。またステップ関数 $H(x)$ を用いると， $\Psi_0(a'; u, v) = H(uM)H(vM)$ と書ける。すると $\Psi_i(a'; u, v)$ は $\Psi_{i-1}(a'; u, v)$ を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\Psi_i(a'; u, v) &= \int_{\mathbb{R}} \Pr \left[\sum_{j=1}^{i-1} |X_j| \leq u - |x_i| \right. \\
&\quad \left. \wedge \sum_{j=1}^{i-1} |X_j - a'_j| \leq v - |x_i - a'_i| \right] f(x_i) dx_i \\
&= \int_{-M}^M \Psi_{i-1}(a'; u - |x_i|, v - |x_i - a'_i|) / (2M) dx_i
\end{aligned}$$

ただし， $f(x)$ は $[-M, M]$ 上の一様密度関数である。なおこの表現は S の体積を簡潔に表現する式ではあるが，この定積分の繰り返しを正確に計算することは $\#P$ -困難である。素朴にこの計算をすると， $\Psi_n(a'; u, v)$ の何次かの導関数に指数的に多くの不連続点を含むため， $\Psi_n(a'; u, v)$ の記述には指数的な記憶容量を必要とする。

さてここで $\Psi_i(a'; u, v)$ の階段近似 $G_i(a'; u, v)$ 階段近似を考える。まず $G_0(a'; u, v)$ は次式で与えられるものとする。

$$G_0(a'; u, v) = \Psi_0(a'; u, v) = H(u)H(v)$$

また，記述の簡単のために中間的な関数 $\bar{G}_i(a'; u, v)$ を考える。 $\bar{G}_i(a'; u, v)$ は次式で与えられる。

$$\bar{G}_i(a'; u, v) = \int_{-M}^M G_{i-1}(a'; u - |s|, v - |s - a'_i|) / (2M) ds. \quad (5)$$

この積分は単純に和として計算できる。このことは $G_i(a'; u, v)$ for $i = 1, \dots, n$ の定義が完了してから示す。さて， $G_i(a'; u, v)$ は $\bar{G}_i(a'; u, v)$ を階段近似して得る。具体的には次式で与えられる。

$$G_i(a'; u, v) = \begin{cases} \bar{G}_i(a'; \lceil u \rceil, \lceil v/b \rceil b) & (0 \leq u \leq M, 0 \leq v \leq bM) \\ \bar{G}_i(a'; \lceil u \rceil, bM) & (0 \leq u \leq M, v > bM) \\ \bar{G}_i(a'; M, \lceil v/b \rceil b) & (u > M, v \leq bM) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (6)$$

なお, $G_i(\mathbf{a}'; u, v)$ の計算は $(M+1)^2$ 個の格子点について $\bar{G}_i(\mathbf{a}'; u, v)$ の値を計算すれば完了する.

次に $\bar{G}_i(\mathbf{a}'; u, v)$ の積分式 (7) を和で計算できることを示す. まず, 二次元平面上の垂直な線の集合 g_x ($x = i$ で与えられる) と水平な線の集合 g_y ($y = bi$ で与えられる) ($i = 0, 1, 2, \dots$) を考える. そこで, $g_x \cup g_y$ と積分路の交点の列 t_1, \dots, t_m を考える. つまり, $i = 1, \dots, m$ について $t_i = \mathbf{t}(s_i) = (u - |s_i|, v - |s_i - a'_i|) \in g_x \cup g_y$ である. また, $i = 1, \dots, m-1$ について $s_i < s_{i+1}$ とする. すると $u - |s| \leq M$, $v - |s - a'_i| \leq bM$ なので, $0 \leq m \leq 4M$ である. ここで $T_i = \max\{G_{i-1}(\mathbf{a}'; t_i), G_{i-1}(\mathbf{a}'; t_{i-1})\}$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{G}_i(\mathbf{a}'; u, v) &= \int_{-M}^M G_{i-1}(\mathbf{a}'; u - |s|, v - |s - a'_i|) / (2M) ds \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{(s_i - s_{i-1})T_i}{2M}. \end{aligned} \quad (7)$$

ただし $t_0 = (u - | -M|, v - | -M - a'_i|)$ である.

