RA-002

区分線形関数に対する最適合成順問題の計算量
On the Complexity of finding Optimal Composition Orderings for Piecewise Linear Functions

河瀬康志 † 牧野和久 ‡ 勢見賢人 §
Yasushi Kawase Kazuhisa Makino Kento Seimi

1. はじめに

本研究では，**最適合成順問題**を導入し，その計算複雑性を議論する．入力として n 個の実関数 $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(i\in[n])$ と実数 $c\in\mathbb{R}$ が与えられる．ただし，$[n]=\{1,2,\dots,n\}$ とする．このとき，**最大全合成順問題**は $f_{\sigma(n)}\circ f_{\sigma(n-1)}\circ\cdots\circ f_{\sigma(1)}(c)$ を最大化する n 次の置換 σ を求める問題である．**最大部分合成順問題**は $f_{\sigma(k)}\circ f_{\sigma(k-1)}\circ\cdots\circ f_{\sigma(1)}(c)$ を最大化する n 次の置換 σ と非負整数 k $(0\le k\le n)$ を求める問題である．また，**最大 k 合成順問題**は，与えられた k について $f_{\sigma(k)}\circ f_{\sigma(k-1)}\circ\cdots\circ f_{\sigma(1)}(c)$ を最大化する n 次の置換 σ を求める問題である．同様に，最小化問題も扱う．

例えば，$f_1(x)=2x-6$，$f_2(x)=\frac{1}{2}x+2$，$f_3(x)=x+2$，$c=2$ という入力が与えられたとき，最大全合成順問題の最適値は $f_1\circ f_3\circ f_2(c)=f_1(f_3(f_2(c)))=f_1(f_3(c/2+2))=f_1(c/2+4)=c+2=4$ となり，最大部分合成順問題の最適値は $f_3\circ f_2(c)=5$ となる．

最適合成順問題は基本的な問題であり，次で示すように時間依存スケジューリング問題や自由順序秘書問題の自然な拡張である．

関連研究

時間依存スケジューリング問題

単一機械での終了時刻最小化時間依存スケジューリング問題は，開始時刻 $t_0=0$ と処理開始時刻に依存する処理時間 $p_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をもつ仕事 J_i $(i\in[n])$ が与えられ，すべての仕事の処理が完了する時刻を最小化する問題である [3, 9–11, 16, 17]．ただし，処理を行う機械は 1 台であり，仕事を同時に 1 つしか処理することはできないとする．ここで，各 p_i は任意の $t\ge t_0$ と $s\ge 0$ に対して $p_i(t)\le s+p_i(t+s)$ であると仮定する．これは，仕事 J_i の処理を早く開始した方が，処理を早く終えることができることを意味するもので，自然な仮定である．

古典的なスケジューリング問題では処理時間は開始時刻によらず一定であるのに対して，この問題では処理時間が時刻に依存して変化する．このモデルは学習効果や疲労による処理時間の変化を考慮するために導入された．

この時間依存スケジューリング問題の各仕事 J_i に対して，$f_i(t):=t+p_i(t)$ と定義すると，$f_i(t)$ は時刻 t に仕事 J_i の処理を開始する場合の処理が終了する時刻を表す．さらに，時刻 t_0 から n 次置換 σ の順にしたがって仕事を処理するときの終了時刻は $f_{\sigma(n)}\circ f_{\sigma(n-1)}\circ\cdots\circ f_{\sigma(1)}(t_0)$ となる．これより，単一機械での終了時刻最小化時間依存スケジューリング問題は，最小全合成順問題として記述できることがわかる．

Gawiejnowicz と Pankowska [9]，Gupta と Gupta [10]，Tanaev ら [16]，Wajs [17] は処理時間が線形に増加するならば，$p_i^{-1}(0)$ についての降順が最適な処理順序を与えることを示し，$\mathrm{O}(n\log n)$ 時間アルゴリズムを構成した．この結果は，$f_i(x)=a_ix+b_i$ $(a_i>1)$ の場合の最小全合成順問題に対応する．Cheng と Ding [4] は，各仕事の処理時間が同じ割合で線形に増加し，かつ締切時刻がある場合に対し，$\mathrm{O}(n^5)$ 時間アルゴリズムを構成した．これは

$$f_i(x)=\begin{cases}ax+b_i & (x\le d_i),\\ +\infty & (x>d_i)\end{cases}\qquad(a>1)$$

