A_012

不完全なスターグラフの新しい構成と経路選択算法
A New Configuration of Incomplete Star Graphs and its Routing Algorithm

岩崎 達矢, 金子 敬一 †
Tatsuya Iwasaki and Keiichi Kaneko

1. はじめに

今日，並列分散計算に関する研究がより重要になっており，近年，特に，いわゆる超並列計算機が熱心に研究されている．これにともない，相互結合網として，ハイパキューブやメッシュ，トーラスといった単純な位相に代わって，ケイリーグラフ [1] に基づく多くの複雑な位相が提案され，研究されている．スターグラフ [2] は，そのような位相の１つであり，その小さな直径や次数のため，非常に有望である．しかし，スターグラフでは，そのノード数が整数の階乗に制限されており，逐次的拡張性を欠く．この問題点を解決するため，Latifi らにより任意のノード数に対応可能な不完全なスターグラフが提案された [3]．しかしながら，この構成方法では短い経路を与える経路選択算法を実現できないという問題点がある．そのため本研究では，新たな構成方法とより短い経路を与える経路選択算法を示す．

以下，本論文は，次のように構成される．まず，第２節で，スターグラフについて示し，次に第３節で，不完全なスターグラフの新しい構成法を導入する．さらに第４節では，その経路選択算法を示し，第５節で，これを評価する．最後に，第６節で，結論と今後の課題を述べる．

2. スターグラフ

本節では，諸定義とともにスターグラフの構成とその特徴を示す．また，スターグラフに対する経路選択算法を与える．

定義 1 n 個の整数からなる順列 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ と整数 i $(2 \le i \le n)$ に対して，交換操作 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ を以下で定義する:

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = (u_i, u_2, u_3, \ldots, u_{i-1}, u_1, u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

定義 2 n-スターグラフ S_n は，$n!$ 個のノードを持つ．各ノードは，n 個の整数 $1, 2, \ldots, n$ からなる順列である．ノード $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ は，集合 $\{\boldsymbol{u}^{(i)} \mid 2 \le i \le n\}$ の要素であるノードと隣接し，他のノードと隣接しない．

S_n は次数 $n-1$ で連結度も $n-1$ である．グラフ G の直径を $d(G)$ と表記すると，$d(S_n) = \lfloor \frac{3}{2}(n-1) \rfloor$ である．また，S_n の任意の２ノード間の経路選択には $O(n)$ の算法が提案されている [2]．この算法を図 1 に示す．

S_n のノードのうち，最右位置に k を持つものから導出されるグラフは，$(n-1)$-スターグラフを構成する．この部分スターグラフを，k を添え字として，$S_n(k)$ と表記する．S_n は，互いに素な n 個の部分グラフ $S_n(1), S_n(2), \ldots, S_n(n)$ に分解可能である．

† 東京農工大学, Tokyo University of Agriculture and Technology

```
function strt(u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ... v_n))
begin
  u' := u;
  P := [u];
  while u' ≠ v do begin
    if u'_1 ≠ v_1 then find i such that v_i = u'_1
    else find i such that u'_i ≠ v_i;
    u' := u'^(i);
    P := P ++ [u']
  end;
  return P
end;
```

図 1: スターグラフの経路選択算法.

定義 3 部分スターグラフ $S_n(k)$ において，最左位置に l を持つノードの集合 $P_n(k,l) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mid u_1 = l, u_n = k\}$ を，$S_n(k)$ から $S_n(l)$ へのポート集合と呼ぶ.

例えば，$P_4(4,1)$ は $(1,2,3,4)$ と $(1,3,2,4)$ の２つのノードを示す.

3. 新しい構成法

本節では，新しい構成法に基づく不完全なスターグラフを導入する.

定義 4 ノード数 N $((n-1)! < N \le n!)$ が与えられたとき，不完全なスターグラフを以下のように構成する．まず，S_n において，$S_n(1)$, $S_n(2)$, …, $S_n(k)$ を選択する．ただし，k は，$k \times (n-1)! \le N$ を満たす最大の整数とする．次に，$S_n(k+1)$ から，ポート集合 $P_n(k+1, i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ を優先して，$N - k \times (n-1)!$ 個のノードを選択する．選択されたノードから導出される部分グラフをノード数 N の不完全なスターグラフ $IS(N)$ と呼ぶ.

図 2 に，$N = 15$ に対する不完全なスターグラフ $IS(15)$ の例を示す．図中ではノード $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ を $u_1 u_2 \cdots u_n$ と表している.

