

シュワルツ交代法を用いた代用電荷法†

野中善政** 村島定行*** 四ツ谷晶二****

代用電荷法は厚みのない外部領域のディリクレ問題には誤差が大きくなり適用できなかった。しかし、シュワルツの交代法を応用すれば、境界上の誤差から内部領域の誤差を求められるという代用電荷法の特徴が失われることなく上記の問題にも適用できる。また、この方法は最大値原理が適用できる他の線形楕円型問題にも応用できる。

1. ま え が き

シュワルツの交代法はラプラス方程式に対するディリクレ問題を一般的な領域について解く方法の一つである。この方法によれば、より狭い解のクラスからより広い解のクラスを構成でき、単に解の存在証明の方法に止まらずラプラス方程式や他の楕円型方程式の数値解法に効果的に応用しうる可能性をもっている。たとえばラプラス方程式の差分法において、L字形領域を二つの長方形に分解し、個々の長方形についてADI法を適用すれば交代法と組み合わせることで効率的な数値解法を構成できる¹⁾。また円形や長方形領域のディリクレ問題に対しては級数解が知られているが、交代法によってこれらを組み合わせればより複雑な領域の近似級数解が得られる²⁾。

シュワルツ交代法と代用電荷法の組み合わせは次の利点を有する。

(1) 差分法や級数解法に比較して、曲線で囲まれた一般的な領域に適用可能である。

(2) 代用電荷法は等角写像などを適用できる場合を除いて厚みのない領域の外部問題に適用できなかったが、シュワルツ交代法を応用すれば可能となる。

(3) ディリクレ問題において数値解の誤差を最大値ノルムで評価できる。

以下の章では、シュワルツ交代法の原理、最大誤差の評価式、代用電荷法の応用について説明し、二、三の数値例を示す。

2. シュワルツ交代法の原理³⁾

ラプラス方程式のディリクレ問題

$$\Delta u = 0 \text{ in } B, u = f \text{ on } A \quad (1)$$

の領域 B が領域 G, G' の合併領域で表されるとして(図1)、その共通領域を D とする。 G の境界 Γ は部分 a, b からなり、 b は G' 内にあるものとする。また領域 G' の境界 Γ' の部分 a', b' についても同様に定義する。 B の境界 $A = a + a'$ 上である定数 M を上限とする有界な境界値が与えられているものとする。さらに、 Γ, Γ' 上で与えられた連続な境界値に対してディリクレ問題が解けることが分かっているものとする。この場合、合併領域 B に対するディリクレ問題を求める交代法の手順は次のようになる。

(1) b 上の境界値を任意に与える。ただし、絶対値は M 以下であるとし、交点 A, A_1 で連続になるようにする。

(2) 境界 Γ 上で与えられた境界値について、領域 G の解を求める。これを u_1 と置く。

(3) 解 u_1 の b' 上での値と a' 上で与えられた境界値は領域 G' 、境界 Γ' についてのディリクレ問題を定める。この解を u_1' と置く。

(4) 関数 u_1' の b 上での値と a 上で与えられた境界値に対する G についての解を求め u_2 と置く。

これらの関数列 u_n, u_n' はそれぞれ G, G' において一様にポテンシャル関数 u, u' に収束し、 u, u' は領域 D で一致する。この証明は次のような定理に基づく³⁾。

G に対する上記の仮定のもとで、関数 v は G において、 a 上でゼロ、 b 上で不等式

$$0 \leq |v| \leq 1$$

を満たす正則調和関数であるとする。そのとき G の幾何学的形状のみに関係する正定数 $q < 1$ が存在し、 b' 上のすべての点で不等式

† The Charge Simulation Method with Schwarz's Alternating Procedure by YOSHIMASA NONAKA (Department of Earth Science, Faculty of Education, Miyazaki University), SADAYUKI MURASHIMA (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Kagoshima University) and SHOJI YOTSUTANI (Department of Applied Science, Faculty of Engineering, Miyazaki University).

** 宮崎大学教育学部地学教室

*** 鹿児島大学工学部電子工学科

**** 宮崎大学工学部応用理学教室

$|v| \leq q$
が成立する. G' についても同様なことが成立する.

この正定数 q は交代法の収束の速さを決定する.

3. 代用電荷法の応用と誤差評価式

代用電荷法は, ラプラス方程式の境界値問題において, 境界曲線が滑らかで境界値の変動が小さいとき相当に高い精度で近似解が得られることで知られている. また境界要素法のように, 境界曲線を折れ線状に近似する必要がなく, 境界を含めて調和な近似解を得るので, 境界上のデータ比較によって実用的に最大誤差を求められるという利点ももっている⁴⁾. 反面, 尖った境界や厚みのない領域の外部問題ではあまり威力を発揮できなかったが, シュワルツ交代法との組み合わせにより, この難点が多少緩和される⁵⁾.

合併領域 B の境界値問題を解くために, 上記のシュワルツ交代法の各段階でのディリクレ問題の近似解法に代用電荷法を用い, ソース点, 拘束点 (輪郭点) を図1のように配置する.