アルゴリズム 2 は $G_n(\mathbf{a}'; M, bM)$ の値を出力する. 以下にアルゴリズム 2 を示す.

Algorithm2 入力: $\mathbf{a}' \in \mathbb{R}_+^n$, $b \in \mathbb{R}_+$;

1. $u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ のとき $G_0(\mathbf{a}'; u, v) := 1$, それ以外では $G_0(\mathbf{a}'; u, v) := 0$ とする;
2. For $i := 1, \dots, n$ do
3. 式 (7) で $G_{i-1}(\mathbf{a}'; u, v)$ から $\bar{G}_i(\mathbf{a}'; u, v)$ を計算;
4. 階段近似 (6) で $\bar{G}_i(\mathbf{a}'; u, v)$ から $G_i(\mathbf{a}'; u, v)$ を計算;
5. done;
6. $G_n(\mathbf{a}'; M, bM)$ を出力する.

ステップ 4 の階段近似を素朴な方法で計算すると考えれば, 次の観測が得られる.

観測 1 アルゴリズム 2 の実行時間は $O(nM^4)$ である.

4.2 定理 2 の証明

ここでは $M = 4n^2/\gamma$ とすることでアルゴリズム 2 で $\text{Vol}(S)$ の $1 + \gamma$ 近似を得るのに十分であることを示す. まず次の補題を示す.

補題 8 $\Psi_i(\mathbf{a}'; u, v)$ は u と v について単調非減少である. 証明 まず, $u \leq u', v \leq v'$ とする. すると定義より,

$$\begin{aligned} &\Psi_i(\mathbf{a}'; u, v) \\ &= \text{Vol} \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \sum_{j=1}^i |x_j| \leq u, \sum_{j=1}^i |x_j - a'_j| \leq v \right. \right\} \right) \\ &\leq \text{Vol} \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \sum_{j=1}^i |x_j| \leq u', \sum_{j=1}^i |x_j - a'_j| \leq v' \right. \right\} \right) \\ &\leq \Psi_i(\mathbf{a}'; u', v'). \end{aligned}$$

□

そして, 次の補題が示せる. この補題は近似 $G_n(\mathbf{a}'; u, v)$

の上界と下界を与える.

補題 9

$$\Psi_n(\mathbf{a}'; u, v) \leq G_n(\mathbf{a}'; u, v) \leq \Psi_n(\mathbf{a}'; u + n, v + bn).$$

証明 まず, $\Psi_n(\mathbf{a}'; u, v) \leq G_n(\mathbf{a}'; u, v)$ はアルゴリズムから明らかなので, 以降 $G_n(\mathbf{a}'; u, v) \leq \Psi_n(\mathbf{a}'; u + n, v + bn)$ を証明する. この証明は n に関する帰納法で行う.

まず $n = 0$ のとき, 任意の u, v について $G_0(\mathbf{a}'; u, v) = \Phi_0(\mathbf{a}'; u, v)$ であるので基底段階は成立する. 次に, 帰納法の仮定として

$$G_i(\mathbf{a}'; u, v) \leq \Psi_i(\mathbf{a}'; u + i, v + bi)$$

とする. すると $G_i(\mathbf{a}'; u, v)$ と $\bar{G}_{i+1}(\mathbf{a}'; u, v)$ の定義より,

$$\begin{aligned} G_{i+1}(\mathbf{a}'; u, v) &\leq \bar{G}_{i+1}(\mathbf{a}'; u + 1, v + b) \\ &= \int_{-M}^M G_i(\mathbf{a}'; u + |s| + 1, v + |s - a'_i| + b) / (2M) ds \\ &\leq \int_{-M}^M \Psi_i(\mathbf{a}'; u + |s| + i + 1, v + |s - a'_i| + b(i + 1)) / (2M) ds \\ &= \Psi_{i+1}(\mathbf{a}'; u + i + 1, v + b(i + 1)). \end{aligned}$$

よって補題が示された. □

以上の議論から, 定理 2 を証明する.

