

雑音を考慮した Volterra 級数による非線形画像復元

Non-Linear Image Restoration by Volterra Series Considering Additive Noise

木本 達也[†]
Tatsuya Kimoto田中 章[†]
Akira Tanaka河口 万由香[†]
Mayuka F. Kawaguchi宮腰 政明[†]
Masaaki Miyakoshi

1 序論

画像復元とは、劣化を受けた画像から原画像をできるだけ忠実に再現する技術である。現在までに画像復元の問題を解決するためのフィルタが多く提案されてきた(文献 [1]~[4] が詳しい)。それらの大部分は劣化に線形性を仮定しているが、現実問題を解く上では非線形性に起因する問題を考慮する必要がある。非線形作用素はそれが連続である場合、その作用素は十分高い次数の Volterra 級数によって任意精度で近似できることが知られている [5]。谷口らはそれを利用して連続な非線形作用素を近似的に推定し画像復元をする手法を提案している [6]。しかし、この手法では劣化に雑音加わる場合について考慮されていないという問題がある。

本稿では、[6] の手法を元に、雑音に対処可能な非線形画像復元法を提案する。また、数値実験により、提案法の有効性を検証する。

2 Volterra 級数による非線形復元

本節では、谷口らの手法 [6] について概括する。画像空間の台集合を $K = \{1, \dots, M\}$ とする。つまり、有限の大きさの画像をラスタ走査で各画素に一意の番号 k を付したものを考える。 K 上の画像 $x \in \mathbb{R}^M$ の k 番目の濃度を $x(k)$ で表す。また、作用素 $V: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ により画像 $x \in \mathbb{R}^M$ は $(Vx) \in \mathbb{R}^M$ に変換されるとする。

ある既知の原画像 f が非線形劣化 A を受け、劣化画像 g が得られたものとする。目的は、この f と g の組から、非線形劣化 A の逆に相当する復元作用素 B を N 次離散 Volterra 級数 (多項式) \hat{B} で近似し、同様の劣化 (すなわち A) によって劣化を受けた他の画像を復元することである。このとき、 \hat{B} による f の復元画像 \hat{f} は次のように表される。

$$\hat{f}(k) = (\hat{B}g)(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in K^n} w_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) \cdot g(k_1)g(k_2) \cdots g(k_n) \quad (1)$$

ここで、 w_n^k は画素 k に依存した n 変数関数である。作用素 B が全ての $k \in K$ に対する近傍で局所的であり、かつ移動不変であるという仮定をおけば、式 (1) は

[†]北海道大学大学院情報科学研究科 CS 専攻

g_5^k	g_4^k	g_3^k
g_6^k	g_1^k	g_2^k
g_7^k	g_8^k	g_9^k

図 1: 小画像の例

$$\hat{f}(k) = (\hat{B}g)(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{r \in D^n} w_n(r) g^{(n)}(k+r), \quad (2)$$

$$g^{(n)}(k+r) = g(k+r_1)g(k+r_2) \cdots g(k+r_n)$$

と書ける。ここで、 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^t$ (t は転置を表す) であり、 D は所与の $k \in K$ に対して、近傍 $k+D$ を生成する集合である。式 (2) は、復元画像 $\hat{B}g$ の画素 k における値 $(\hat{B}g)(k)$ が k の近傍 $k+D$ の画素にのみ依存し、しかも、特定の k に依存しないことを意味する。また、作用素 B は $B0 = 0$ の性質をもつと仮定し、定数項は除いてある。理論的背景として、 B が上述の性質を持ち連続関数である場合には、次数 N を十分大きくとることで、 \hat{B} により所要の精度で B を近似できることが知られている [7]。

谷口らの研究では、近傍 $k+D$ を $g(k)$ を中心とする正方領域とし、その各画素を中心から始めて、 $g_1^k, g_2^k, \dots, g_m^k$ と定義している (例として、 $m=9$ の場合を図 1 に示す)。このとき、式 (2) は

$$\hat{f}(k) = (\hat{B}g)(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq m} a_{i_1 \dots i_n} g_{i_1}^k g_{i_2}^k \cdots g_{i_n}^k \quad (3)$$

と書ける。ここで、式 (3) の右辺は、式 (2) の右辺を多項式として見た場合に本来同一の項となるべきものを整理し直したものである。従って、項数は係数集合 $\{a_{i_1 \dots i_n}\}$ の 0 次の項を除く N 次 m 変数多項式の最大項数 $S(N, m)$ となる (例えば、 $S(1, m) = m, S(2, m) = \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m$)。

次に、式 (3) を行列表現する。

$$g_k = (g_1^k, g_2^k, \dots, g_m^k, (g_1^k)^2, (g_2^k)^2, \dots, (g_m^k)^2, (g_1^k)^3, \dots, (g_m^k)^N, g_1^k g_2^k, g_1^k g_3^k, \dots)^t \quad (4)$$