ここで, 領域 G についての近似解 \tilde{u} を

$$\tilde{u}(P) = \sum_{i=1}^n Q_i / 2\pi \log |P - P_i| \quad (2)$$

の形で求めるものとする. G' についても同様である. ただし, n はソースの数, P_i はソースの位置である. また二次元問題を仮定し, グリーン関数は対数関数としている. シュワルツ交代法と同様な手順によって未知数 Q_i, Q_i' を決定し, B に対する近似解 \tilde{u}, \tilde{u}' を得る. このとき, 反復計算における連立方程式の係数行列はつねに同一であるので, 係数行列についての前進消去は G, G' について一度だけで済む.

誤差評価について述べる. 通常のディリクレ問題で

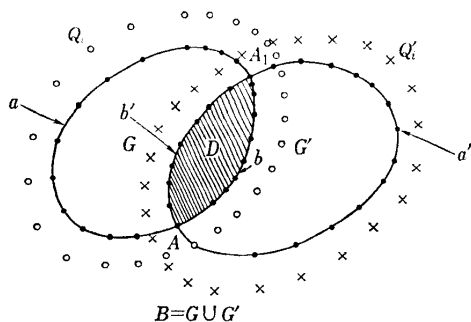


図1 領域 G, G' に対するシュワルツ交代法および代用電荷法の適用
Fig. 1 The charge simulation method and the Schwarz alternating procedure.

は与えられた境界での誤差を知れば内部の誤差を評価できる. しかしながら, この問題では仮想境界 b, b' を導入したためその上での誤差の影響も考慮しなければならない. 具体的には, 領域 G については次のような誤差評価式が成立する (証明は付録をみよ).

$$\sup_G |\tilde{u} - u| \leq \epsilon / (1 - r) + \delta. \quad (3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \max(\sup_b |\tilde{u} - \tilde{u}'|, \sup_{b'} |\tilde{u} - \tilde{u}'|), \\ \delta &= \max(\sup_a |u - \tilde{u}|, \sup_{a'} |u - \tilde{u}'|), \\ r &= \max(q, q') \end{aligned}$$

である. すなわち, 与えられた境界上での誤差 δ および共通部分での重なり具合 ϵ から真の解との誤差を評価できる. 領域 G' についても対応する形で同様な式が成立する. ここで, q, q' は G, G' の幾何学的形状のみに関係する正定数で, 補助定理で述べたものである. 問題は G, G' の形状から q, q' をどのように決定するかであるが, これも代用電荷法を用いて, 近似的にはあるが, 高精度で計算することができる.

近似解の誤差の正確な上限を得るためには次のようにする. 代用電荷法で得る近似解の境界上の誤差は一般に拘束点 (輪郭点) で0となり, その中間で一つの極値をとる⁴⁾. ただし, 境界値 $f(s)$ の変化に比べて十分密に輪郭点が採られているものとする. ここで変数 s は境界上のある点を起点とする境界曲線の長さである. したがって, 最大誤差を評価するときはまず比較的粗く検査点をとって大体の傾向をグラフで表現し, 最大誤差の区間を推定してから二分法等の反復法を適用すればよい. すなわち, $\epsilon(s) = u(s) - f(s)$ として,

$$\begin{aligned} \epsilon'(s) &= \tilde{u}_x x'(s) + \tilde{u}_y y'(s) - f'(s) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

なる s を求め, その点での最大誤差が評価できる.

4. 正定数 q の計算法

論題の本筋ではないが, ここで正定数 q の求め方について述べる. ラプラス方程式の最大値原理に注意すれば, 上述の定理に出てきた正定数 q は, 次のディリクレ問題 (図2)

$$\begin{cases} \Delta \alpha = 0 & \text{in } G, \\ \alpha = 1 & \text{on } b, \alpha = 0 & \text{on } a \end{cases} \quad (5)$$

の解 α の b' 上の最大値 ($q = \sup_{b'} |\alpha|$) である. 以下, 二次元と三次元の場合に分けて考える.

4.1 二次元問題

(1) 境界 Γ の接線方向が A, A_1 で連続な場合
境界値が不連続であるので, 単純に代用電荷法を適

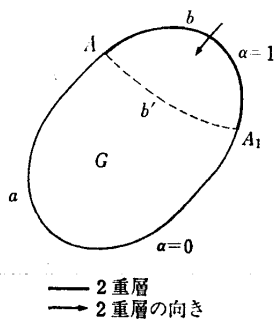


図 2 正定数 q を求めるための境界値問題
 太線は二重層, 矢印はその向き, A, A_1 は二重層の端, 点線は仮想境界を示す.
 Fig. 2 The boundary value problem to estimate a positive constant q .

用したのでは満足な結果が得られない。そこで、求める α を連続な部分と不連続な部分に分解し、不連続な部分については二重層ポテンシャルを利用し、一方連続な部分を代用電荷法によって計算する。

b 上に二重層（二重層ポテンシャルは直線 AA_1 を見込む角度である）を配置すると、点 A, A_1 でポテンシャルは π だけ不連続になる。この二重層ポテンシャルを w としよう。 a 上で境界値がゼロ、 b 上で境界値が $\bar{\rho} = \pi$ となるような調和関数 ρ を考える。

$$\alpha(P) = \rho(P)/\pi$$

が求めるべき問題の解である。これは $\alpha = \rho/\pi = (w - (\omega - \rho))/\pi$ と変形できる。したがって、境界 $\Gamma = a + b$ 上で境界値が $w - \bar{\rho}$ となる調和関数 Q を求めることができれば、これから求める解 $\alpha(P)$ は