定理 2 の証明:

補題 9 より, 近似比は $\Psi_n(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v + \ell_2) / \Psi_n(\mathbf{a}'; u, v)$ で上から抑えられる. ただし, $\ell_1 \leq nM$, $\ell_2 \leq bnM$ である. 以下ではこの逆数を下から抑えることで近似比を示す.

次の多面体を考える.

$$K(\mathbf{a}'; u, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \partial Q \cap Q', \exists c \in [0, 1], x = cy\}.$$

ただし $\partial Q = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |y_i| = u\}$, $Q' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |y_i - a'_i| \leq v\}$ である. 図 2 に $K(\mathbf{a}'; u, v)$, $S(\mathbf{a}'; u, v) \cap K(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v)$, $K(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v)$ の例を示す. すると, 次式が言える.

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_n(\mathbf{a}'; u, v)}{\Psi_n(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v)} &\geq \frac{\text{Vol}(K(\mathbf{a}'; u, v))}{\text{Vol}(S(\mathbf{a}'; u, v) \cap K(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v))} \\ &\geq \frac{\text{Vol}(K(\mathbf{a}'; u, v))}{\text{Vol}(K(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v))} \geq \frac{1}{(1 + \ell_1/u)^n}. \end{aligned}$$

また, 次の多面体を考える.

$$K'(\mathbf{a}'; u, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in Q \cap \partial Q', \exists c \in [0, 1], x = cy\}$$

ただし, $Q = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |y_i| \leq u\}$, $\partial Q' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |y_i - a'_i| = v\}$ である. すると, 同様にして次が言える.

$$\frac{\Psi_n(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v)}{\Psi_n(\mathbf{a}'; u + \ell_1, v + \ell_2)} \geq \frac{1}{(1 + \ell_2/v)^n}.$$

上述の議論により, 次式が成り立つ.

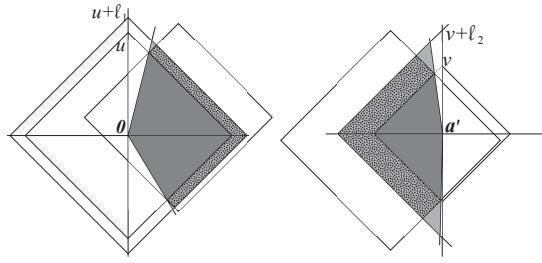


図 2 $K(a'; u, v)$ (左, 濃いグレー領域), $S(a'; u + l_1, v) \cap K(a'; u + l_1, v)$ (左, 点で埋められた領域), $K'(a'; u + l_1, v)$ (左, 薄いグレーを含め塗られた領域全体), $K'(a'; u, v)$ (右, 濃いグレー領域), $S(a'; u, v + l_2) \cap K'(a'; u, v + l_2)$ (右, 点で埋められた領域), and $K'(a'; u, v + l_2)$ (右, 薄いグレーを含め塗られた領域全体)

$$\frac{\Psi_i(a'; M, bM)}{\Psi_i(a'; M + l_1, bM + l_2)} \geq \frac{1}{(1 + l_1/M)^n (1 + l_2/(bM))^n} \geq 1 - nl_1/M - nl_2/(bM).$$

以上により $\gamma \leq 1$ について次式が成立する .

$$\frac{\Psi_n(a'; u + l_1, v + l_2)}{\Psi_n(a'; u, v)} \leq \frac{1}{1 - nl_1/M - nl_2/(bM)} \leq 1 + \gamma.$$

□

5. 結論

本稿では, n 次元幾何双対ナップサック多面体の体積に対する FPTAS を示した . 幾何双対であることと体積の計算にの関連は知られていなかったが, 今回, ナップサック多面体と幾何双対ナップサック多面体で一部共通する手法の近似スキームが存在することが示された . また, 今回は実行時間を短縮するための工夫を行っていないため, 改善の余地が残されている . そのほか, 今後の課題として, a が整数に限らず有理数の成分を持つベクトルである場合も, $\text{Vol}(P_a)$ を近似する FPTAS を持つことが示せると考えられる .

