

A_013

(n, k)-パンケーキグラフにおけるハミルトン閉路

Hamiltonian cycles in (n, k)-pancake graphs

澤田 直樹†

Naoki SAWADA

金子 敬一†

Keiichi KANEKO

1 はじめに

近年の並列分散計算機の研究, 開発の急激な進展に伴い, 並列分散計算機に適したさまざまな相互結合網が提案されている. 一般的に, 相互結合網はグラフでモデル化される. 相互結合網としてのグラフの性能は, その節点数, 次数, 直径, 経路選択の容易さなど, 様々な要素により決まる. n -パンケーキグラフ $P_n[1]$ は, 相互結合網の1つであり, 節点数に比べて低い次数と小さな直径を持つことから, 最近注目されている. しかし, P_n には, 節点数が, $n!$ に制限されるという実用上の問題点が存在する. 本研究では, P_n における節点数の制約を緩和した (n, k) -パンケーキグラフ $P_{n,k}$ を提案する. $P_{n,k}$ における節点数は, $n!/(n-k)!$ となり, P_n に比べ逐次的拡張性が向上している. さらに, $P_{n,k}$ におけるハミルトン閉路の構成法を示す.

2 準備

まず, 反転操作と $P_{n,k}$ を定義する. ただし, 以下では, $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ と表記する.

定義 1 $\langle n \rangle$ から任意に k 個を選んで並べた1つの順列 $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ および残りの $n-k$ 個の数を昇順に整列した $u_{k+1} < u_{k+2} < \dots < u_n$ に対して, $u^{(i)}$ を以下で定義する.

$$u^{(i)} = \begin{cases} (u_i, u_{i-1}, \dots, u_1, u_{i+1}, \dots, u_k) & (2 \leq i \leq k), \\ (u_i, u_k, u_{k-1}, \dots, u_2) & (k < i \leq n). \end{cases}$$

$P_{5,3}$ の例では, $u = (3, 2, 5)$ とすると, 残りの数 1 と 4 を昇順に整列し, $u_4 = 1, u_5 = 4$ となる. $u^{(i)}$ ($i > k$) は, u_i を最左位置に持ってきて, 残りの u_2, \dots, u_k を反転するため, $u^{(4)} = (1, 5, 2), u^{(5)} = (4, 5, 2)$, となる.

定義 2 $P_{n,k}$ は, $n!/(n-k)!$ 個の節点を持つ無向グラフであり, 各節点は $\langle n \rangle$ から k 個を選んで並べた1つの順列をそのラベルとして持つ. 2つの節点 u, v に対して, 辺 (u, v) が存在するのは, $u^{(i)} = v$ なる i ($2 \leq i \leq n$) が存在するときであり, それ以外のときには辺は存在しない.

図 1 に, $P_{n,k}$ の例を示す.

定義 3 $P_{n,k}$ ($k \geq 4$) において, 任意の節点を $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ とすると, 同じ k 個の数 u_1, u_2, \dots, u_k から

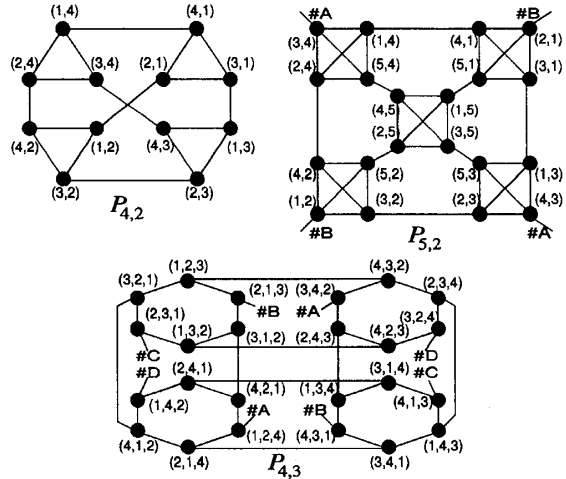


図 1 $P_{n,k}$ の例

なる順列をラベルとして持つすべての節点から導出される部分グラフを $P_{n,k}(u)$ と表す.