$$\alpha(P) = (w(P) - Q(P))/\pi \quad (6)$$

となる（境界値 $w - \bar{\rho}$ は連続である）。

(2) 境界 Γ, Γ' の交点でその接線方向が不連続になる場合

b 上に二重層を置くと交点 A, A_1 での不連続分が異なり、(1)の方法がそのまま適用できない。そこで不連続分の差を解消するため次の方法を探る。

点 A に端のある半直線の二重層を置き（図 3）、その面密度を σ とすると点 A, A_1 での不連続はそれぞれ

$$\text{点 } A \text{ での不連続} = \pi - \beta + \sigma(\pi - \beta),$$

$$\text{点 } A_1 \text{ での不連続} = \pi - \beta_1$$

であるので、点 A, A_1 での不連続分が等しくなるように σ を決めると、 $\sigma = (\beta - \beta_1)/(\pi - \beta)$ となる。以下 (1)と同じ方法で $\bar{\rho} = 0$ (on a), $\bar{\rho} = \pi - \beta_1$ (on b) となる調和関数 ρ を導入し、 $\alpha(P) = \rho(P)/(\pi - \beta_1)$ として解を求めることができる。ただし、二重層の配置に

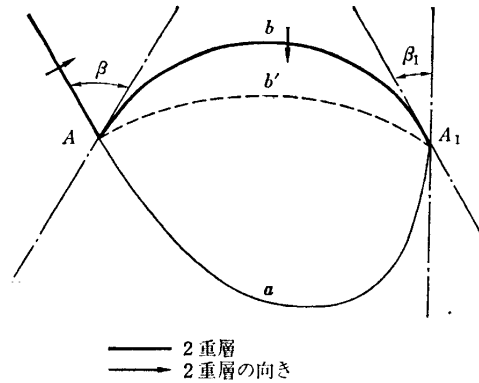


図 3 交点 A, A_1 で境界が折れ曲がっている場合の二重層の配置
 Fig. 3 Arrangement of double-layer sources in the case that the direction of tangent is discontinuous at the points of intersection.

は他にもいろいろ考えられる。二重層を用いる代用電荷法はこれまでの方法を不連続な境界値のディリクレ問題に対して自然に拡張したものになっている。ここで述べた方法は一般に不連続な境界条件をもったディリクレ問題の解法に用いることができる。

4.2 三次元軸対称問題

二次元問題では、曲線上に分布する二重層のある点におけるポテンシャルはその点において両端を結ぶ直線を見込む角度であり、FORTRAN, BASIC 等における標準関数を用いて計算できるが、軸対称問題では楕円積分もしくはベッセル関数の積分を必要とする。軸対称場で曲面に分布する二重層のポテンシャルは曲面と同一の縁をもつ円板を見込む立体角であり、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} w(r, z) = & 2\pi - \frac{2z}{\sqrt{(a-r)^2 + z^2}} \frac{\left(\sqrt{r^2 + z^2} + a\right)}{\sqrt{r^2 + z^2} + r} \\ & \times \Pi(\pi/2; c_1, k) \\ & - \frac{2z}{\sqrt{(a-r)^2 + z^2}} \frac{\left(\sqrt{r^2 + z^2} - a\right)}{\sqrt{r^2 + z^2} - r} \\ & \times \Pi(\pi/2; c_2, k). \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 Π は次式で定義される第 3 種楕円積分（母数 k は純虚数）である。

$$\begin{aligned} \Pi(\phi; c, k) &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 + c \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ k &= 2i \sqrt{\frac{ar}{(a-r)^2 + z^2}}, \\ c_1 &= \frac{-2r}{\sqrt{r^2 + z^2} + r}, \quad c_2 = \frac{2r}{\sqrt{r^2 + z^2} - r}. \end{aligned}$$

あるいは

$$w(r, z) = 2\pi a \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) d\lambda, \quad (8)$$

a : 円板の半径, r, z : 円筒座標.

(8)式は軸対称場の境界値問題から得られる. $z \rightarrow 0$ のとき積分(7), (8)についての数値計算が不可能になるので, $z \rightarrow 0$ に対する $w(r, z)$ の極限值は解析的にあらかじめ求めておく必要があるが

$$z \rightarrow 0 \text{ のとき } w(r, z) \rightarrow 2\theta \quad (9)$$

となる. ここで θ は点 (r, z) において長さ $2a$ の直径を見込む角度である. 実際の計算では積分(8)は $z \rightarrow 0$ に従って収束がきわめて悪くなるので積分(7)を用いた. その際, 第三種楕円積分の計算はランデン, ガウス変換を基礎としたアルゴリズムを用いた^{6),7)}.