参考文献

- [1] E. Ando and S. Kijima, An FPTAS for the Volume Computation of 0-1 Knapsack Polytopes Based on Approximate Convolution, *Algorithmica*, DOI 10.1007/s00453-015-0096-5
- [2] A. Bandyopadhyay and D. Gamarnik, Counting without sampling: asymptotics of the log-partition function for certain statistical physics models, *Random Structures and Algorithms*, 33, 452–479, 2008.
- [3] I. Bárány, Z. Füredi, computing the volume is difficult, *Discrete Computational Geometry*, 2, 319–326, 1987.
- [4] M. Bayati, D. Gamarnik, D. Katz, C. Nair, P. Tetali, Simple deterministic approximation algorithms for counting matchings, *Proc. of STOC 2007*, 122–127, 2007.
- [5] Cousins, B., Vempala, S., Bypassing, K.L.S.: Gaussian Cooling and an $O^*(n^3)$ Volume Algorithm, *Proc. of STOC 2015*, pp. 539–548, 2015.
- [6] M. Dyer, Approximate counting by dynamic programming, *Proc. of STOC 2003*, 693–699, 2003.
- [7] M. Dyer and A. Frieze, On the complexity of computing the volume of a polyhedron, *SIAM Journal on Computing*, 17(5), 967–974, 1988.
- [8] M. Dyer, A. Frieze, R. Kannan, A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 38(1), 1–17, 1991.
- [9] M. Dyer, P. Gritzmann, A. Hufnagel, On the complexity of computing mixed volumes, *SIAM Journal of Computing*, Vol. 27, No. 2, pp. 356–400, 1998.
- [10] G. Elekes, A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Computational Geometry*, 1, 289–292, 1986.
- [11] D. Gamarnik, D. Katz, Correlation decay and deterministic FPTAS for counting list-colorings of a graph, *Proc. of SODA 2007*, 1245–1254, 2007.
- [12] P. Gopalan, A. Klivans, and R. Meka, Polynomial-time approximation schemes for knapsack and related counting problems using branching programs, arXiv:1008.3187v1, 2010.
- [13] P. Gopalan, A. Klivans, R. Meka, D. Štefankovič, S. Vempala, E. Vigoda, An FPTAS for #knapsack and related counting problems, *Proc. of FOCS 2011*, 817–826, 2011.
- [14] P. Gritzmann, V. Klee, On the complexity of some basic problems in computational geometry: II. Volume and mixed volumes, in *POLYTOPES: Abstract, Convex and Computational*, T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider and A. Ivic Weiss (Eds), NATO ASI Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 440, 1993.
- [15] L. Khachiyan, The problem of computing the volume of polytopes is #P-hard, *Uspekhi Mat. Nauk.* 44 (1989), pp. 199-200.
- [16] L. Khachiyan, Complexity of polytope volume computation; In *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, (ed by J. Pach), Springer, Berlin, 1993, pp.91-101.
- [17] L. Li, P. Lu, Y. Yin, Approximate counting via correlation decay in spin systems, *Proc. of SODA 2012*, 922–940, 2012.
- [18] L. Li, P. Lu, Y. Yin, Correlation decay up to uniqueness in spin systems, *Proc. of SODA 2013*, 67–84, 2013.
- [19] J. Li, T. Shi, A fully polynomial-time approximation scheme for approximating a sum of random variables, *Operations Research Letters*, 42, 197–202, 2014.
- [20] C. Lin, J. Liu, P. Lu, A simple FPTAS for counting edge covers, *Proc. of SODA 2014*, 341–348, 2014.
- [21] L. Lovász, *An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs and Convexity*, SIAM Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 1986.
- [22] L. Lovász, S. Vempala, Simulated annealing in convex bodies and an $O^*(n^4)$ volume algorithm, *Journal of Computer and System Sciences*, 72, 392–417, 2006.
- [23] D. Štefankovič, S. Vempala, E. Vigoda, A deterministic polynomial-time approximation scheme for counting knapsack solutions, *SIAM Journal on Computing*, 41(2), 356–366, 2012.
- [24] D. Weitz, Counting independent sets up to the tree threshold, *Proc. STOC 2006*, 140–149, 2006.