とし,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m, a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}, a_{111}, \dots, a_{m \dots m}, a_{12}, a_{13}, \dots)^t \quad (5)$$

とすると, 式 (3) は

$$\hat{f}(k) = (\hat{B}g)(k) = \mathbf{g}_k^t \mathbf{a} \quad (6)$$

と書ける. 更に, サンプル点として k_1, k_2, \dots, k_P を $K = \{1, 2, \dots, M\}$ から選び, 少なくともそれらの点において画像を極力正確に復元することを考え,

$$\hat{f}(k) = \mathbf{g}_k^t \mathbf{a}, \quad k = k_1, k_2, \dots, k_P \quad (7)$$

とする. これらの準備のもとで, 式 (7) をまとめると,

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \begin{pmatrix} \hat{f}(k_1) \\ \hat{f}(k_2) \\ \vdots \\ \hat{f}(k_P) \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{k_1}^t \\ \mathbf{g}_{k_2}^t \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{k_P}^t \end{pmatrix} \quad (8)$$

として, 最終的に,

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = G\mathbf{a} \quad (9)$$

を得る. ここで, $\hat{\mathbf{f}}_0$ は復元画像におけるサンプル点からなる P 次元列ベクトル, G は劣化画像のサンプル小画像から計算される $P \times S(N, m)$ 行列, \mathbf{a} は復元作用素を決定する $S(N, m)$ 次元列ベクトルである. 最適な \mathbf{a} (以降 \mathbf{a}^* と書く) を

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{a}\|^2 \rightarrow \min \\ & \text{subject to } \|\mathbf{f}_0 - \hat{\mathbf{f}}_0\|^2 = \|\mathbf{f}_0 - G\mathbf{a}\|^2 \rightarrow \min \quad (10) \end{aligned}$$

を満たすものと定義すると, その解は

$$\mathbf{a}^* = G^+ \mathbf{f}_0 \quad (11)$$

で与えられる [8]. ただし, G^+ は G のムーアペンローズ一般逆 [8] である.

このようにして求めた \mathbf{a}^* を同様の劣化を受けた他の画像に適用して, 全ての画素を復元し, その復元画像を得る. この手法の問題点としては, 劣化に雑音加わる場合が想定されていないということがあげられる.

3 雑音を考慮した画像復元

本節では, 上で述べた Volterra 級数を用いた画像復元の手法を拡張して, 非線形の劣化に雑音加わることを考慮した手法を提案する.

劣化画像 g に, 平均 0, 分散 σ^2 の正規分布に従う独立な雑音 v が加わると仮定すると, 式 (9) は

$$\hat{\mathbf{f}} = (G + V)\mathbf{a} \quad (12)$$

と書き直すことができる. 但し,

$$V = \begin{pmatrix} v_{k_1}^t \\ v_{k_2}^t \\ \vdots \\ v_{k_P}^t \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$v_k = (v_1^k \ v_2^k \ \dots \ v_m^k \ (v_1^k)^2 \ (v_2^k)^2 \ \dots \ (v_m^k)^2 \ (v_1^k)^3 \ \dots \ (v_m^k)^N \ v_1^k v_2^k \ v_1^k v_3^k \ \dots)^t \quad (14)$$

とする. 各 v_i^k の取り方は, 小画像と対応している. 式 (12) における V は, 確率変数からなる行列であるため, 個々の雑音に対して最適化を行うことは無意味である. 従って, V に関する期待値を用いて, 最適な \mathbf{a} を

$$\|\mathbf{a}\|^2 \rightarrow \min$$

subject to

$$E_V \|\mathbf{f}_0 - \hat{\mathbf{f}}_0\|^2 = E_V \|\mathbf{f}_0 - (G + V)\mathbf{a}\|^2 \rightarrow \min \quad (15)$$

と定義する. これより, \mathbf{a}^* は

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* = & (G^t G + G^t E_V(V) + E_V(V^t)G \\ & + E_V(V^t V))^+ (G^t + E_V(V^t)) \mathbf{f}_0 \quad (16) \end{aligned}$$

となる. ここで, 近似する Volterra 級数の次数を 2 とすると, $E_V(V)$ と $E_V(V^t V)$ の具体形は

$$E_V(V) = (O_{P,9} \ \sigma^2 \mathbf{1}_{P,9} \ O_{P,36}) \quad (17)$$

$$E_V(V^t V) = P \begin{pmatrix} \sigma^2 I_9 & O_{9,9} & O_{9,36} \\ O_{9,9} & \sigma^4 \mathbf{1}_{9,9} + 2\sigma^4 I_9 & O_{9,36} \\ O_{36,9} & O_{36,9} & \sigma^4 I_{36} \end{pmatrix} \quad (18)$$

で与えられる. 但し, $O_{m,n}$ は $m \times n$ の零行列, $\mathbf{1}_{m,n}$ は要素が全て 1 の $m \times n$ 行列, I_m は m 次単位行列を表す.

