J-40

質点バネ系アニメーションの安定性
Stability Analysis on Spring-mass Simulation

新谷 幹夫 †
Mikio Shinya

1. はじめに

質点バネ系のシミュレーションは衣服のアニメーション作成などで必要不可欠な技術である。しかし、布地の伸縮などはバネが硬く、シミュレーションが不安定となりやすい。Baraff は従来の陽的オイラー（explicit Euler）法に代わり陰的オイラー（implicit Euler）法を導入し、処理の安定性向上に成功した [1]。また、Choi らは伸縮に関して非対称なバネモデルを用い、「反応性」と「安定性」を両立したと主張している [2]。しかしながら、「安定性」に関する定量的な議論はなく、例えば陰的手法／陽的手法の選択の基準すらない状況である。

本稿では、デジタル制御等で用いられる状態方程式という概念を導入し、これにより安定性を定義する。さらに、陰陽の両手法における安定性の条件を理論的に示し、減衰定数や時間刻み決定の具体的指針を提案する。

2. 力学系と離散化

n 個の質点の座標を並べ、$x = (x_1 \dots x_{3n})^t$ とすれば、線形質点バネ系の運動方程式は

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f$$

と表せる。M, D, K は $3n \times 3n$ 行列である。$D' = M^{-1}D$, $K' = M^{-1}K$, $f' = M^{-1}f$ と置くと、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v & (1)\\ \dot{v} &= K'x + D'v + f' & (2) \end{aligned}$$

と書ける。時間微分を刻み幅 h で離散化する訳だが、時刻 t を中心とするか $(t+1)$ を中心とするかで、陰的オイラー、陽的オイラーに別れる。

2.1 陽的オイラー法

式 2 の微分を差分 $\dot{v} = (v[t+1] - v[t])/h$, $\dot{x} = (x[t+1] - x[t])/h$ に置き換え、右辺の x, v を時刻 t における値とし、

$$\begin{aligned} x[t+1] &= x[t] + hv[t] & (3)\\ v[t+1] &= v[t] + h(K'x[t] + D'v[t]) + hf' & (4) \end{aligned}$$

を得る。$(x\ v)^t = w$ と置き、行列表現にまとめると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}[t+1] &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ hK' & hD'+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}[t] \\ &\quad +hf' \\ &= A_h w[t] + hf' & (5) \end{aligned}$$

と表せる。$3n \times 3n$ 行列 A_h はシステムを定義するもので、デジタル制御などの分野では状態遷移行列と呼ばれ、式 5 は状態方程式と呼ばれている。

2.2 陰的オイラー法

式 2 の右辺を時刻 $t+1$ にとり、全節と同様に微分を置き換える。

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ hK' & hD'+1 \end{pmatrix} = B_h^{-1}$$

と置けば、

$$B_h^{-1} w[t+1] = w[t] \qquad (6)$$

もしくは、

$$w[t+1] = B_h w[t]$$

と書け、B_h が状態遷移行列となる。式 6 は線形連立方程式であり、陽的オイラー法とは異なって、連立方程式を解くことが必要となる。

3. 状態遷移行列と安定性

系が安定であることを、「任意の有限な初期状態 $w[0]$ に対して、$f = 0$ であれば $w[t] \to 0$ $(t \to \infty)$ である」と定義する。状態遷移行列を Q とすれば、

$$w[n] = Q^n w[0]$$

である。まず簡単のため、1 次元で考えると、Q はスカラーとなるので、$|Q| < 1$ が収束のための必要十分条件である。2 次元以上の場合は、「Q の全ての固有値の絶対値が 1 より小さい」ことが必要十分となる。以下、陰的、陽的オイラー法の状態遷移行列に関して、具体的な安定条件を示す。

4. 陰的オイラー法の安定条件

質量行列 M は通常は対角行列で、対角要素は正である。このとき、M は正定値行列（対称で、任意の複素ベクトル w に対して $w^{*t}Mw > 0$、ただし w^* は w の複素共役）である。また、Kx が復元力であるためには、K は正定値行列でなくてはならない。このような場合には、以下の定理が成り立つ。

定理 M,D,K が全て正定値であれば、陰的オイラー法は安定である。

証明 状態遷移行列 B_h の固有値は逆行列 B_h^{-1} の固有値の逆数なので、

$$|B_h^{-1} \text{の全ての固有値}| > 1$$

が安定条件となる。

$$\begin{aligned} B_h^{-1} &= 1 + h\begin{pmatrix} 1 & -h \\ hK' & hD'+1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + hC_{imp} \end{aligned}$$

†東邦大学理学部情報科学科,
Dept. of Infomation Science, Toho Univ.

