

## FOBOS を用いたスパース性を持つインパルス応答の推定

### Estimation of a Sparse Impulse Response Using FOBOS

奇藤 圭人† 田中 諒‡ 村上 隆啓✦

Keito Kito Ryo Tanaka Takahiro Murakami

**アブストラクト** 本稿では、音響空間のインパルス応答に代表されるスパース性を持つインパルス応答の推定法として FOBOS (Forward Backward Splitting) と呼ばれる最適化手法を応用した手法を提案する。FOBOS は損失項および正則化項と呼ばれる 2 つの項からなる評価関数を、効率よく最適化することができるアルゴリズムである。提案法では、未知のシステムと並列に推定システムを構成し、それらのシステムに既知の信号を入力した時に得られる出力の差を推定雑音として、損失項に推定雑音の尖度、正則化項に L1 ノルムを持つ評価関数を構成し、これを FOBOS によって最適化することで未知のインパルス応答を推定する。この評価関数では、尖度によって非ガウス性を評価し、また、L1 ノルムによってスパース性を評価している。そのため、提案法では非ガウス性とスパース性を同時に最適化している。雑音環境下におけるシミュレーションによって、提案法が従来法よりも SNR を 10dB 以上改善することが示された。

### 1. はじめに

インパルス応答の推定は様々な信号処理技術において必要不可欠な技術である。例えば音響信号処理では、音響空間のインパルス応答を推定することで、一般的な部屋の中でもコンサートホールのような音場を再現することができ、また、エコーキャンセラでは音の伝達経路を表すインパルス応答を用いることでエコーを除去できる。さらには、建造物の非破壊検査においても音響信号を用いたインパルス応答推定法が応用されている[1]。

これまでに、インパルス応答を推定する手法として MSE (Mean Square Error) アルゴリズム[2]を用いた手法、LMS (Least Mean Square) アルゴリズム[2]を用いた手法お

よび TSP (Time-Stretched Pulse) 信号を用いた手法[3]などが提案されている。MSE アルゴリズムを用いた手法では、推定システムを未知システムと並列に構成し、これらのシステムに既知である信号を入力して得られる出力信号の差を推定誤差として、推定誤差の 2 乗平均が最小になるようにシステムを推定する。LMS アルゴリズムを用いた手法は、MSE アルゴリズムを用いた手法を適応アルゴリズムへと改良した手法である。TSP 信号を用いた手法では、パルス信号を時間的に引き伸ばした TSP 信号を未知システムへの入力信号とし、そのときの未知システムからの出力信号と TSP 信号との畳み込み和を計算することによってインパルス応答を推定する。とりわけ、TSP 信号を用いた手法は音響インパルス応答の推定によく用いられている。近年は、独立成分分析[4]を用いたインパルス応答の推定法も盛んに研究されている[5][6]。独立成分分析とは、信号間の独立性を用いて信号の特徴を抽出する手法である。文献[5]では MSE アルゴリズムを用いた手法と同じ推定システムを用いており、既知の信号を入力して得られる推定誤差と入力信号間の相互情報量を最小化することで、インパルス応答を推定している。また、文献[6]でも同様のシステムを用いて、推定誤差の尖度の 2 乗を最大化することで、インパルス応答を推定している。これらの信号の独立性を利用した方法は、従来の MSE アルゴリズムを利用した方法に代表される最小 2 乗誤差規範に基づく方法と比較して良好な結果が得られることが報告されている[5][6]。

本稿では、音響インパルス応答の推定を想定している。音響インパルス応答は、振幅が零である要素が多く存在しており、スパース性を持つ。そこで、スパース性を利用したインパルス応答推定を行う。

スパース性を利用したインパルス応答推定法は、今までにも様々な手法が提案されている[7][8]。文献[7]では、

† 明治大学大学院理工学研究科電気工学専攻

‡ 明治大学研究・知財戦略機構

✦ 明治大学理工学部電気電子生命学科

PNLMS (Proportionate Normalized Least Mean Square)と呼ばれるスパース性に応じた可変のステップサイズを持つLMS アルゴリズムを用いることで、スパース性を持つインパルス応答を推定している。また、文献[8]では、近接勾配法と呼ばれる近接点法と勾配法を組み合わせた最適化手法を用いることで、スパース性を持ったインパルス応答の推定を行っている。

