A_010

平面領域上の最小スタイナ木を求めるアルゴリズム
An Algorithm for Finding Minimum Steiner Tree on Plane Region

菊地融†　　高橋淳也‡
Akira Kikuchi　Jun-ya Takahashi

1．まえがき

最小スタイナ木問題とは，与えられた端子すべてを結ぶ，長さが最小な木を求める問題である．このとき，木の節点は，端子，およびスタイナポイントと呼ばれる点である．このようなスタイナ木を求める問題は NP 完全であることが知られており，効率的なアルゴリズムを構築することは，困難であると思われる．しかしながら問題に条件を加えると，最小スタイナ木を求める効率的なアルゴリズムが構築できることが知られている．本文では，軸平行な長方形障害物と軸平行な長方形の外周があるような平面領域を考え，端子が２つの異なる長方形障害物上にある場合(図１)に，スタイナ木を求める多項式時間のアルゴリズムを与える．

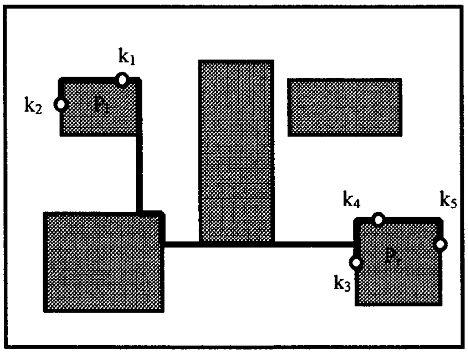

図１　平面上の最小スタイナ木

2．準備

本章では，用語と問題の定義を与える．１つの軸平行な長方形を R_o とする．R_o の内部にはいくつかの**長方形障害物**が存在し，互いに重なりあわないものとする．また，R_o には含まれるが，R_o 以外の長方形には含まれない平面領域を A とする．連結したい**端子**は２つの異なる長方形障害物の周上に m 個存在するものとし，$K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$とする．また，端子を周上にもつ長方形障害物のうち，x 軸方向にみて，－側に位置するものを P_l，＋側に位置するものを P_r とする(図１)．P_l,P_r の決め方は，周上に端子をもつどちらか一方の長方形障害物の位置に対して、平面操作法を用いてどの領域(R_1~R_8)に存在するか決定する(図２)．このとき，必ず長方形 P_l を構成する右側の辺が，長方形 P_r を構成する左側の辺より x 軸方向－側に存在していなければならない．その他の場合，左右どちらかに 90 度回転させることで P_l, P_r を決定すればよい．本文では，K を全てつなぐ木を**スタイナ木**であるといい，特に長さの総和が最小であるスタイナ木を**最小スタイナ木**という．また本文では，長方形障害物＋端子の数を n とする．

†　宮城大学大学院事業構想学研究科
‡　宮城大学大学院事業構想学部

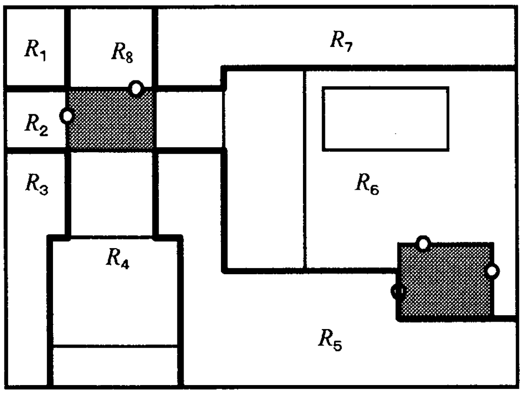

図２　P_l,P_rの配置の仕方

P_l道，P_r道を次のように定義する．

(1) P_l 道：P_l を構成する右側の辺を R_o の境界まで延長した道．ここで他の長方形障害物と衝突する場合，その境界で＋x 方向に折れ，その長方形障害物の外周に沿って再帰的に R_oの境界まで延長する．

(2) P_r 道：P_r を構成する左側の辺を R_o の境界まで延長した道．ここで他の長方形障害物と衝突する場合，その境界で－x 方向に折れ，その長方形障害物の外周に沿って再帰的に R_oの境界まで延長する．

また，P_l 道，P_r 道で区切られた領域を R_I とする．R_I の境界、または内部に端子や長方形障害物が存在する場合は，端子と障害物の頂点から x 軸方向に線分を引く．このとき他の長方形障害物と衝突する場合はその境界までとする．これにより，図３のような平面グラフ G が得られる．このとき，頂点は端子，線分の交点，長方形障害物であり，辺はグラフの点同士を結ぶ直線である．

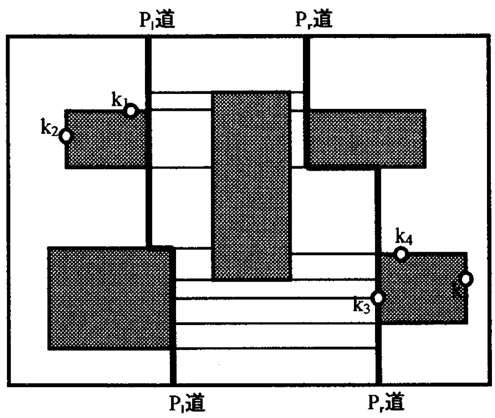

図３　平面グラフ

３．平面上の最小スタイナ木

次の補題が成り立つ．

補題　G の辺のみをたどる最小スタイナ木 T が少なくとも１つ存在する．

証明　T'を G の辺のみをなるべくたどる最小スタイナ木とする．条件より T'は必ず,領域 R_I 内を通るので，T'が R_I 内の G の辺のみたどることを証明する．

