E-029

周波数領域における離散 Gaussian の畳み込みによる高精度な高速 Gabor wavelet 変換
Fast and High Accuracy Gabor Wavelet Transform using Convolution of Discrete Gaussian in Frequency Domain

石川 貴宣 †　　荒井 秀一 †
Takanobu Ishikawa　　Shuichi Arai

1. まえがき

非定常信号の時間-周波数解析には Gabor wavelet 変換が広く用いられている．しかし，Gabor wavelet 変換をはじめとする wavelet 変換には計算量が非常に多いという問題点が存在する．wavelet 変換の高速化手法というと，離散 wavelet 変換に対する Mallat アルゴリズム [1] が代表的であるが，離散 wavelet 変換では基底関数が正規直交性を有する必要があるため [2]，Gabor wavelet のような非正規直交基底にはこのアルゴリズムを適用することはできない．本稿では Gaussian の畳み込みに関する数学的性質に着目し，高速フーリエ変換 (FFT) を用いた Gabor 変換によって得られる Gabor スペクトルから Gabor wavlet 係数を合成することで，連続 wevelet 変換を高速化する手法を提案する．

2.Gabor wavelet 係数合成法

Gabor 変換は, 短時間フーリエ変換 (STFT) の窓関数に Gaussian を用いる解析法である．

$$X_\sigma(t_0,\omega) = \int w_\sigma(t-t_0)\cdot x(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \qquad (1)$$

$$\text{ただし } w_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Gabor 変換においては，Gauss 窓の標準偏差 σ が時間，周波数分解能を決定するが，FFT を用いるため時刻，周波数によらず時間，周波数分解能は固定である．これに対して合成目標である wavelet 係数は解析周波数毎に分解能が異なる．また，Gabor 変換において周波数 bin は線形の間隔で求まるのに対して，wavelet 係数は非線形の間隔で求まる．つまり，時間，周波数分解能及び解析周波数を対応させる必要がある．

一般に，Gabor 変換において異なる分解能のスペクトルを得るには異なる窓長の Gabor 変換を再度行わなければらない．これに対して本稿では，ある窓長で計算した Gabor スペクトルから異なる分解能のスペクトルを算出する方法を提案する．異なる分解能，つまり異なる σ の Gabor

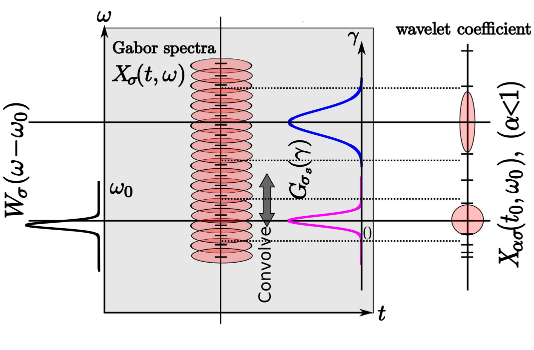

図 1: 合成法の概要

スペクトルを直接計算するために，Gaussian 同士の畳み込みが標準偏差の異なる Gaussian になるという Gaussian の数学的性質に着目した．この性質を周波数域で考えると

$$W_{\alpha\sigma}(\omega) = \frac{A_s}{2\pi}\int W_\sigma(\omega-\gamma)G_{\sigma_s}(\gamma)d\gamma \qquad (2)$$

$$\text{ただし } \sigma_s = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sigma, \quad A_s = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha<1)$$

が得られる．ここで α は scaling factor，A_s は振幅補正項である．この式は Gauss 窓と Gaussian の周波数特性の畳み込みによって，任意スケールの標準偏差 $\alpha\sigma$ を持つ Gauss 窓の周波数特性が得られることを意味している．この性質を Gabor 変換の式に代入すると，以下のような過程を経て，式 (3) が得られる．

$$\begin{aligned}
&X_{\alpha\sigma}(t,\omega_0)\\
&= \int w_{\alpha\sigma}(\tau-t)\cdot x(\tau)\cdot e^{-j\omega_0\tau}d\tau\\
&= \int W_{\alpha\sigma}(\omega)\cdot X_(\omega+\omega_0)\cdot e^{j\omega t}d\omega\\
&= \int \frac{A_s}{2\pi}\int W_\sigma(\omega-\gamma)\cdot G_{\sigma_s}(\gamma)d\gamma\\
&\quad \cdot X_(\omega+\omega_0)\cdot e^{j\omega t}d\omega\\
&\quad \omega-\gamma=\omega' \text{とおくと } d\omega = d\omega' \text{であり}\\
&= \frac{A_s}{2\pi}\underline{\iint W_\sigma(\omega')\cdot X_(\omega'+\omega_0+\gamma)\cdot e^{j\omega' t}d\omega'}\\
&\quad \cdot G_{\sigma_s}(\gamma)\cdot e^{j\gamma t}d\gamma \qquad (3)
\end{aligned}$$