5. グリーン, ガウスの公式と静電容量

代用電荷法解が $G + \Gamma$ で調和であるという性質を利用してグリーンの公式から静電容量を計算でき, またその誤差の範囲を求めることができる. ここで次の問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } G, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma, \quad u = 1 \text{ on } \gamma \end{cases} \quad (10)$$

を考え(図4), その近似解を \tilde{u} とする. 領域 G , 境界 Γ, γ およびその法線方向 n は図4で示す. 真の解 u の法線微分は次の性質

$$\frac{\partial u}{\partial n} > 0 \text{ on } \Gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} < 0 \text{ on } \gamma$$

を満たす. 境界上における近似解と解析解の誤差 ε は十分小さいものとする. すなわち,

$$\|\varepsilon\|_r, \|\varepsilon\|_r \leq 1, \quad (\|\varepsilon\|_r = \sup_r |\varepsilon|)$$

とするとグリーンの公式から

$$\int_{\Gamma+\gamma} \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Gamma+\gamma} u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (11)$$

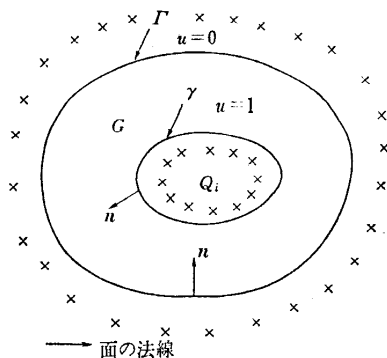


図4 ガウスの定理と静電容量の計算

Fig. 4 Computation of electrostatic capacity by Gauss's theorem.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int_{\gamma} \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\sigma \\ &= - \sum_{\text{inside}} Q_i \end{aligned}$$

となり, 静電容量 C は

$$\frac{\sum_{\text{inside}} Q_i}{1 + \|\varepsilon\|_r + \|\varepsilon\|_r} \leq C \leq \frac{\sum_{\text{inside}} Q_i}{1 - \|\varepsilon\|_r - \|\varepsilon\|_r} \quad (12)$$

なる関係を満たしている. ただし, 静電容量 C は

$$C \equiv \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = - \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \quad (13)$$

で定義するものとする.

ところで, 後述の例題 6.1(1)のように, シュワルツ交代法を適用して静電容量 C を求めようとするときはガウスの定理

$$C = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \sum_{\text{inside}} Q_i \quad (14)$$

をそのまま用いることができない. この代わりに

$$C = \sum_i \omega_i Q_i / 2\pi \quad (15)$$

を用いばよい. ここで, ω_i はソース点 i から弧 c を見込む角度であり, ソース点が c の法線方向にあるときは正, 反対側にあるときは負の符号をとるものとする.

6. 問題と数値例

ここでは特に二次元および三次元軸対称の静電場の問題への応用例を示す. 使用する記号は図1に従って二つの領域を G, G' それらの合併領域を B とし, G, G' の境界をそれぞれ Γ, Γ', B の境界を A とする. また以下の計算は倍精度で実施した.

6.1 二次元問題

(1) ストリップ電極

記号の定義に従って, $\Gamma = a + b + c, \Gamma' = a' + b' + c', A = a + a' + c + c'$ とする. ここで, a, a', b, b', c, c' は図5 (問題の対称性により, 全領域の1/4を示す)の境界曲線を表しているものとする. 境界 a は2点 $(2, 0), (0, \sqrt{3})$ を通る楕円, 仮想境界 b は2点 $(1, 0), (2, 0)$ を通る円弧である. 特に, c, c' はストリップの両側を示すものとする. 問題は次のようになる.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } B, \\ u = 1 \text{ on } c + c', \quad u = 0 \text{ on } a + a' \end{cases} \quad (16)$$

この場合解析解はジュウコフスキー変換を用いて

$$u(x, y) = - \frac{\log \rho}{\log(2 + \sqrt{3})} + 1 \quad (17)$$

となる. ただし,

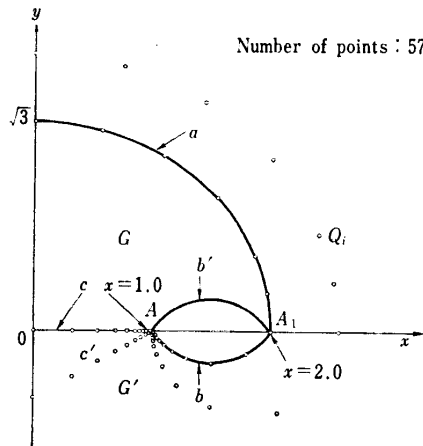


図5 ストリップ電極問題とソース配置
Fig. 5 The strip electrode problem and the arrangement of source points.

$$\rho = \left[\frac{s + \sqrt{s^2 - 4}}{2} \right]^{1/2}$$

$$s = 2 \{ (x^2 + y^2) + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1} \}$$

である。正定数 q を計算するため、二重層を図6のように配置する。ソース点、拘束点は図5のように配置しているが、特異点付近の配置法は河野、宅間⁹⁾に従った。

結果

ソース点数 $n=57$,

正定数 $q=0.5226$,

評価式(3)から求められるポテンシャルの最大誤差 : 0.05905,

解析解(17)との比較によるポテンシャルの最大誤差 : 0.01964,

静電容量 : 4.759 (4.771),

ここで () 内の数値は解析解である。

図7は解の誤差曲線であり、特異点付近の狭い範囲

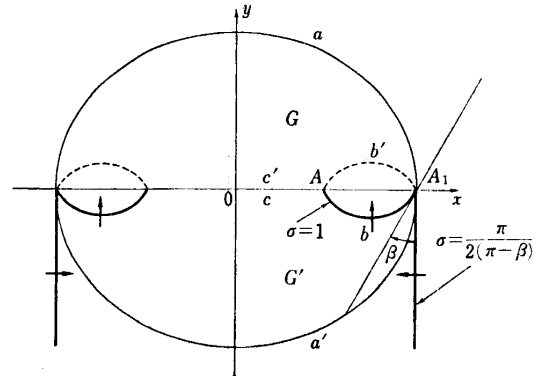


図6 ストリップ電極問題における二重層の配置
 σ は二重層の密度である。
Fig. 6 Arrangement of double-layer sources in the problem shown in Fig. 5.