の場合の最小全合成順問題に対応する．Ho ら [11] は，処理時間が線形に減少するならば，$p_i^{-1}(0)$ についての降順が最適な処理順序を与えることを示し，$\mathrm{O}(n\log n)$ 時間アルゴリズムを構成した．この問題は，$f_i(x)=a_ix+b_i$ $(1>a_i>0)$ の場合の最小全合成順問題に対応する．さらに Cheng と Ding [3] は，各仕事の処理時間が線形に減少し，かつ締切時刻がある場合には，時間依存スケジューリング問題が NP 困難となることを示した．これは

$$f_i(x)=\begin{cases}a_ix+b_i & (x\le d_i),\\ +\infty & (x>d_i)\end{cases}\qquad(1>a_i>0)$$

の場合の最小全合成順問題に対応する．彼ら [3] は，各仕事の処理時間が線形に増加し締切時刻がある場合と処理時間が線形に減少し処理開始可能時刻がある場合が相互に帰着できることについても指摘している．

自由順序秘書問題

最適合成順問題の別の応用として，秘書問題の自由順序モデル [12] が考えられる．この問題は一種の完全情報秘書問題 [7] であり，マトロイド（ナップサック）秘書問題 [1, 2, 15] や確率的ナップサック問題 [5, 6] と

†東京工業大学 大学院社会理工学研究科
‡京都大学 数理解析研究所
§トーア再保険（株）

も近い問題である．入力として，商品 (応募者) 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$，商品 i の価値 P_i (≥ 0) の確率密度関数 g_i が与えられる．このとき，以下の手続きで 1 つの商品を選択することを考える．はじめに n 次置換 σ を 1 つ選び，σ に従い 1 つずつ商品を順次吟味する．商品の価値は，その商品が吟味された直後に判明し，次の商品を吟味する前までに，その商品を採用するかしないかを決定する．はじめて商品を採用したら，そこでこの手続きを終了する．この手続きの下で，採用される商品価値の期待値を最大化する問題が，確率秘書問題の自由順序モデルである．

各商品 i に対して，$f_i(x) := \mathbb{E}[\max\{P_i, x\}]$ と定義する．特に，P_i が m 値の確率変数であるとき，f_i は単調で凸な $(m+1)$ 区分からなる区分線形関数となる．このとき，自由順序秘書問題は最大全合成順問題 $((f_i)_{i\in[n]}, c = 0)$ とみなすことができることを示す．

商品 i を i 番目に吟味するような戦略について考察する．まず，n 番目の商品以外を採用しなかった場合に採用する商品の期待価値は，商品 n を採用するしかないので $\mathbb{E}[P_n]$ $(= f_n(0))$ となる．また，最後の 2 つ以外を採用しなかった場合には，$P_{n-1} \geq f_n(0)$ であれば商品 $n-1$ を，そうでないならば商品 n を採用することが最適戦略となり，採用する商品の期待価値は $f_{n-1} \circ f_n(0)$ となる．帰納法により，商品 i を吟味したときに，$P_i \geq f_{i+1} \circ \cdots \circ f_n(0)$ ならば採用するのが，最適停止規則となる．よって，吟味の順番を商品 i を i 番目と固定したときの最適な期待値は $f_1 \circ \cdots \circ f_n(0)$ となる．従って，自由順序秘書問題は最大全合成順問題 $((f_i)_{i\in[n]}, c = 0)$ とみなすことができる．

本研究の成果

単調増加な関数 $f_1, \ldots, f_n$ と実数 c に対する最大部分合成順問題は，関数 $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n$ $(\overline{f}_i(x) := \max\{x, f_i(x)\})$ と実数 c に対する最大全合成順問題と等価である．また，関数 $f_1, \ldots, f_n$ と実数 c の最小全合成順 (最小部分合成順) を求めることは，関数 $\tilde{f}_i(x) := -f_i(-x)$ と実数 $-c$ の最大全合成順 (最大部分合成順) を求める問題と等価である．

本研究では，最適合成順問題の計算複雑さについて議論する．特に与えられる関数 f_i が単調でほぼ線形の場合に着目する．

まず，全ての f_i が単調で線形な場合，すなわち $f_i(x) = a_i x + b_i$ $(a_i \geq 0)$ の場合は，効率よく解けることを示す．

定理 1. f_i $(i = 1, \ldots, n)$ を単調非減少な線形関数とするとき，最大部分合成順問題と最大全合成順問題は共に $\mathrm{O}(n \log n)$ 時間で最適解を求められる．