と置き、C_{imp} の固有値の実部が正であることを示す。

C_{imp} の固有値を $\lambda = \lambda_0 + \imath\lambda_1$, 固有ベクトルを $w = (x\ v)^t$ とすれば、$C_{imp}w = \lambda w$ から

$$\begin{aligned} -v &= \lambda x & (7) \\ K'x + D'v &= \lambda v & (8) \end{aligned}$$

式 8 に左から v^{*t} を掛け、式 7 を使うと、

$$-\lambda^* x^{*t}K'x + v^{*t}D'v = \lambda v^{*t}v \quad (9)$$

一方、M,D,K が正定値であることから、

$$\begin{aligned} x^{*t}K'x &= x^{*t}M^{-1}Kx > 0, \\ v^{*t}D'v &> 0 \end{aligned}$$

を示すことができるので、式 9 の実部を取り、

$$0 < v^{*t}D'v = \lambda_0(v^{*t}v + x^{*t}K'x)$$

が得られる。したがって、C_{imp} の任意の固有値の実部は正である。$1 + hC_{imp}$ の固有値は $1 + h\lambda$ であり、$h > 0$ なので、絶対値は 1 より大きくなる。

5. 陽的オイラー法の安定条件

陽的オイラー法では安定化のためによりきめ細かな設定を行う必要がある。係数を設定するに当たり、M,K は力学的性質から決定することが多いので、現実的には、

- M,K,D が与えられ、時間刻み h を決定する。
- M,K のみ与えられ、h, D を決定する。

という場合が実用的に重要である。

5.1 時間刻みの決定

$$\begin{aligned} A_h &= 1 + h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K' & D' \end{pmatrix} \\ &= 1 + hC_{exp} \end{aligned}$$

と置く。C_{exp} の固有値を $\lambda = \lambda_0 + \imath\lambda_1$ とすれば、A_h の固有値は $1 + \lambda$ なので、安定条件は

$$\begin{aligned} |1 + h\lambda|^2 &< 1 & (10) \\ h^2 &< -2\lambda_0/|\lambda|^2 & (11) \end{aligned}$$

となる。これが全ての固有値で満たされれば、安定である。したがって、式 11 右辺の最小値を求め、それが正であれば平方根を取り、h とすればよい。一方、実部が正である固有値が存在する場合は、力学系自体が不安定であり、安定にシミュレーションすることはできない。

5.2 時間刻みと D の決定

K', D' が同時対角化可能であれば、モード分解が可能で、1 次元問題に帰着できる。この場合には両者の対応する固有値を k_i,d_i としたとき、A_h の固有値はそれぞれ 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ hk_i & 1 + hd_i \end{pmatrix}$$

の固有値となる。この固有値 λ_i は 2 次方程式

$$(1 - \lambda_i)(1 + hd_i - \lambda_i) - h^2k_i = 0$$

の解として求まり、$|\lambda_i| < 1$ となるためには、

- $d_i^2 - 4k_i < 0$ かつ $hk_i < d_i$
- $d_i^2 - 4k_i \geq 0$ かつ $hd < \min(4, 2 + k_ih^2/2)$

が必要十分である。これを h について解くと、

$$h < 2/k_i^{1/2} \quad (12)$$

となる。すなわち、K' の最大固有値 k_0 を求め、式 12 により許容される最大の h が決められる。ここで、$k_i^{1/2}$ は固有振動数にあたり、サンプリング定理を思わせる結果となっている。

h が決定されれば、d_i の条件も自動的に決まるが、D を何らかの形でパラメタ化しておかないと、実用上設定が困難である。そこで、Rayleigh 減衰と呼ばれる減衰力

$$D' = d_0I + \alpha K'$$

を仮定する [3]。ここで、第 1 項は空気抵抗などを表す定数項で、よく用いられる。第 2 項はバネの強さに比例する項で、強いバネを「狙い打ち」して安定化させる効果がある。この場合には、

$$h - d_0/k_0 > \alpha$$

が満たされれば、系は安定となる。

6. まとめ

線形バネ質点系シミュレーションの安定性を定式化し、安定条件を理論的に解明した。その結果、陰的オイラー法では、M,D,K が正定値であれば常に安定であることを示し、陽的オイラー法に対しては、時間刻み h および減衰行列 D の決定法を具体的に導出した。これにより、陽的オイラー法も「安心」して利用することが可能となる。また、陽的オイラー法での最大時間刻みと、陰的オイラー法との計算コストの比に基づき、アプリケーション毎に、陰陽どちらが有利か検討することも可能となる。

参考文献

[1] D Baraff, A Witkin, Large steps in cloth animation, Siggraph'98, pp.43-54 (1998).

[2] K Choi, H Ko, Stable but resposive cloth, Siggraph2002, pp.604-611 (2002).

[3] D James, D Pai, DyRT: Dynamic response textures for real time deformation simulation with graphics hardware, Siggraph2002, pp.582-585 (2002).