一方、スパース性はビッグデータ処理、圧縮センシングおよび画像修復など様々な技術でも利用されており、近年は情報理論、統計学および信号処理などの多岐にわたる分野でスパース最適化の研究が盛んに行われている[9]-[13]。スパース最適化は、 $L_0$  ノルムを最小化することと等価である。しかし、 $L_0$  ノルム最小化は非線形最適化となり、問題を解くことは困難である。そのため、 $L_0$  ノルム最小化を緩和した問題である  $L_1$  ノルム最小化が注目されており、 $L_1$  ノルムを最小化するために様々な手法が提案されている[10]-[13]。

本稿では、 $L_1$  ノルム最小化手法の一つである FOBOS (Forward Backward Splitting) [13]に着目する。FOBOS の特徴は、損失項と正則化項からなる評価関数を、2つのステップによって最適解を求めることである。提案法では、損失項に推定雑音の尖度、正則化項に  $L_1$  ノルムをもつ評価関数を、FOBOS を用いて最適化することでインパルス応答を推定する。これにより、独立性とスパース性の両方が同時に最適化されるため、インパルス応答の推定精度が改善される。

## 2. モデル

本稿では下式で表される離散時間 FIR システムを考える。

$$x(t) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)s(t-n) + e(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t)$ は観測信号、 $h(t)$ は長さ $L$ のインパルス応答、 $s(t)$ は平均が零の入力信号、 $e(t)$ は平均が零で $s(t)$ と統計的に独立な雑音、 $t$ は離散時間を表すインデックスである。また、 $h(t)$ は未知、 $x(t)$ および $s(t)$ は既知とする。

式(1)をベクトルを用いて表現すると、下式となる。

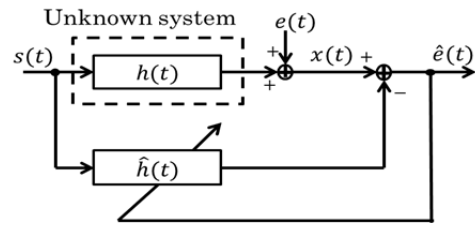


図1. システムのブロック図

$$x(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{s}(t) + e(t) \quad (2)$$

ここで、

$$\mathbf{s}(t) = [s(t), s(t-1), \dots, s(t-L+1)]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{h} = [h(0), h(1), \dots, h(L-1)]^T \quad (4)$$

であり、 $T$ はベクトルまたは行列の転置を表す。

図1は、本稿で用いるシステムのブロック図である。

ここで、

$$\hat{e}(t) = x(t) - \hat{\mathbf{h}}^T \mathbf{s}(t) \quad (5)$$

は推定雑音であり、

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{h}(0), \hat{h}(1), \dots, \hat{h}(L-1)] \quad (6)$$

は $\mathbf{h}$ の推定値である。本稿では、 $\hat{e}(t)$ の統計量を用いて $\hat{\mathbf{h}}$ を求める。

## 3. 既存法

### 3.1 MSE アルゴリズムを用いた手法

MSE アルゴリズムを用いた手法[2]は、 $\hat{e}(t)$ の2乗平均を最小にすることでインパルス応答を推定する方法である。この手法では、下式で与えられる評価関数 $J_m(\hat{\mathbf{h}})$ を用いる。

$$J_m(\hat{\mathbf{h}}) = E\{\hat{e}^2(t)\} \quad (7)$$

ここで、 $E\{\cdot\}$ は期待値を表す。この評価関数を最小にする最適解は、下式で求めることができる。

$$\hat{\mathbf{h}} = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^T(t)\}^{-1} E\{\mathbf{s}(t)x(t)\} \quad (8)$$

### 3.2 尖度を用いた推定法

尖度を用いた手法[5]では、 $e(t)$ と $s(t)$ の独立性を利用しており、独立性を測る尺度として $\hat{e}(t)$ の非ガウス性を表す尖度を用いて、それを零から遠ざけることによってインパルス応答を推定する。なお、この手法では、 $e(t)$ は非ガウス分布に従うと仮定している。