処理時間が線形に減少 (または増加) する時間依存スケジューリング問題は，傾き a_i が全て $a_i < 1$ (または全て $a_i > 1$) を満たす最大全合成順問題とみなすことができる．これらの問題は b_i/a_i の昇順に関数を並べることで最適解が得られることが知られている [9–11,16,17]．この戦略を，傾きが 1 より大きいものと小さいものが混じったような最大部分合成順問題に適用できるよう拡張する．ところが，最大全合成順問題については単純には拡張できない．実際，我々は最適な順序を得るための単純な基準は得られていない．しかし，線形個の最適解の候補を列挙し，その中で最適なものを選ぶというアルゴリズムを用いて，効率的に最適解を求める．

さらに，動的計画法を用いたアルゴリズムで，k 合成順の設定の場合についても多項式時間アルゴリズムを与える．

定理 2. f_i $(i = 1, \ldots, n)$ を単調非減少な線形関数とするとき，最大 k 合成順問題は $\mathrm{O}(kn^2)$ 時間で最適解を求められる．

次に，単調で区分線形な場合を考える．時間依存スケジューリングに関する先行研究 [3] から，与えられる関数 f_i を単調で凹な高々2 区分からなる区分線形関数に限っても，最大全合成順問題は NP 困難だといえる．本研究では，その他の高々2 区分からなる区分線形関数の場合も計算量的に困難であることを示す．

定理 3. (i) 各 f_i を単調増加で凹な高々2 区分からなる区分線形に限っても，最大全（部分）合成順問題は NP 困難である．さらに，P≠NP ならば定数近似アルゴリズムも存在しない．
(ii) 各 f_i を単調増加で凸な高々2 区分からなる区分線形に限っても，最大全（部分）合成順問題は NP 困難である．さらに，P≠NP ならば定数近似アルゴリズムも存在しない．

ここで，f_i が単調増加で凹な高々2 区分からなる区分線形関数の場合には，$\max\{a_i^1 x + b_i^1, a_i^2 x + b_i^2\}$ $(a_i^1, a_i^2 > 0)$ と書けることに注意する．

一方で，単調増加で凸な高々2 区分からなる区分線形関数について，1 区分が定数関数からなるような場合については，多項式時間で解けることを示す．これは，自由順序秘書問題で，各価値 P_i が 2 値の確率変数である場合に対応する．

定理 4. 区分線形関数 $f_i(x) = \max\{a_i x + b_i, c_i\}$ $(a_i \geq 0)$ の最大部分合成順は $\mathrm{O}(n^2)$ 時間で計算できる．

先行研究及び本研究による最大全合成順問題に対する時間計算量を表 1 に示す．ここで，太字は本研究による成果である．

2. 最大部分合成順問題

本節では，単調な線形関数に関する最大部分合成順問題は多項式時間可解であることを示す．この問題は，$\overline{f}_i(x) := \max\{x, f_i(x)\}$ に対する最大全合成順問題として扱ってもよい．

次の二項関係 $\preceq$ は，この問題の解析における中心的な役割を果たす．

表 1: 最大全合成順の計算量 (太字は本研究の成果)

関数のクラス	時間計算量
$a_i x \quad (a_i > 1)$	$\mathrm{O}(n)$ [13]
$a_i x + b_i \quad (a_i > 1)$	$\mathrm{O}(n \log n)$ [9,10,16,17]
$a_i x + b_i \quad (1 > a_i > 0)$	$\mathrm{O}(n \log n)$ [11]
$\begin{cases} ax + b_i & (x \geq d_i) \\ -\infty & (x < d_i) \end{cases} \begin{pmatrix} a > 1 \\ b_i < 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{O}(n^5)$ [4]
$a_i x + b_i \quad (a_i \geq 0)$	$\mathbf{O(n \log n)}$
$\max\{x, a_i x + b_i\} \quad (a_i \geq 0)$	$\mathbf{O(n \log n)}$
$\max\{x, a_i x + b_i, c_i\} \quad (a_i \geq 0)$	$\mathbf{O(n^2)}$
$\begin{cases} a_i x + b_i & (x \geq d_i) \\ -\infty & (x < d_i) \end{cases} (1 > a_i > 0)$	NP 困難 [3]
$\min\{a_i x + b_i, c_i\} \quad (a_i > 1)$	NP 困難 [3]
$\max\{a_i^1 x + b_i^1, a_i^2 x + b_i^2\}$ $(a_i^1, a_i^2 > 0)$	**NP 困難**