式 (3) の下線部は標準偏差 σ の Gauss 窓による Gabor 変換なので，最終的に

$$X_{\alpha\sigma}(t,\omega_0) = \frac{A_s}{2\pi}\int e^{j\gamma t}\cdot X_\sigma(t,\omega_0+\gamma)\cdot G_{\sigma_s}(\gamma)d\gamma \qquad (4)$$

となる．この式は図.1 に示すように，入力信号に Gabor 変換を施して計算した Gabor スペクトル $X_\sigma(t,\omega)$ に対して，Gaussian $G_{\sigma_s}(\gamma)$ を周波数方向に畳み込むことで，異なる分解能のスペクトル $X_{\alpha\sigma}(t_0,\omega_0)$ が算出できることを意味している．このとき，周波数毎に畳み込む Gaussian の標準偏差 σ_s を変えると，周波数毎に任意の分解能に変換できる．さらに，畳み込みの中心の周波数においてスペクトルを合成できるので，畳み込みの中心を変えることで任意の周波数においてスペクトルが得られる．これによって，任意の解析周波数において wavelet 係数に対応した分解能のスペクトルが算出可能である．

ここまで，Gabor スペクトルから wavelet 係数を合成する方法を示したが，これは連続域での式なので，これを離散系で表現するために，Gaussian の離散化間隔を Ω, 畳み込みの項数を M_ω として式 (4) の畳み込み積分を離散化すると

$$\widetilde{X}_{\alpha\sigma}(t,\omega_0) = \frac{A_s}{2\pi}\cdot \sum_{m=-M_\omega}^{M_\omega}\{X_\sigma(t,\omega+m\Omega)\cdot G_{\sigma_s}(m\Omega)\cdot e^{-j(m\Omega)t}\}\cdot\Omega \qquad (5)$$

†東京都市大学大学院 工学研究科
Graduate School of Engineering, Tokyo City University

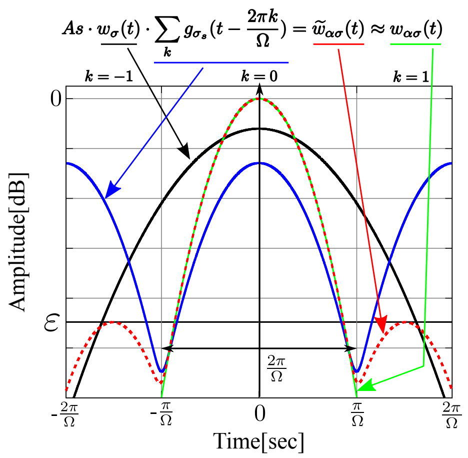

図 2: 時間域における合成 Gauss 窓の特性

のように書ける．以後，$G_{\sigma_s}(m\Omega)$ を離散 Gaussian，式 (5) によって算出できるスペクトル $\widetilde{X}_{\alpha\sigma}(t,\omega_0)$ を合成スペクトルと呼ぶ．本来，畳み込みの項数 M_ω は無限項であるが，実際に計算するためには有限項として定めなければならない．また，Gaussian の離散化間隔 Ω も定める必要がある．つまり，提案する合成法は 2 つのパラメータの設計が必要である．

2.1. 計算精度に基づくパラメータの設計

式 (5) のように畳み込みを離散化すると，当然合成スペクトルには誤差が生じる．そこで，ユーザが許容できる誤差 ε を設定し，合成誤差が ε を下回るような Ω 及び M_ω の設計法を検討する．

まず，離散化間隔 Ω の設計を行う．合成は周波数域で行うが，合成誤差は時間域で生じる．周波数域で Gaussian を離散化することによって，時間域では周期化する．合成スペクトルは合成元のスペクトルと離散 Gaussian の畳み込みによって得られるが，時間域では積になるので，周期化の影響によって図 2 における破線のように合成 Gauss 窓が誤差成分を持ってしまう．離散化間隔 Ω が大きくなるほど，この誤差成分も大きくなる．そこで，誤差成分のピークが許容誤差 ε を下回るという条件で Ω を設計すると，

$$\Omega \quad \leq \quad \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{-\ln\varepsilon}\cdot\sigma}\cdot\sqrt{1-\alpha^2} \tag{6}$$