平均が零の確率変数 $a$ の尖度は下式で定義される。

$$\text{kurt}(a) = E\{a^4\} - 3E\{a^2\}^2 \quad (9)$$

$a$ がガウス分布に従う場合、 $\text{kurt}(a) = 0$ となる。一方、中心極限定理より、ある確率変数が互いに独立である確率変数の和で構成されていた場合、その確率分布は元の確率分布よりもガウス分布に近づく[14]。そのため、 $\hat{e}(t)$ が $s(t)$ と $e(t)$ のどちらも含む場合、つまり、 $\hat{\mathbf{h}} \neq \mathbf{h}$ の場合、 $\hat{e}(t)$ の確率分布はガウス分布に近くなり、 $\hat{e}(t)$ の尖度は零に近づく。一方、 $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}$ の場合は、 $\hat{e}(t)$ と $e(t)$ が等しくなり、 $\hat{e}(t)$ の尖度は零から遠ざかる。すなわち、 $\hat{e}(t)$ の尖度を零から遠ざけることによってインパルス応答を推定することができる。

以上の性質を利用して、尖度を用いた手法では下式で与えられる評価関数 $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ を用いる。

$$J_k(\hat{\mathbf{h}}) = (E\{\hat{e}^4(t)\} - 3)^2 \quad (10)$$

$J_k(\hat{\mathbf{h}})$ は、 $\hat{e}(t)$ の分散を1に正規化した場合の尖度を用いており、 $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ を最大化することによって $\hat{\mathbf{h}}$ を求める。 $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ を最大化する $\hat{\mathbf{h}}$ は、勾配法に基づいて下式のような更新式によって得られる。

$$\hat{\mathbf{h}} \leftarrow \hat{\mathbf{h}} + \mu_k \frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{h}})}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \quad (11)$$

ここで、 $\mu_k$ はステップサイズパラメータであり、また、

$$\frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{h}})}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = 8(E\{\hat{e}^4(t)\} - 3)E\{s(t)\hat{e}^3(t)\} \quad (12)$$

である。

## 4. 提案法

### 4.1 評価関数の設定

本稿では、 $s(t)$ と $e(t)$ の独立性と $\mathbf{h}$ のスパース性の両方を利用して、 $\hat{\mathbf{h}}$ を求める。 $s(t)$ と $e(t)$ の独立性に関しては、3.2節で説明した手法と同様に、 $\hat{e}(t)$ の尖度を用いる。また、 $\mathbf{h}$ のスパース性に関しては $\hat{\mathbf{h}}$ のL1ノルムを用いる。以上より、提案法では下式の評価関数 $J(\hat{\mathbf{h}})$ を定義する。

$$J(\hat{\mathbf{h}}) = J_k(\hat{\mathbf{h}}) + \lambda \|\hat{\mathbf{h}}\|_1 \quad (13)$$

ここで、 $\lambda$ は独立性およびスパース性の比率を決めるパラメータ、 $\|\cdot\|_1$ はL1ノルムを表す。提案法では、 $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ および $\|\hat{\mathbf{h}}\|_1$ を同時に最適化することで $\hat{\mathbf{h}}$ を求める。

### 4.2 評価関数の最適化

式(13)で表される評価関数は、第1項を損失項、第2項を正則化項とみなすことで、FOBOS [13]によって最適化することができる。FOBOSでは、損失項と正則化項の2つの項からなる評価関数について、2つのステップによって最適解を求める。1つ目のステップでは、損失項のみの勾配を求め、パラメータを更新する。2つ目のステップでは、1つ目のステップで更新したパラメータを用いて閉じた形での正則化を行う。一方で、FOBOSでは損失項および正則化項は凸関数でなければならないという制約がある。そのため、本来は凸関数ではない $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ を評価関数に使用することができない。しかし、 $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ の解の近傍では凸関数とみなせると仮定することで、提案法では解の近傍での $\hat{\mathbf{h}}$ の更新を行う。

FOBOSによる $J(\hat{\mathbf{h}})$ の最適化の手順は以下の通りである。 $\hat{\mathbf{h}}_i$ を*i*回目の更新によって得られた $\hat{\mathbf{h}}$ とする。まず、式(11)より、損失項である $J_k(\hat{\mathbf{h}})$ のみの勾配を用いて $\hat{\mathbf{h}}_{i+\frac{1}{2}}$ を下式で求める。

$$\hat{\mathbf{h}}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{\mathbf{h}}_i + \mu_k \frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{h}}_i)}{\partial \hat{\mathbf{h}}_i} \quad (14)$$

次に、式(14)で求めた $\hat{\mathbf{h}}_{i+\frac{1}{2}}$ を用いて正則化を行うことで、

$\hat{\mathbf{h}}_{i+1}$ を下式によって求める。

$$\hat{\mathbf{h}}_{i+1} = \underset{\hat{\mathbf{h}}}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_{i+\frac{1}{2}}\|^2 + \mu\lambda \|\hat{\mathbf{h}}\|_1 \right\} \quad (15)$$