4. 経路選択算法

本節では，$IS(N)$ (ただし，$(n-1)! < N \le n!$) において，任意の２ノード $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ および $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ に対して，$\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ までの経路 P を確立する算法を与える．この算法は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ の位置により，以下のように分類される:

場合 1 $1 \le u_n, v_n \le k$

場合 2 $1 \le u_n \le k$, $\boldsymbol{v} \in S_n(k+1)$

場合 3 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_n(k+1)$

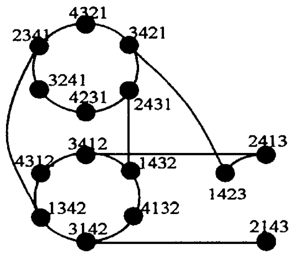

図 2: 不完全なスターグラフ $IS(15)$ の例.

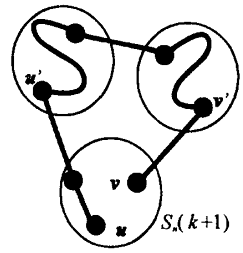

図 4: 場合 3 の経路選択の様子.

4.1 場合 1

$1 \le u_n, v_n \le k$ のとき，スターグラフと同様の経路選択を行う．よって，最大経路長は $d(S_n)$ となる．

4.2 場合 2

$1 \le u_n \le k$，$v_n = k+1$ の場合，次のように経路を選択する．まず $\boldsymbol{v}^{(n)}$ が存在すれば $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}^{(n)}$，さもなくば，$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}^{(i)} \to \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}^{(i,n)}$ (ただし，$v_i = u_n$) とする．このとき，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}'$ の間で，スターグラフと同様の経路選択を行うことができる．ここで，経路長は $d(S_n)+1$，または $d(S_{n-1})+2 \le d(S_n)+1$ となる．よって，最大経路長は $d(S_n)+1$ となる．この算法による経路構成の様子を図 3 に示す．

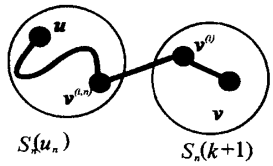

図 3: 場合 2 の経路選択の様子 $(v_1 > k)$.

4.3 場合 3

$u_n = v_n = k+1$ の場合，最初に $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ それぞれに対し，$\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'$ を求める．$u^{(n)}$ が存在すれば $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}^{(n)}$，さもなくば $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}^{(i)} \to \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}^{(i,n)}$ $(u_i = 1)$ とする．同様に $\boldsymbol{v}'$ を求める．得られた $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'$ に対し，スターグラフと同様の経路選択を行う．このとき，経路長は $d(S_n)+3$，または $d(S_{n-1})+4 \le d(S_n)+3$ となる．よって，最大経路長は $d(S_n)+3$ となる．この算法による経路構成の様子を図 4 に示す．

4.4 経路選択算法

以上の算法をまとめると図 5 のようになる．この算法について，以下の定理が成り立つ．

定理 1 提案算法の時間計算量は，$O(n)$ であり，与える経路は，Latifi らによる経路 [3] よりも長くない．

```
function route(u = (u_1,...,u_n), v = (v_1,...,v_n))
begin
  P := [u]; Q := [v];
  u' = u; v' = v;
  if u_n = k+1 then begin
    if u_1 > k then begin
      if v_n ≠ k+1 then
        find i such that u_i = v_n
      else find i such that u_i = 1;
      u' := u'^(i); P := P ++ [u']
    end;
    u' := u'^(n); P := P ++ [u']
  end;
  if v_n = k+1 then begin
    if v_1 > k then begin
      if v_n ≠ k+1 then
        find i such that v_i = u_n
      else find i such that v_i = 1;
      v' := v'^(i); Q := [v'] ++ Q
    end;
    v' := v'^(n); Q := [v'] ++ Q
  end;
  return P ++ strt(u',v') ++ Q
end;
```

図 5: 不完全なスターグラフの経路選択算法.

5. 結論

本論文で，任意のノード数に対応可能な不完全なスターグラフの新しい構成法を提案し，あわせて経路選択算法を示した．また，従来の構成法と比較してその優位性を示した．算法の改善と本手法の他のグラフへの適用が今後の課題である．

参考文献

[1] S.B. Akers and B. Krishnamurthy, "A group theoretic model for symmetric interconnection networks," IEEE Trans. Comp., vol.38, no.4, pp.555–566, 1989.

[2] S.B. Akers, D. Horel, and B. Krishnamurthy, "The star graph: An attractive alternative to the n-cube," in Proc. Int'l Conf. Parallel Processing, pp.393-400, 1987.

[3] S. Latifi and N. Bagherzadeh, "Incomplete star: an incrementally scalable network based on the star graph," IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., vol.5, no.1, pp.97–102, 1994.