$P_{6,4}$ の例では, $u = (2, 3, 4, 5)$ とすると, 以下の節点は部分グラフ $P_{6,4}(u)$ 内にある.

$$(2, 4, 5, 3), (4, 2, 5, 3), (5, 2, 3, 4), (3, 5, 4, 2), \dots$$

$P_{n,k}$ は nC_k 個の互いに素な部分グラフ $P_{n,k}(u)$ に分解可能であり, それぞれの部分グラフを1つの節点に縮約して導出される部分グラフは, Zhu らが提案した $C_{n,k}$ と同型である [5].

定義 4 $C_{n,k}$ は, nC_k 個の節点を持つ無向グラフであり, 各節点は $\langle n \rangle$ から k 個を選んで集合をそのラベルとして持つ. 2つの節点 p, q に対して, 辺 (p, q) が存在するのは, $|p \setminus q| = 1$ のときであり, それ以外に辺は存在しない.

$C_{5,3}$ の例では, 節点 $\{1, 3, 4\}$ と辺を持つ節点は, 以下である. $\{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}$.

$C_{n,k}$ におけるハミルトン閉路を構成するアルゴリズムも Zhu らによって与えられている [5].

以下本稿では, 辺列 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{i-1}, v_i)$ からなる経路を $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_i$ と表記する.

3 直径

$P_{n,k}$ では, P_n と同様に最短経路を求めることが困難である. そのため計算機実験により直径を実測した. 表 1 に, (n, k) -ス

† 東京農工大学大学院工学府

ターグラフ $S_{n,k}$ [3] との直径の比較を示す。

表1より分かるように、すべての (n, k) の組に対して、 $P_{n,k}$ の直径は、 $S_{n,k}$ の直径以下である。したがって、直径に関して、 $P_{n,k}$ が $S_{n,k}$ より優れていることが分かる。

表1 $P_{n,k}$ と $S_{n,k}$ との直径比較

n	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
k	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	7
$P_{n,k}$	3	5	7	8	8	3	5	7	9	9	10
$S_{n,k}$	3	5	7	8	9	3	5	7	9	10	11

表2に、 $P_{n,k}$ および (n, k) -ローターグラフ $R_{n,k}$ と、 $S_{n,k}$ の節点数、次数、直径、連結度、および無向性を示す。直径に関しては、 $P_{n,k}$ より $R_{n,k}$ の方が優れている。しかしながら、 $R_{n,k}$ は有向グラフであり、通信の局所性を想定する多くの並列アルゴリズムに対して、 $R_{n,k}$ は不適切となる。

表2 $P_{n,k}, S_{n,k}, R_{n,k}$ の比較

	節点数	次数	直径	連結度	無向性
$P_{n,k}$	$n!/(n-k)!$	$n-1 \leq 2k$	$n-1$	$n-1$	Yes
$S_{n,k}$	$n!/(n-k)!$	$n-1$	*	$n-1$	Yes
$R_{n,k}$	$n!/(n-k)!$	$n-1$	k	$n-1$	No

$$* \begin{cases} 2k-1 & (1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor) \\ k + \lfloor (n-1)/2 \rfloor & (\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq k \leq n-1) \end{cases}$$

4 ハミルトン閉路

$P_{n,k}$ においてハミルトン閉路を構成するアルゴリズムを $k=2$ と $k=3, k \geq 4$ に分けて示す。

4.1 $P_{n,2}$ におけるハミルトン閉路

$P_{n,2}$ は、 $S_{n,2}$ と同型であり、 $S_{n,2}$ におけるハミルトン閉路と同様に構成する [2]。

4.2 $P_{n,3}$ におけるハミルトン閉路

$P_{n,3}$ におけるハミルトン閉路の構成法は省略する。

4.3 $P_{n,k} (k \geq 4)$ におけるハミルトン閉路

$P_{n,k} (k \geq 4)$ において、ハミルトン閉路を構成するアルゴリズムを以下に示す。 $P_{n,k}$ は、 ${}_nC_k$ 個の部分グラフからなり、それぞれの部分グラフを1つの節点に縮約して導出される部分グラフは、 $C_{n,k}$ と同型である。 $C_{n,k}$ はハミルトン閉路をもつグラフであり、我々の提案アルゴリズムでは、 $C_{n,k}$ のハミルトン閉路の順に、部分グラフを訪問する。また、 $P_{6,4}$ の例をあわせて示す。

