A_031

ドローネ三角形分割を用いたアダプティブリメッシング法の研究

Research on adaptive remeshing scheme using Delaunay triangulation

小野 大輔　　岡本 覚
Daisuke Ono　Satoru Okamoto

1. 緒言

有限要素法(Finite Element Method, FEM)[1,2,3]は近似解法であり，メッシュの質によって有限要素解の信頼性が左右される．メッシュサイズを無限小にしていけば，厳密解に収束することが数学的に保証されているが，現実的に自由度が無限大の剛性マトリクスを解くことは，現在の計算機では不可能である．そこで近年では，有限要素解から誤差の事後推定により有限要素の改善を自動的に行うアダプティブリメッシング法[1]の研究が進んでいる．

本研究では，誤差の事後推定により細分割を要する部分だけを取り出して細分割を行うことにより，計算量の削減やメモリの節約を目的としている．

本論文では，誤差に影響を及ぼすとされる部分を細分割した場合としなかった場合で，有限要素法解析の解の精度や計算時間の差異について報告する．

2. 有限要素法解析

2.1 FEM について

FEM とは，解析の対象となる物体を三角形(**Fig.1**)や四角形(**Fig.2**)などの「要素」に分割して計算する方法である．

これらの要素は極めて単純な形状をしているので，外力が加わった際に要素がどのような形に変形するのかをコンピュータで簡単に計算することができる．

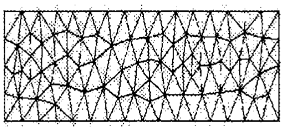
Fig.1　三角形分割

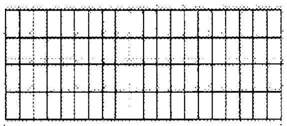
Fig.2　四角形分割

固体力学問題への FEM の応用分野には，弾性問題，連続体の振動，粘弾性解析などが含まれる．本研究の議論は，二次元弾性問題に限定する．

2.2 二次元弾性問題の数学的準備

二次元弾性問題は，6 変位成分を有する三角形要素を使用する．二次元弾性問題は，**Fig.3** のような 6 変位成分を有する三角形要素を使用する．

3節点の変位は，式(1)のように定義する．

$$\{\delta\}=\{U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_k \quad V_k\} \tag{1}$$

U，Vは，要素内の X，Y 方向の変位を表している．また，i，j，kは，三角形要素の各節点を表している．なお，$\{\delta\}$は変位ベクトルと呼ばれる．

島根大学総合理工学研究科

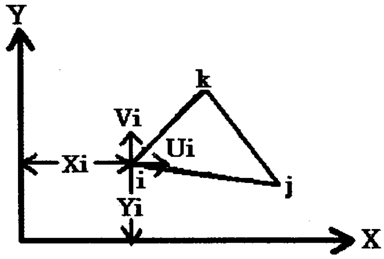

Fig.3　三角形要素の節点変位

変位と外力の関係式は式(2)のようになる．

$$\{F\}=[k]\{\delta\} \tag{2}$$

$\{F\}$は要素荷重ベクトル，$[k]$は剛性マトリクスを表している．この関係式より変位を求める．また，剛性マトリクスは式(3)ように定義される．

$$[k]=[N]^T[D][N]tA \tag{3}$$

$[N]$は勾配マトリクス，$[D]$は材料特性マトリクス，tは要素の厚さ，Aは要素の面積である．勾配マトリクスと材料特性マトリクスについては参考文献[2,3]より引用した．

2.3 アダプティブリメッシング法

アダプティブリメッシング法とは，誤差が大きいとされる部分の形状を細分割する方法である．本研究では，初めにも述べたように三角形要素を使用している．三角形分割を行うアルゴリズムは，ドローネ三角形分割[4,5]を使用する．この三角形分割は，得られたすべての三角形要素の外接円内部に他の節点を含まない分割方法をいう．この幾何学的性質は FEM で望まれる要素形状に適用できるため，要素分割法の基本になっている．

また，ドローネ三角形分割を使用して細分割を行う場合，領域内部への節点の取り方には様々な方法が考えられるが，ここでは偏平率法[5](**Fig.4**)を採用する．この方法は，三角形のうちから最大頂角を捜し出し，その最大角の対辺の中点に新しい節点を設定し，その点を用いてドローネ三角形分割を行う方法である．

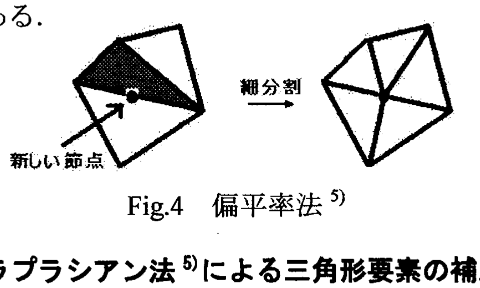

Fig.4　偏平率法[5]

2.4 ラプラシアン法[5]による三角形要素の補正

ドローネ三角形分割した領域を，さらに正三角形に近づけるために節点の重心移動を行う．ある節点

を含むすべての要素で構成される多角形の重心位置にその節点を移動させる．
式(4)を全内部節点について繰り返し適用し，多角形の重心の位置に節点を移動する(**Fig.5**).