で誤差が大きくなっていることを示す。ここで用いたソース点の配置法によれば、桁落ちの問題がない限り、その増加とともに誤差の大きい区間が狭まり、平均的な誤差は目立って減少する。しかし、最大誤差自体はそれほど減少しない。図8(a)は不連続境界値問題(第4章)の解の等値線である。また図8(b)は曲線 b' に沿った前述の問題の解の変化を表し、この最大値が正定数 q である。

(2) 平行平板電極

問題(1)とは外部問題になる点で異なるが、誤差評価式等は準用する。また、二重層の配置は図9(a), (b)のようにする。

(3) プラズマ中の平行平板電極

領域 G, G' が(2)と同様であるヘルムホルツ型の方程式に応用する。問題は

$$\begin{cases} \Delta u - u = 0 \text{ in } B, \\ u = 1 \text{ on } a + a', u = 0 \text{ on } c + c' \end{cases} \quad (18)$$

で与えられる。方程式の基本解は0次の第二種変形ベ

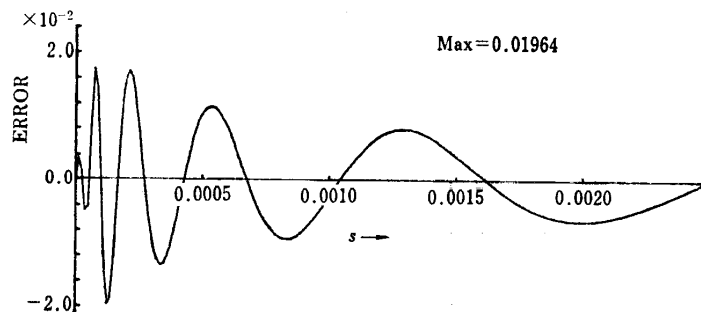


図7 仮想境界 b' 上における近似解の誤差 (解析解との差)
横軸 s は A を起点としたときの距離であり、 b' の全長を1に規格化している。

Fig. 7 Error distributions in the vicinity of the point of intersection A.

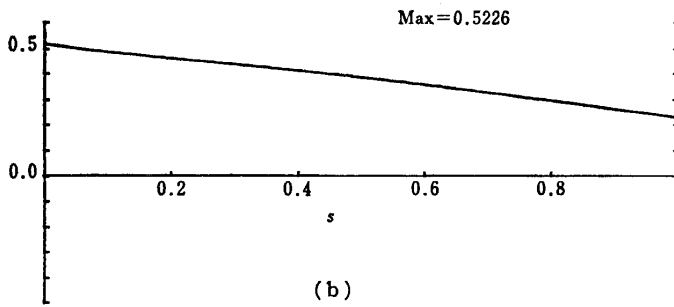
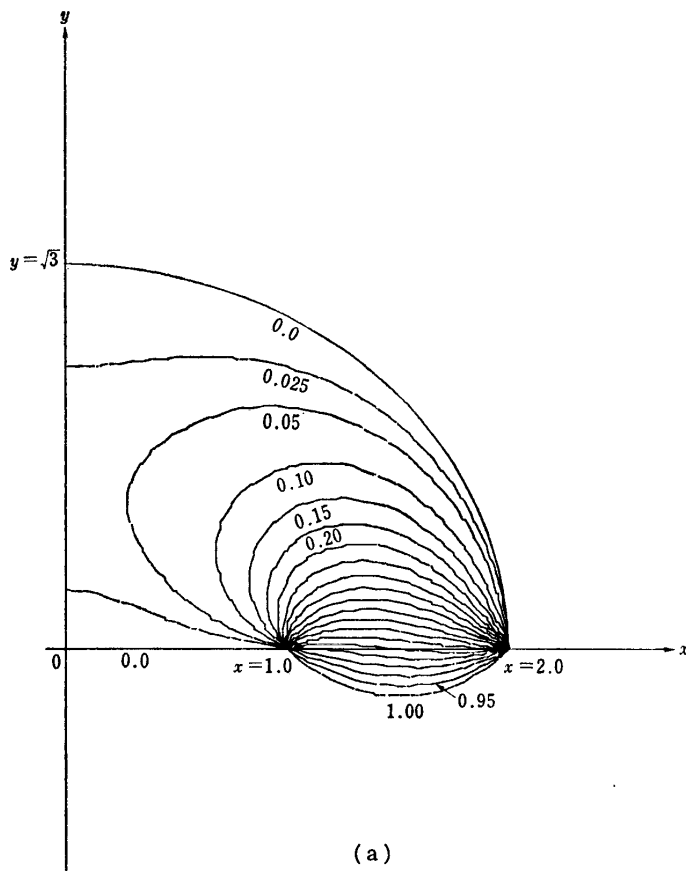


図 8 (a)不連続境界値問題の解 α の等値線と (b)仮想境界 b' に沿った α の変化 (横軸の意味は図7と同じ)

Fig. 8 (a) Isopleths of the solution for the discontinuous boundary value problem to estimate the positive constant q , and (b) its variation along the curve b' .