定義 1. 関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f \circ g(x) \leq g \circ f(x)$ を満たすとき，$f \preceq g$ (あるいは $g \succeq f$) と記述する．また，$f \preceq g$ かつ $f \succeq g$ のとき，すなわち任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ を満たすとき，$f \simeq g$ と記述する．

一般に二項関係 $\preceq$ は完全関係（すなわち任意の f, g について $f \preceq g$ または $f \succeq g$ が成立する）とは限らない．例えば，$f_1(x) = \max\{2x, 3x\}$, $f_2(x) = \max\{2x - 1, 3x + 1\}$ とする．このとき，$f_1 \circ f_2(0)$ $(= 3)$ は $f_2 \circ f_1(0)$ $(= 1)$ より大きいが，$f_1 \circ f_2(-2)$ $(= -10)$ は $f_2 \circ f_1(-2)$ $(= -9)$ より小さい．

しかし，もし与えられた関数に対して二項関係 $\preceq$ が完全関係となるならば，次の有用な補題が成立する．

補題 1. $f_1, \ldots, f_n$ を単調非減少関数とする．もし $f_i \preceq f_{i+1}$ が成立するならば，$f_n \circ \cdots \circ f_{i+2} \circ f_{i+1} \circ f_i \circ f_{i-1} \circ \cdots \circ f_1(x) \geq f_n \circ \cdots \circ f_{i+2} \circ f_i \circ f_{i+1} \circ f_{i-1} \circ \cdots \circ f_1(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ について成立する．

この補題から，単調非減少関数 f_i について二項関係 $\preceq$ が完全関係となるならば，$f_1 \preceq f_2 \preceq \cdots \preceq f_n$ を満たすような最大全合成順問題の最適解 $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ が存在する．さらに，もし二項関係 $\preceq$ が推移律，すなわち $f \preceq g$ かつ $g \preceq h$ ならば $f \preceq h$，も満たすならば，$f_1 \preceq f_2 \preceq \cdots \preceq f_n$ であることは $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ が最大全合成順問題の最適解であるための十分条件となる．この証明は，より一般の形で補題 3 で与える．

線形関数に対しては，二項関係 $\preceq$ は完全関係となる．

補題 2. 二項関係 $\preceq$ は線形関数に対して完全関係である．

証明. $f_i(x) = a_i x + b_i$，$f_j(x) = a_j x + b_j$ とする．すると，

$$\begin{aligned} f_i \preceq f_j &\iff f_i \circ f_j(x) \leq f_j \circ f_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff b_i(1 - a_j) \leq b_j(1 - a_i). \end{aligned} \tag{1}$$

が成立する．ここで，最後の不等式は定数の比較なので，$f_i \preceq f_j$ または $f_i \succeq f_j$ が成立する． □

さらに，二項関係 $\preceq$ は線形関数 $f(x) = ax + b$ $(a > 1)$ について推移律を満たす．なぜならば，(1) は $b_i/(1 - a_i) \leq b_j/(1 - a_j)$ と同値であるので，$b_1/(1 - a_1) \leq b_2/(1 - a_2) \leq \cdots \leq b_n/(1 - a_n)$ は最大全合成順問題に対する最適解を与える．よって，$b_i/(1 - a_i)$ の昇順に並べることで，最適解を効率よく得ることができる．同様の性質は線形関数の傾きが全て 1 未満のときにも成立する．しかし，一般の場合には，二項関係 $\preceq$ は推移的であるとは限らない．$f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 2x - 1$, $f_3(x) = x/2$ とする．すると，$f_1 \prec f_2$, $f_2 \prec f_3$, $f_3 \prec f_1$ となり，線形関数に関しても推移的でないことが確かめられる．また，$\overline{f}_1 \prec \overline{f}_2$, $\overline{f}_2 \prec \overline{f}_3$, $\overline{f}_3 \prec \overline{f}_1$ となり，関数を $\max\{ax + b, x\}$ $(a \geq 0)$ の形に限っても推移的でないことが分かる．これより，最大全 (部分) 合成順問題は，与えられる関数を単調非減少な線形関数に限ったとしても非自明となる．

推移的でない場合でも，全順序を含むような二項関係であれば効率的に解くことができる．

補題 3. 単調非減少関数 $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i \in [n])$ について，置換 $\sigma : [n] \to [n]$ が「$i \leq j$ ならば $f_{\sigma(i)} \preceq f_{\sigma(j)}$」を満たすとき，置換 σ は最大全合成順問題 $((f_i)_{i \in [n]}, c)$ に対する最適解となる．