と求まる．この式を満たせば，ユーザが指定した計算精度を担保できる Ω の設計が可能である．

次に畳み込みの項数 M_ω を設計する．本来，無限項の畳み込みを有限長で打ち切ることで当然，誤差が生じるが，Gaussian は単調減少関数なので，ダイナミックレンジを考慮して畳み込みの項数を決定すれば，計算精度は劣化しない．離散 Gaussian の最大振幅に対する減衰比が許容誤差 ε 以下になる条件で M_ω を設計すると，

$$M_\omega \quad \geq \quad \frac{1}{\pi\alpha}(-\ln\varepsilon) \tag{7}$$

のように条件が求まる．これらの条件を満たすようにパラメータを設計することで，任意の計算精度を担保した合成が可能である．

3. 計算量の評価

次に，通常の Gabor wavelet 変換と提案手法の計算量を比較し，提案手法の有効性を示す．ここでは，計算量を支配する積和演算量を指標とする．連続 wavelet 変換では mother wavelet を $1 \sim S$ までスケーリングして wavelet 係数を計算するが，計算機上において scaling factor s は離散的である．スケーリングを Δs 刻みで行うとすると，scaling factor は整数 a を用いて $s = a\cdot\Delta s+1$　$(a : 0 \sim (S-1)/\Delta s)$ と書ける．

通常の Gabor wavelet 変換の計算量を求める式は我々が以前に示した式を利用する [3]．通常の Gabor wavelet 変換の計算量 O_w は

$$O_w = \sum_{a=0}^{(S-1)/\Delta s} 2(2\sqrt{-2\ln\varepsilon}\cdot f_s\cdot s\cdot\sigma+1) \tag{8}$$

のように書ける．ここで，f_s はサンプリング周波数である．

一方，提案手法の計算量は FFT の計算量と合成の計算量の和である．提案手法の計算量 O_p は

$$O_p = 4\cdot N\log_2 N + N + \sum_{a=0}^{(S-1)/\Delta s} 4(2M_\omega+1) \tag{9}$$

と書ける．ここで，N[sample] はフレーム長である．式 (9) の第一項は FFT，第二項は窓掛け，第三項は合成の計算量である．ただし，FFT 及び合成は複素数の計算を考慮し，4 倍の計算量が必要となる．

計算量を評価するための実験条件は，中心角周波数 $\omega_0 = 2\pi\cdot f_0$[rad/sec]($f_0 = 14080$[Hz])，サンプリング周波数 $f_s = 44.1$[kHz]，標準偏差 $\sigma = 1.98\cdot10^{-4}$[sec]，スケーリングの刻み幅 $\Delta s = 0.1$ とし，許容誤差を $\varepsilon_{16} = 3.05\cdot10^{-5}$(16bit 量子化誤差), $\varepsilon_{24} = 1.19\cdot10^{-7}$(24bit 量子化誤差) の 2 種類，スケーリングの最大値を $S = 32, 64, 128, 256$ の 4 種類とした．この実験条件における計算量比 $r = O_p/O_w$ を表 1 に示す．結果からスケーリングの最大値 S が大きいほど計算量を削減できていることがわかる．例えば，S=256 までスケーリングし，$f_{min} = 55$[Hz] から $f_0 = 14080$[Hz] までの解析を実行する場合では 1/20 以下に計算量を削減できる．

表 1: 計算量削減比

f_s \ S	32	64	128	256
ε_{16}	0.291	0.160	0.087	0.047
ε_{24}	0.253	0.146	0.077	0.042

4. 結論

本稿では Gaussian の数学的性質に着目し，Gabor スペクトルから wavelet 係数を合成する手法を提案した．また，合成によって生じる誤差について議論し，合成誤差をユーザが設定した許容誤差に収めるために必要なパラメータの条件を示した．さらに計算量の検討を行い，提案手法は計算精度を保ちつつ，Gabor wavelet 変換の計算量を 1/20 以下に削減できることが明かになった．

参考文献

[1] S.G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.11, no.7, pp.674-693, Jul. 1989.

[2] 山田道夫，"ウェーブレット解析とその応用，"信学誌，vol.J76，no.5，pp.518-528，May 1993.

[3] 稲葉祥平, 荒井秀一，"wavelet 係数と wavelet の畳み込みによる Gabor 関数を基底とする連続 wavelet 変換の計算量削減，" 電子情報通信学会論文誌 D, vol.J97-D, no.6, pp.1133-1141, June. 2014.