4 実験

実験では, 濃度値が 0 から 255 までの値をとる 256×256 画素の画像 LENA, GIRL を用いた. これらを図 2, 図 3 に示す. この画像に作用させる非線形劣化作用素として, 平均 0, 分散 1 のガウス関数を離散化し, 周囲の 25 画素 (5×5 の局所領域) に限定し畳み込んだ後, 画素ごとに対数を取り, 10 倍したものと

$$\begin{aligned} g(x, y) = & 10 \log \left(\sum_{-2 \leq x-x' \leq 2} \sum_{-2 \leq y-y' \leq 2} w(x-x', y-y') f(x', y') \right) \quad (19) \\ w(u, v) = & (2\pi)^{-1} \cdot \exp(-(u^2 + v^2)/2) \end{aligned}$$

を用いた. 劣化に加わる雑音は, 標準偏差 1.0 の正規乱数を用いた. 劣化画像を図 4, 図 5 に示す.



図 2: 原画像 (LENA)



図 3: 原画像 (GIRL)



図 6: 従来法 (LENA)



図 7: 提案手法 (LENA)

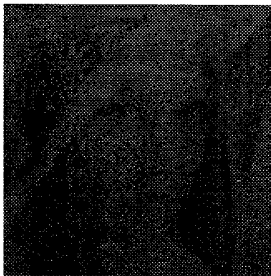


図 4: 劣化画像 (LENA)

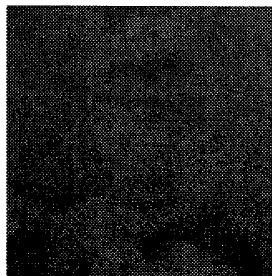


図 5: 劣化画像 (GIRL)



図 8: 従来法 (GIRL)



図 9: 提案手法 (GIRL)

4.1 実験方法

提案法の有効性を調べるために、同一の分布に従う雑音を加えた画像を用意し、画像 LENA からランダムに 54 個の小画像を作り、行列 f_0 , G を作って、谷口らの手法と提案手法のそれぞれについて行列 a^* を推定し、両方の画像を復元した。近似する Volterra 級数の次数は $2(N=2)$ 、小領域の大きさは $3 \times 3(m=9)$ とした。なお、 $S(2,9) = 54$ となる。

4.2 実験結果

谷口らの手法で得られた a^* から復元した画像 (図 6, 図 8) と、提案手法で得られた a^* から復元した画像 (図 7, 図 9) についての S/N 比を表 1 に示す。S/N 比は

$$SN = 10 \log \left(\frac{\|f\|^2}{\|f - \hat{f}\|^2} \right) \quad (20)$$

で与える。ここで、 $\|f\|^2$ は原画像の各画素値の 2 乗和、 $\|f - \hat{f}\|^2$ は原画像と復元画像の各画素値の差の 2 乗和である。この結果より、提案手法の有効性が確認できる。

表 1: 復元画像の S/N 比

画像	従来手法	提案手法
LENA	11.7 dB	25.9 dB
GIRL	7.3 dB	13.8 dB

5 結論

本稿では、非線形の劣化に雑音加わる場合を考慮した画像復元の手法を提案した。また、実験により本手法の有効性を確認した。今後の課題としては、近似に用いる Volterra 級数の次数を上げたときにかかる計算量の削減や、雑音の統計量の推定法などがあげられる。

参考文献

- [1] 小川英光, “信号と画像の復元 [I],[II],[III],[IV],” 信学誌, 71, 5-8, pp.491-497/593-601/739-748/828-835(1988).
- [2] Ogawa H. and Nakamura N., “Projection filter restoration of degraded images,” Proc. IEEE Int. Conf. Pattern Recognition, Montreal, Canada, pp.601-603(1984).
- [3] 小川英光, 原昌司, “部分射影フィルタによる画像復元,” 信学論 (A), J71-A, 2, pp.519-526(1988-02).
- [4] 山下幸彦, 小川英光, “平均射影フィルタによる画像復元,” 信学論 (D-II), J74-D-II, 2, pp.150-157(1991-02).
- [5] Timan A.F., “Theory of Approximation of Functions of a Real Variable,” Pergamon Press(1963).
- [6] 谷口雅彦, 工藤峰一, 宮腰政明, 新保勝, “ボルテラ級数を用いた非線形画像復元,” 信学論 (D-II), Vol.J78-D-II, 2, pp.378-384(1995).

- [7] 近藤正三, 松尾守之, “パターンに対する非線形情報処理機能に解析,” 信学論 (D), J63-D, 10, pp.867-874(1988-10).
- [8] 柳井晴夫, 竹内啓, “射影行列・一般逆行列・特異値分解,” 東京大学出版会 (1983).