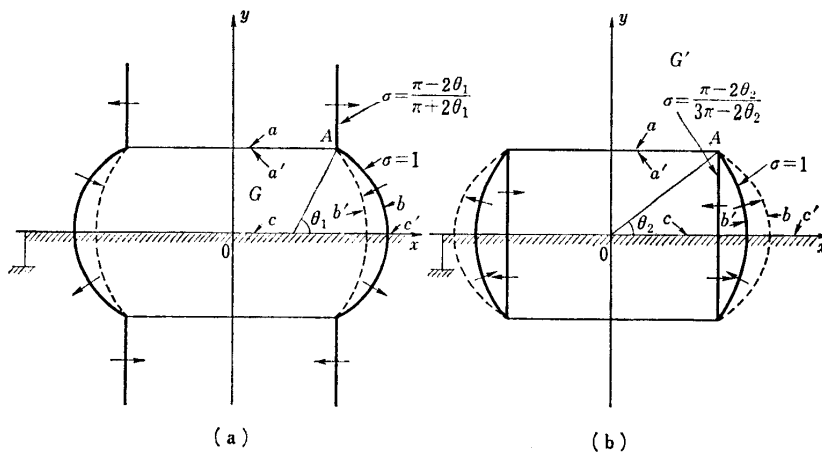


図 9 平行平板コンデンサ問題の二重層の配置

(a)外部問題と(b)内部問題
Fig. 9 Arrangement of double-layer sources in the plane-parallel condenser problem.

ッセル関数 $K_0(r)$ である。誤差評価をより正確にするためには(5)式に対応する問題を解く必要があるが、次の定理によりラプラス方程式についての誤差評価式で代用できる。

$$\begin{aligned}
 &u, v \text{ は } G \text{ で二回連続微分可能, } u-v \text{ は} \\
 &G+\Gamma \text{ で連続であるとする.} \\
 &\Delta u - u = 0 \text{ in } G, \\
 &\Delta v = 0 \text{ in } G, \tag{19} \\
 &0 \leq u = v \text{ on } \Gamma \\
 &\text{ならば} \\
 &0 \leq u \leq v \text{ on } G+\Gamma.
 \end{aligned}$$

6.2 軸対称問題

問題は次のように与えられる。

$$\begin{cases}
 \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ in } B, \\
 u = 1 \text{ on } a+a', \\
 r, z \rightarrow \infty \text{ のとき } u \rightarrow 0.
 \end{cases} \tag{20}$$

ただし、 $\Gamma = a+b$, $\Gamma' = a'+b'$, $B = G+G'$ は図10のように定める。グリーン関数は

$$\begin{aligned}
 \phi(r, z; R, Z) \\
 = (Q/2\pi^2) \cdot K(k) / \sqrt{(r+R)^2 + (z-Z)^2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

で表される⁸⁾。ただし、 $K(k)$ は第一種完全楕円積分、 Q は全電荷量である。正定数 q, q' の計算ではそれぞれ内部問題、外部問題に分けて b, b' 上に二重層を置く。境界の交点でそれぞれの接線が有限の角度で交差するが軸対称であ

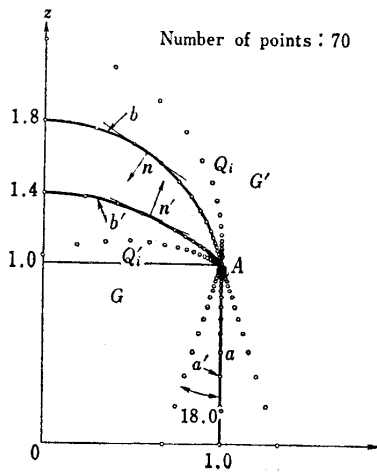
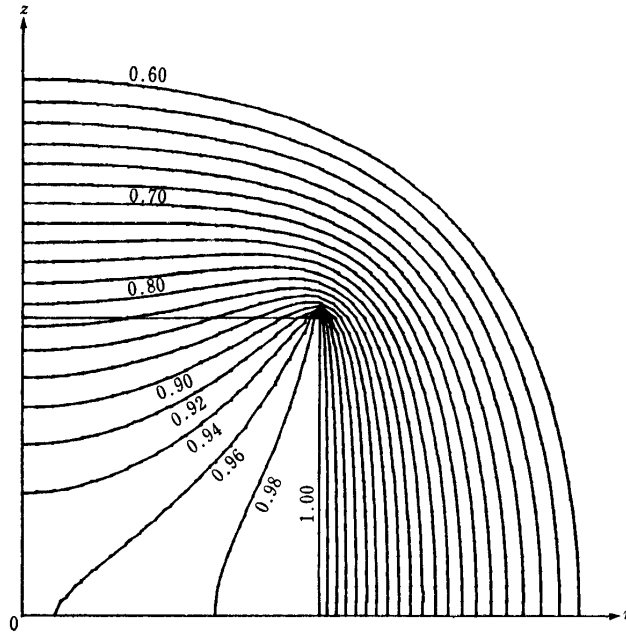