ここで、 $\mu$ はL1正則化のステップサイズパラメータである。式(15)の最適解は、閉じた形で与えられ、それは下式で表される。

$$\hat{h}_{i+1}^j = \text{sign} \left( \hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^j \right) \left( \left| \hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^j \right| - \mu\lambda \right) \quad (16)$$

ここで、 $\hat{h}_{i+1}^j$ は $\hat{\mathbf{h}}_i$ の*j*番目の要素である。また、 $\left| \hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^j \right| < \mu\lambda$ のとき、 $\hat{h}_{i+1}^j = 0$ とする。

## 5. シミュレーション

本節では、提案法の有効性を確認するために、スパース性をもったインパルス応答およびセミスパース性を持ったインパルス応答を用いて雑音環境下におけるシミュレ

ーションを行った. 本シミュレーションでは, まず, 提案法を用いて推定したインパルス応答の波形を, 既存法である MSE アルゴリズムを用いた手法および尖度を用いた手法を用いて推定したインパルス応答の波形と比較した. 次に, 入力 SNR を 0dB から 30dB まで 5dB 毎に変化させたときに得られた出力 SNR を, 既存法によって得られた出力 SNR と比較した. 本シミュレーションで使用した入力 SNR (*inputSNR*)および出力 SNR (*outputSNR*)は下式で定義される.

$$\text{inputSNR} = 10 \log_{10} \frac{E\{s^2(t)\}}{E\{e^2(t)\}} [\text{dB}] \quad (17)$$

$$\text{outputSNR} = 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{h}\|_2}{\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\|_2} [\text{dB}] \quad (18)$$

入力信号 $s(t)$ には MATLAB 関数 “randn”を用いて生成した長さ 16000 点の正規分布乱数, 雑音 $e(t)$ には MATLAB 関数 “rand”を用いて生成した一様分布乱数を使用した. また, インパルス応答の長さを $L=800$ , ステップサイズを $\mu_k = 1.0 \times 10^{-4}$ とした. 尖度を用いた手法および提案法において用いたインパルス応答の推定値 $\hat{\mathbf{h}}$ の初期値は, MSE アルゴリズムを用いた手法によって推定したインパルス応答とした. シミュレーションに用いたスパース性を持ったインパルス応答を図 2, セミスパース性を持ったインパルス応答を図 3 に示す. 図 3 に示したセミスパース性を持ったインパルス応答は, 音響インパルス応答を想定しており, 400 点以降に正規分布乱数を印加した.

まず, スパース性を持ったインパルス応答を用いたシミュレーションによって得られた波形を示す. ここでは,  $\|\hat{\mathbf{h}}\|_1$  の比率を決めるパラメータを $\mu\lambda = 5.0 \times 10^{-5}$ , 入力 SNR を 10dB とした. 図 4 に MSE アルゴリズムを用いた手法によって得られたインパルス応答, 図 5 に尖度を用いた手法によって得られたインパルス応答, 図 6 に提案法によって得られたインパルス応答を示す. 図 4 および 5 を見ると, インパルス応答がおおまかに推定されているのがわかる. 特に, 尖度を用いた手法によって推定したインパルス応答は, MSE アルゴリズムを用いた手法によって推定したインパルス応答よりも雑音が減っている. 一方, 図 6 を見ると, 提案法では尖度を用いた手法よりもさらに雑音

が減っており, ほとんど正確なインパルス応答が推定されているのが分かる.

次に, セミスパース性を持ったインパルス応答を用いたシミュレーションによって得られた波形を示す. ここでは,  $\|\hat{\mathbf{h}}\|_1$  の比率を決めるパラメータを $\mu\lambda = 1.0 \times 10^{-5}$ , 入力 SNR を 10dB とした. 図 7 に MSE アルゴリズムを用いた手法によって推定したインパルス応答, 図 8 に尖度を用いた手法によって推定したインパルス応答, 図 9 に提案法によって推定したインパルス応答を示す. 図 7 および 8 を見