(1) まず、 $C_{n,k}$ におけるハミルトン閉路を以下とおく。 $a_1 = \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}\} \rightarrow \dots \rightarrow a_{nC_k} \rightarrow a_1$ 。ただし、 $a_{i1} < a_{i2} < \dots < a_{ik}$ とする。このとき、 $C_{n,k}$ におけるハミルトン閉路の順に、部分グラフ $P_{n,k}(h_i) (1 \leq i \leq {}_nC_k)$ を整理する。ただし、 $h_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$ とする。

$P_{6,4}$ の例では、 $h_1 = (1, 2, 3, 4)$, $h_2 = (1, 2, 3, 5)$, $h_3 = (1, 2, 4, 5)$, \dots , $h_{14} = (1, 2, 4, 6)$, $h_{15} = (1, 2, 3, 6)$ となる。

(2) $s_1 = (k, k-1, \dots, 1)$, $d_{nC_k} = (n, 1, 2, \dots, k-1)$ とする。

(3) $1 \leq i \leq {}_nC_k - 1$ なる i に対して、部分グラフ $P_{n,k}(h_i)$ と部分グラフ $P_{n,k}(h_{i+1})$ を結ぶ辺 (d_i, s_{i+1}) を選ぶ。ただし、 d_i は、 s_i とは異なり、かつ $P_{n,k}(h_{i+1})$ のうちにある節点 s_{i+1} への辺をもつ。

$P_{6,4}$ の例では、 $s_1 = (4, 3, 2, 1)$, $d_1 = (4, 3, 1, 2)$, $s_2 = (5, 2, 1, 3)$, $d_2 = (3, 1, 2, 5)$, $s_3 = (4, 5, 2, 1)$, \dots , $d_{14} = (4, 6, 1, 2)$, $s_{15} = (3, 2, 1, 6)$, $d_{15} = (6, 1, 2, 3)$ となる (図2(a)参照)。

(4) (3) の過程で選ばれた s_i, d_i に対して、各部分グラフ $P_{n,k}(h_i)$ における2節点 s_i, d_i の間に以下のようにハミルトン経路を求める。

部分グラフは P_k と同型であり、 $P_k (k \geq 4)$ において、任意の2節点間にハミルトン経路を構成するアルゴリズムは、Chiangらによって与えられている [4]。よって、部分グラフにおけるハミルトン経路も同様に構成する (図2参照)。

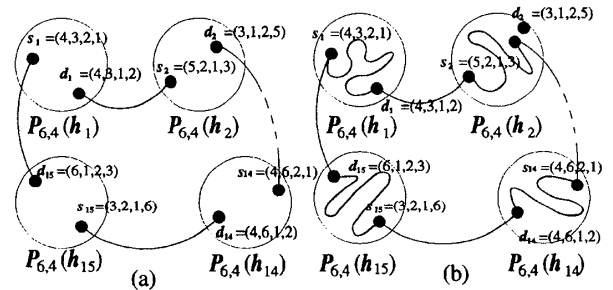


図2 $P_{n,k}$ におけるハミルトン閉路の例

5 結論

本論文では、 (n, k) -パンケーキグラフを提案し、その直径を計算し、 (n, k) -スターグラフに対する優位性を示した。また、ハミルトン閉路を構成するアルゴリズムを示した。

今後の課題としては、 (n, k) -パンケーキグラフにおけるハミルトン経路の構成アルゴリズムなどが挙げられる。

参考文献

- [1] S. B. Akers et al.: "A group theoretic model for symmetric interconnection networks," *IEEE Tran. Comput.*, vol. 38, no. 4, pp. 555-566, April 1989.
- [2] J. H. Chang et al.: "Ring embedding in faulty (n, k) -star graphs," *Proceedings of ICPADS*, pp. 99-106, 2001.
- [3] W. K. Chiang et al.: "The (n, k) -star graph," *Inf. Process. Lett.*, Vol. 56, No. 5, pp. 259-264, 1995.
- [4] C. N. Hung et al.: "Ring embedding in faulty pancake graphs," *Inf. Process. Lett.*, vol. 86, No. 5, pp. 271-275, 2003.
- [5] H. Zhu et al.: "New classes of interconnection topology structure and their properties," *Wuhan Univ. Journal of Natural Sciences*, Vol. 1, No. 3/4, pp. 371-385, 1995.