背理法による.T'は R_I 内の辺をたどらない部分が存在すると仮定する．T'が，R_I 内の辺で囲まれた１つの格子を通る際,以下のようなグラフの通り方が存在する．(以下，図４，５，６において点線が格子，太線が最小スタイナ木 T'，図５の灰色長方形が長方形障害物や平面境界を表す)

(1)　格子内にスタイナポイントが存在しない場合

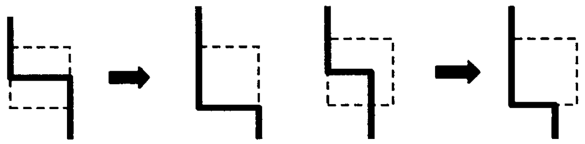

図４　グラフの格子内通過の仕方(1)-a

図４のような場合は，グラフ全体の長さを変えずに格子をたどるグラフに置き換えることができる．

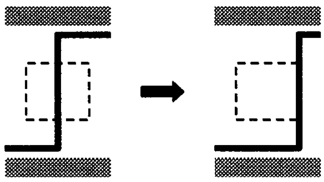

図５　グラフの格子内通過の仕方(1)-b

図５のような場合は，１つの格子内だけではグラフをたどりなおすことはできない．このときグラフを長方形障害物や端子，平面境界までたどるとスタイナ木の性質から，図５のような距離が得られ，グラフの長さを変えずに格子をたどるグラフに置き換えられる．

(2)　格子内にスタイナポイントが存在する場合

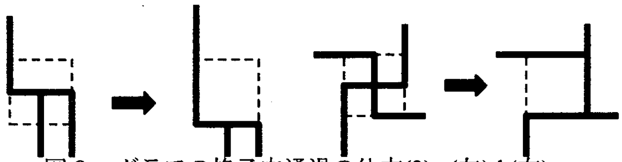

図６　グラフの格子内通過の仕方(2)-a(左)-b(右)

図６の a の場合，格子をたどるようにグラフを置き換えると，置き換えたグラフの方がグラフの長さが短くなる．同様に図６の b の場合も置き換えたグラフの長さの方が短くなっている．このことは，T'が最小スタイナ木であることに矛盾する．従って，T'は格子内にスタイナポイントをもたない．

以上より，T'は長さの総和を増やすことなくグラフ上の辺をたどるように変形できる．よって，仮定と矛盾するため補題は成り立つ．■

以上によって，平面領域上で最小スタイナ木を求める問題は，平面領域から生成された平面グラフで最小スタイナ木を求める問題に帰着される．このとき，端子は平面グラフの２つの面の周上に存在する．このような平面グラフ上の２つの周上に点が存在する場合，そのグラフ上の最小スタイナ木を求めるアルゴリズムが提案されている(1)．従って，端子が２つの長方形障害物上にあるような平面領域上の最小スタイナ木は，多項式時間で求めることができる．

```
Precesure STEINER;
    Begin
1.          平面グラフ G を構成する。；
2.          平面グラフ G で最小スタイナ木を求める；
    End；
```

STEINER の実行時間は以下の通りである．１行目の G は，平面操作法を用いて，$O(n \log n)$時間で構成できる．２行目は, Bern によって提案されたアルゴリズム(1)に基づく.m を端子の数，n をグラフ G の点の数とおけば，$O(nm^3+(n \log n)m^2)$解けることがわかっている．従って，端子が２つの長方形障害物にのみ存在する場合の最小スタイナ木は$O(nm^3+(n \log n)m^2)$の実行時間で求まる．

以上より，次の定理が成り立つ．

定理 1.　領域 A の軸平行な線分からなる最小スタイナ木は，$O(nm^3+(n \log n)m^2)$時間で求まる．

４．むすび

本文では,軸平行な線分からなる長方形外周と,内部の長方形障害物からなる平面領域において,結ぶべき端子が２つの長方形障害物にのみ存在するという条件の下で,指定された端子を結ぶ多項式時間アルゴリズムを与えた.今後は,他の条件の下で端子を結ぶ多項式時間アルゴリズムを求める必要がある．

文献

(1) Marshall Bern : Faster Exact Algorithms for Steiner trees in Planar Networks (Networks,vol20,pp.109-120,1990)

(2) Yoshiyuki Kusakari, Daisuke Masubuchi, Takao Nishizeki : Finding a Noncrossing Steiner Forest in Plane Graphs Under a 2-Face Condition, Journal of Combinational Optimization,5,249-266,2001

(3) P.winter, Steiner problem in networks:A servey.*Networks* 17 (1987) 129-167

(4) 髙橋淳也，鈴木均，西関隆夫："平面上の長さの総和が最小な非交差道を求めるアルゴリズム"