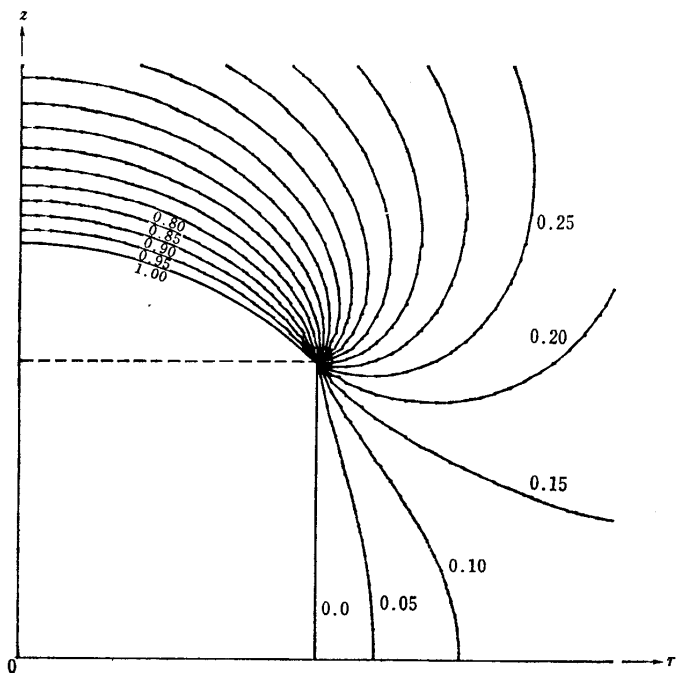
図10 中空円筒電極問題とソース配置
Fig. 10 The circular cylindrical pipe problem and the arrangement of source points.

るので二重層ポテンシャルの不連続分の差は生じない。

静電容量は次式



(a)



(b)

図11 (a)等ポテンシャル線と、(b)不連続境界値問題の解の等値線

Fig. 11 (a) Equipotential lines in the circular cylindrical pipe, and (b) isopleths of the solution for the discontinuous boundary value problem to estimate the positive constant q .

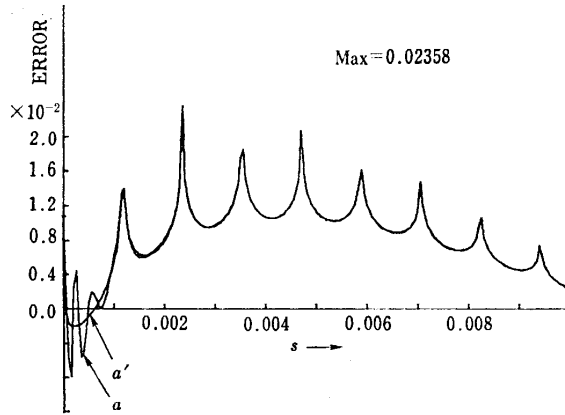


図 12 境界面 a, a' 付近における代用電荷法解と境界要素法解の差

図の起点は図 10 の点 A に対応する。

Fig. 12 The difference of BEM and CSM solutions in the vicinity of the boundary surfaces, a and a' .

$$\begin{aligned}
 C &= -4\pi \left\{ \int_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} r ds + \int_{a'} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n'} r ds \right\} \\
 &= -4\pi \left\{ \int_{a'+b'} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n'} r ds - \int_b \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial n} \right) r ds \right\} \\
 &= \sum_i Q_i' + (\sum_i \omega_i Q_i + \sum_i \omega_i' Q_i') / 4\pi \quad (22)
 \end{aligned}$$

で求める。ただし、 ω_i, ω_i' は各ソース Q_i, Q_i' がそれぞれ仮想境界 b, b' を見込む立体角であり、 i についての和は鏡像ソースを含むものとする。もし共通領域 D で二つの調和関数が完全に一致していれば静電容量は内部領域 G 内の全電荷量になる。

結果

ソース点数 $n=70$,

正定数 $q=0.8306, q'=0.8511$,

評価式 (3) から求められるポテンシャルの最大誤差: 0.02039,

静電容量: 14.468 (14.456*, 14.461**),

ここで、() 内の数値は内部領域内の全電荷量*と境界要素法による値**である。

図 11(a), (b) はそれぞれポテンシャルおよび不連続境界値問題の解の等値線である。図 12 は、同じ問題に対する境界要素法によるポテンシャルと代用電荷法のそれとの差を境界の両面(ただし境界から 10^{-7} だけ内側および外側に隔たっている)に対して調べた結果である。ここで、境界要素数 85 (メッシュ等間隔)、積分点数 (境界上のグリーン関数の特異点数) 851 として計算した。境界要素法解の特徴として、特異点が境界上に配置されているため、その付近で誤差が大きくなり、またメッシュの中間点でその誤差が増大す

る。これらの結果として、二つのポテンシャルの差は上記の最大誤差幅を超えている。このように、最大誤差が小さく抑えられている点では、境界要素法よりも代用電荷法が優れていると言える。ただし、静電容量のような積分量では、この場合 4 桁の一致が得られており、解の一致度よりも良い。