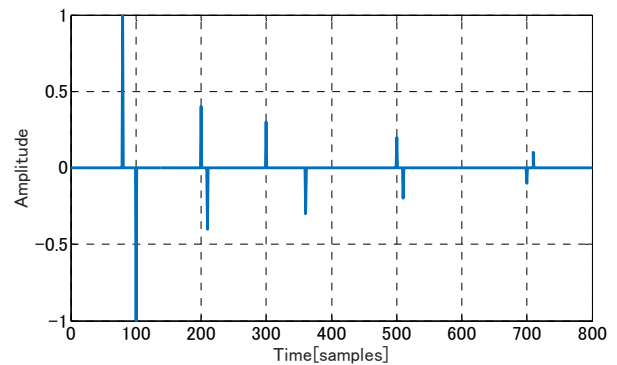


図 2. スパース性を持ったインパルス応答

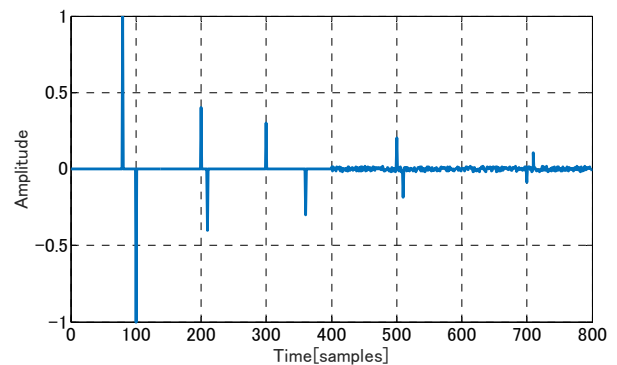


図 3. セミスパース性を持ったインパルス応答

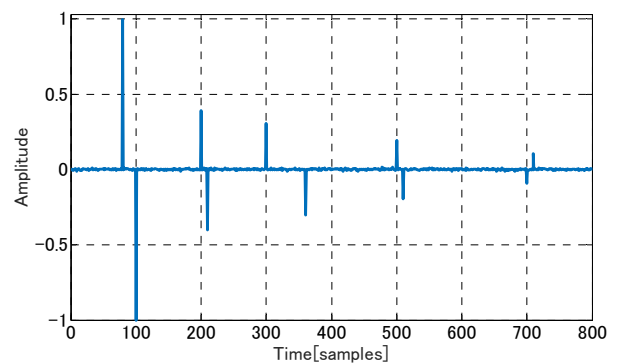


図 4. MSE アルゴリズムを用いた手法による推定結果(スパース性を持ったインパルス応答の場合, 入力 SNR10dB)

ると、スパース性を持ったインパルス応答を推定した時と同様に、MSE アルゴリズムを用いた手法より尖度を用いた手法の方が、雑音を少なくインパルス応答を推定できているのが分かる。一方、図 9 を見ると、提案法では 400 点目までの部分は正しくスパースに推定できており、また、400 点目以降の部分も正しく推定できていることが分かる。

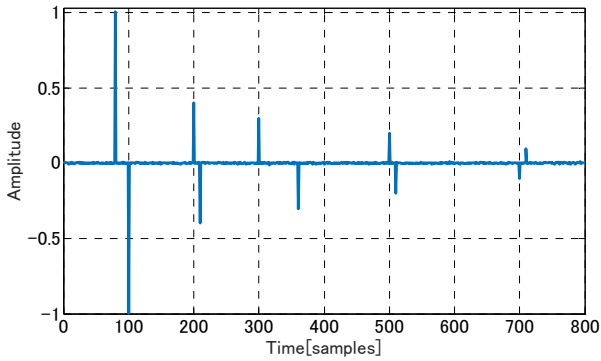


図 5. 尖度を用いた手法による推定結果(スパース性を持ったインパルス応答の場合, 入力 SNR10dB)

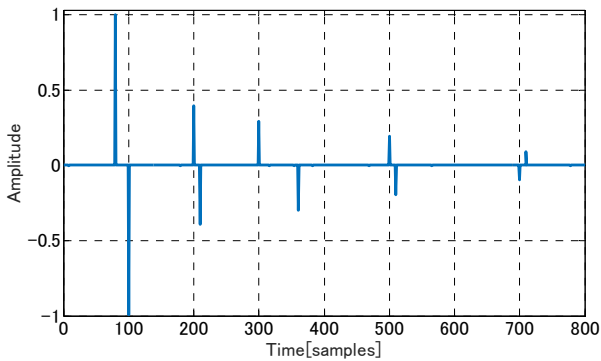


図 6. 提案法による推定結果(スパース性を持ったインパルス応答の場合, 入力 SNR10dB)