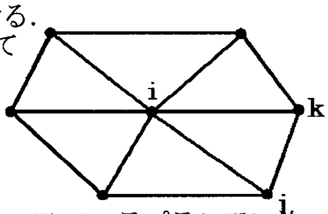

Fig.5　ラプラシアン法

$$P(i) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1,k=1}^{n}\{P(j)+P(k)\} \quad (4)$$

式(4)において $P(i)$, $P(j)$, $P(k)$ はそれら3頂点の座標値を，n は i 点を共有する三角形の個数を示す．

3. 実験方法

材質が鉄で，高さ 10 mm,長さ 200 mm の二次元物体において，左端を固定して右端の上部に 1 kg の荷重をかける(**Fig.6**).

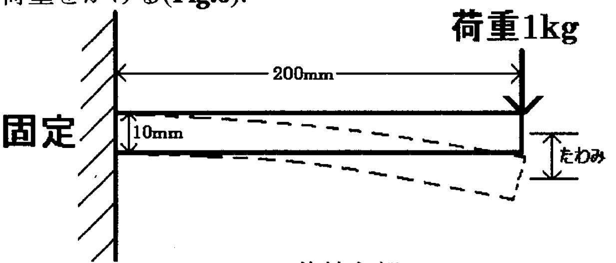

Fig.6　片持ち梁

2 節を基に３パターンの三角形分割を行う．

Ｐ１：ドローネ三角形分割(**Fig.7**)
Ｐ２：左端から 50mm 内を細分割したドローネ三角形分割(**Fig.8**)
Ｐ３：左端から 20mm 内を細分割したドローネ三角形分割(**Fig.9**)

この３つの分割に対して，各節点数での片持ち梁の FEM 解析（たわみ量）を行い，解析結果と FEM 解析に費やす計算時間を記録し，解析精度と計算時間についての考察を行う．なお，解析精度は理論値との誤差が小さいほどよいものとする．たわみの理論値は参考文献[6]より参照した．

実験に用いた計算機の性能は以下の通りである．

CPU	: Pentium4 1.7GHz
Memory	: 256MB
OS	: WindowsXP

Fig.7　P1（節点数 300 点）

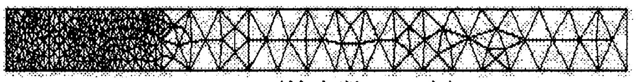

Fig.8　P2（節点数 300 点）

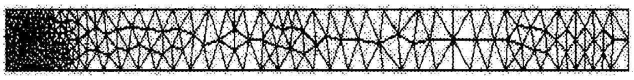

Fig.9　P3（節点数 300 点）

4. 実験結果

Table.1 は，各節点数におけるＰ１，Ｐ２，Ｐ３の FEM の解析結果を表している．この表を見る限り，Ｐ２とＰ３は節点数 900 点で理論値と同等の結果が出ている．Ｐ３の方がわずかに精度が良いことがわかる．

Table.1　各節点数における解析結果（たわみ）と計算時間

節点数	Ｐ１ [mm]	Ｐ２ [mm]	Ｐ３ [mm]	計算時間(秒)
100	0.933	1.029	1.039	ほぼ 0 秒
200	1.242	1.245	1.254	1 秒
300	1.327	1.325	1.331	3 秒
400	1.365	1.369	1.406	5 秒
500	1.393	1.424	1.442	10 秒
600	1.418	1.474	1.467	17 秒
700	1.440	1.481	1.498	25 秒
800	1.452	1.509	1.509	38 秒
900	1.466	1.522	1.524	54 秒
1000	1.471	1.523	1.524	75 秒

たわみの理論値：1.524[mm]

5. 結言

今回は３パターンの三角形分割を行い，解析実験の結果，Ｐ３が最も解析精度が良いことがわかった．

Ｐ１の節点数 1000 点の解析結果とＰ３の節点数 600 点の解析結果がほぼ同等であることから，Ｐ３を使用するとＰ１の節点数 1000 点の時と同じ解析結果を出すのに計算時間を 58 秒も短縮できることがわかった．

本研究の目的は，アダプティブリメッシング法において，細分割を行う際に計算時間を削減したりメモリを節約する方法を考案することである．今後は，細分割を行うための方法論の確立に力をいれていきたい．

参考文献

1) 手塚明/土田英二:アダプティブ有限要素法，丸善株式会社，(2003)
2) 川井忠彦:応用有限要素解析，丸善株式会社，(1978)
3) 三好俊郎:有限要素法入門，培風館，(1978)
4) 譚学厚・平田富夫/共著:計算幾何学入門幾何アルゴリズムとその応用，森北出版，(2001)
5) 谷口健男：FEMのための要素自動分割，森北出版，（1992）
6) 小山信次・鈴木幸三共著:はじめての材料力学，森北出版，（1997）