7. まとめ

代用電荷法とシュワルツ交代法の組み合わせの特徴を明らかにするために、ここでは厚みのない領域の外部問題を選んだ。境界値問題としては扱いにくい部類に属するが、最大誤差 5% 程度で近似解が得られた。ソース点の数や配置の方法によってさらに精度の良い近似解が得られる可能性がある。誤差の上限が推定できるので、境界要素法や有限要素法の解の検証に用いることができる。また、この方法はラプラス方程式だけでなく、最大値原理が適用できる他の楕円型方程式(たとえば、6.3 節の問題)にも応用できる。

参考文献

- 1) Miller, K.: Numerical Analogs to the Schwarz Alternating Procedure, *Numer. Math.*, Vol. 7, pp. 91-103 (1965).
- 2) Zarling, J.P.: An Analysis of Laminar Flow and Pressure Drop in Complex Shared Ducts, *J. Fluid Eng., Trans. ASME, Ser. I, Vol. 98*, pp. 702-706 (1976).
- 3) Courant, R. and Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, pp. 293-298, Interscience Publishers, New York (1962).
- 4) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1983).
- 5) 村島, 野中, 四ツ谷, 賛田, 村尾: 厚みのない領域の外部問題に対する代用電荷法の適用について, *電子通信学会誌*, Vol. J67-A, No. 6, pp. 616-617 (1984).
- 6) Bulirsch, R.: Numerical Calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions, *Numer. Math.*, Vol. 7, pp. 78-90 (1965).
- 7) Bulirsch, R.: Numerical Calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions. II, *Numer. Math.*, Vol. 7, pp. 353-354 (1965).
- 8) 河野, 宅間: 数値電解計算法, コロナ社, 東京 (1980).

付録 誤差評価式の導出

[補助定理 1]

α, α_* はそれぞれ次のようなディリクレ問題(図 2)

の解であるとする.

$$\begin{cases} \Delta\alpha = 0 \text{ in } G, \\ \alpha = 0 \text{ on } a, \\ \alpha = 1 \text{ on } b. \end{cases} \quad (\text{A. 1})$$

$$\begin{cases} \Delta\alpha_\kappa = 0 \text{ in } G, \\ \alpha_\kappa = \kappa \text{ on } a, \\ \alpha_\kappa = 1 \text{ on } b. \end{cases} \quad (\text{A. 2})$$

(ここで κ は十分小さい定数とする)

また, $q \equiv \|\alpha\|_{b'} (= \sup_b |\alpha|)$ (以下, 正定数と呼ぶ)

とする.

このとき

$$\|\alpha_\kappa\|_{b'} = q + \kappa(1-q) \quad (\text{A. 3})$$

が成立する.

[証明]

$$\alpha_\kappa = (1-\kappa)\alpha + \kappa$$

である. これより

$$\|\alpha_\kappa\|_{b'} = (1-\kappa)q + \kappa = q + \kappa(1-q)$$

となる.

[補助定理 2]

関数 U が次の関係を満たしているとする.

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \text{ in } G, \\ \|U\|_b &\leq \delta. \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

このとき次の不等式

$$\|U\|_{b'} \leq q\|U\|_b + (1-q)\delta \quad (\text{A. 5})$$

が成立する.

[証明] $U_1 = U/\|U\|_b$ と置く. これより, $\|U_1\|_b \leq 1$, $\|U_1\|_{b'} \leq \delta/\|U\|_b$ となる. U が境界 a, b で正, 負となるそれぞれの場合に補助定理 1 および比較定理 (最大値原理) を適用して,

$$\|U_1\|_{b'} \leq q + \delta/\|U\|_b(1-q),$$

$$\|U\|_{b'} \leq q\|U\|_b + \delta(1-q)$$

を得る.

[誤差評価式]

領域 G, G' の合併領域 B におけるラプラス方程式のディリクレ問題 (図 1) を考え, 記号を次のように定義する.

w : 真の解,

u, v : 領域 G, G' における近似解,

δ : 領域 B の境界 ($A = a + a'$) 上の最大誤差,

ε : 仮想境界 ($\Gamma = b + b'$) 上の u, v の最大誤差,

q, q' : 領域 G, G' に対する正定数.

ここで, $U = w - v$ として補助定理 2 を適用する.

$$\begin{aligned} \|w - v\|_b &\leq r\|w - v\|_{b'} + (1-r)\delta \\ &\leq r(\|w - u\|_{b'} + \|u - v\|_{b'}) + (1-r)\delta \\ &\leq r\|w - u\|_{b'} + r\varepsilon + (1-r)\delta. \end{aligned}$$

ただし, $r \equiv \max(q, q')$ とする. 同様に

$$\|w - u\|_{b'} \leq r\|w - v\|_b + r\varepsilon + (1-r)\delta$$

したがって,

$$\|w - v\|_b \leq r\varepsilon/(1-r) + \delta. \quad (\text{A. 6})$$

これより,

$$\begin{aligned} \|w - u\|_c &\leq \|w - v\|_b + \|v - u\|_b \\ &\leq r\varepsilon/(1-r) + \delta + \varepsilon \\ &= \varepsilon/(1-r) + \delta \end{aligned}$$

を得る. 同様に

$$\|w - v\|_{c'} \leq \varepsilon/(1-r) + \delta \quad (\text{A. 7})$$

である.

(昭和 60 年 3 月 29 日受付)

(昭和 60 年 9 月 19 日採録)