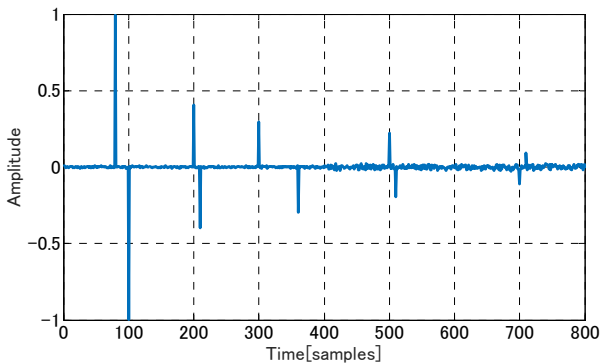


図 7. MSE アルゴリズムを用いた手法による推定結果(セミスパース性を持ったインパルス応答の場合, 入力 SNR10dB)

最後に、入力 SNR を変化させた時に得られた出力 SNR を示す。ここでは、各入力 SNR においてシミュレーションを 100 回行い、各試行によって得られた出力 SNR を平均した。使用したパラメータは上記のシミュレーションで用いたものと同じとした。図 10 にスパース性を持ったインパルス応答を用いたシミュレーションの結果、図 11 にセミスパース性を持ったインパルス応答を用いたシミュ

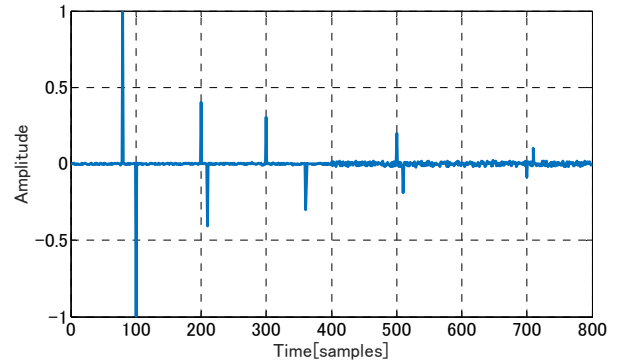


図 8. 尖度を用いた手法による推定結果(セミスパース性を持ったインパルス応答の場合, 入力 SNR10dB)

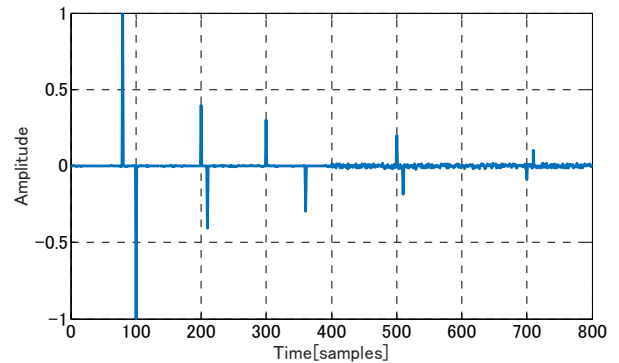


図 9. 提案法による推定結果(セミスパース性を持ったインパルス応答の場合, 入力 SNR10dB)

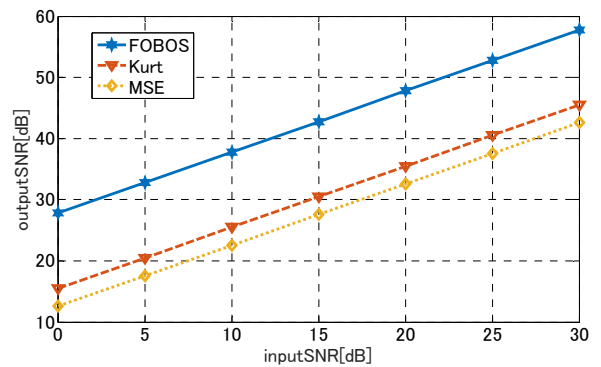


図 10. 入力 SNR と出力 SNR の関係(スパース性を持ったインパルス応答の場合)

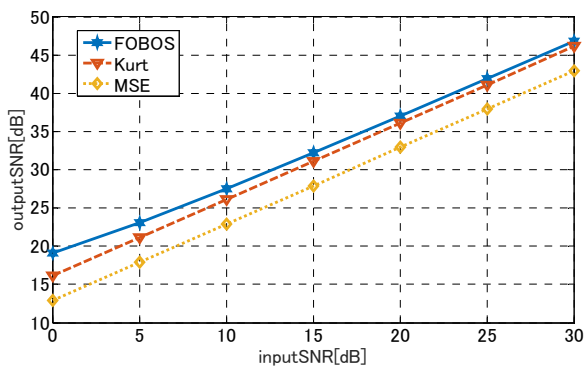


図 11. 入力 SNR と出力 SNR の関係(セミスパース性を持ったインパルス応答の場合)

シミュレーションの結果を示す。図 10 を見ると、提案法は MSE アルゴリズムを用いた手法より約 15dB、尖度を用いた手法より約 10dB も出力 SNR を改善していることが分かる。また、図 11 を見ると、提案法によって MSE アルゴリズムを用いた手法より約 5dB、尖度を用いた手法よりも約 1~2dB 出力 SNR が改善されていることが分かる。これらの結果より、提案法は従来法と比較してインパルス応答の推定精度を改善することが示された。

## 6. まとめ

本稿では、スパース性を持ったインパルス応答を推定する手法として、信号の独立性とインパルス応答のスパース性を同時に最適化するための評価関数を設定し、それを FOBOS によって効果的に最適化するアルゴリズムを提案した。提案法では、信号の独立性の尺度として尖度を、また、インパルス応答のスパース性の尺度として L1 ノルムを利用した。シミュレーションの結果より、スパース性を持ったインパルス応答およびセミスパース性を持ったインパルス応答の推定において、既存法である MSE アルゴリズムを用いた手法や尖度を用いた手法と比較して、提案法は SNR を大幅に改善することが示された。今後は、セミスパース性を持ったインパルス応答の推定における推定精度のさらなる改善を行う。

## 参考文献

[1] 藤岡 豊太, 永田 仁史, 安倍 正人, “インパルスハンマを用いた非破壊診断のための時間領域有限差分法によるケーソンの衝撃弾性波解析”, 日本音響学会誌, Vol.71, No.2,

pp.53-64 (2015).

- [2] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall (2001).
- [3] Y. Suzuki, F. Asano, H.-Y. Kim, and Toshio Sone, “An Optimum Computer-Generated Pulse Signal Suitable for the Measurement of very Long Impulse Responses”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.97, No.2, pp.1119-1123 (1995).
- [4] A. Hyvärinen, J. Karhunen and E Oja, *Independent Component Analysis*, Wiley-Interscience (2001).
- [5] J. Yang and H. Sakai, “A Robust ICA-Based Adaptive Filter Algorithm for System Identification”, *IEEE Trans. Circuits and Systems- II*, Vol.55, No.12, pp.1259-1263 (2008).
- [6] K. Kito and T. Murakami, “Estimation of an Impulse Response Using Kurtosis”, *Proc. AsiaSim 2014*, CCIS 474, pp.26-34 (2014).
- [7] D. Dutteiler, “Proportionate Normalized Least-Mean-Squares Adaptation in Echo Cancelers”, *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, Vol.8, No.5, pp.508-518 (2000).
- [8] H. Kuroda, S. Ono, M. Yamagishi and I. Yamada, “Exploiting Group Sparsity in Nonlinear Acoustic Echo Cancellation by Adaptive Proximal Forward Backward Splitting”, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E96-A, No.10, pp.1918-1927 (2013).
- [9] 田中 利幸, “圧縮センシングの数理”, *IEICE Fundamentals Review*, Vol.4, No.1, pp.39-47 (2010).
- [10] M. Zibulevsky and M. Elad, “L1-L2 Optimization in Signal and Image Processing”, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 27, No.3, pp.76-88 (2010).
- [11] 雨車 和憲, 小西 克己, 高橋 智博, 古川 俊博, “級数の重みを用いた IRLS アルゴリズムに基づくスパース最適化手法の提案”, 第 27 回信号処理シンポジウム, pp.586-591 (2012).
- [12] J. Langford, L. Li and T. Zhang, “Sparse Online Learning via Truncated Gradient”, *Journal of Machine Learning Research*, Vol.10, pp.777-801 (2009).
- [13] J. Duchi and Y. Singer, “Efficient Online and Batch Learning Using Forward Backward Splitting”, *Journal of Machine Learning Research*, Vol.10, pp.2899-2934 (2009).
- [14] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Europe (2002)