証明. 一般性を失わず，σ は恒等置換と仮定してよい．置換 σ' を転倒数最小の最適解とする．ここで転倒数とは，数字の組 (i, j) で $i < j$ かつ $\sigma'(i) > \sigma'(j)$ となるものの個数である．置換 σ' が恒等置換となることを背理法により示す．ある l について $\sigma'(l) > \sigma'(l + 1)$ と仮定する．このとき，新しい置換 τ を

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma'(i) & (i \neq l,\ l + 1), \\ \sigma'(l + 1) & (i = l), \\ \sigma'(l) & (i = l + 1) \end{cases}$$

と定義する．すると，σ が恒等置換であることと $\sigma'(l + 1) < \sigma'(l)$ より $f_{\sigma'(l+1)} \preceq f_{\sigma'(l)}$ が成立．よって，補題 1 より τ も最適解となる．しかし，τ の転倒数は σ' より小さいので，最小性に矛盾．よって，最適解 σ' は恒等置換である． □

線形関数の最大部分合成順問題が効率的に解けることを示すために，関数 $\overline{f}_i(x) = \max\{a_i x + b_i, x\}$ $(a_i \geq 0)$ について補題 3 の置換 σ が存在し，効率的に求めることができることを示す．

二項関係 $\preceq$ を以下で定義する $f(x)=x$ の解 $\gamma(f)$ について解析する．

定義 2. 線形関数 $f(x)=ax+b$ に対し，$\gamma(f)$ を

$$\gamma(f)=\begin{cases}\frac{b}{1-a} & (a\neq 1),\\ +\infty & (a=1 \text{ かつ } b<0),\\ -\infty & (a=1 \text{ かつ } b\geq 0).\end{cases}$$

と定義する．

以下簡単のため，与えられる関数は全て恒等関数 $(f_i(x)=x)$ でないと仮定する．恒等関数は計算結果に影響を与えないので，このような仮定は一般性を失わない．

補題 4. $f_i(x)=a_ix+b_i$ と $f_j(x)=a_jx+b_j$ を単調非減少線形関数とする．このとき，以下が成立する:

1. $a_i,a_j=1$ ならば $f_i\simeq f_j$,
2. $a_i,a_j\geq 1$ かつ $a_i{\cdot}a_j>1$ ならば $f_i\preceq f_j \Leftrightarrow \gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$,
3. $a_i,a_j<1$ ならば $f_i\preceq f_j\Leftrightarrow\gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$,
4. $a_i\geq 1$ かつ $a_j<1$ ならば $f_i\preceq f_j\Leftrightarrow\gamma(f_i)\geq\gamma(f_j)$ かつ $f_i\succeq f_j\Leftrightarrow\gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$.

補題 5. $f_i(x)=a_ix+b_i$ と $f_j(x)=a_jx+b_j$ を単調非減少線形関数とする．このとき，以下が成立する:

1. $a_i,a_j\geq 1$ かつ $\gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$ ならば $\overline{f}_i\preceq\overline{f}_j$,
2. $a_i,a_j<1$ かつ $\gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$ ならば $\overline{f}_i\preceq\overline{f}_j$,
3. $a_i<1,\,a_j\geq 1,$ かつ $\gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$ ならば $\overline{f}_i\simeq\overline{f}_j$,
4. $a_i\geq 1,\,a_j<1,$ かつ $\gamma(f_i)\leq\gamma(f_j)$ ならば $\overline{f}_i\succeq\overline{f}_j$.

補題 5 により，二項関係 $\preceq$ が $\max\{ax+b,x\}$ $(a\geq 0)$ の形の関数に対して完全関係であることがわかる．さらに，以下の置換 σ が補題 3 の条件を満たすことがいえる．

線形関数 $f(x)=ax+b$ に対し，$\delta(f)$ を $a\geq 1$ ならば 1，そうでなければ -1 とする．また，$\sigma:[n]\to[n]$ を $(\delta(f_i),\gamma(f_i))$ の辞書式順に対応する置換，すなわち，ある k $(0\leq k\leq n)$ が存在して $\delta(f_{\sigma(1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(k)})=-1$, $\delta(f_{\sigma(k+1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(n)})=1$, $\gamma(f_{\sigma(1)})\leq\cdots\leq\gamma(f_{\sigma(k)})$, $\gamma(f_{\sigma(k+1)})\leq\cdots\leq\gamma(f_{\sigma(n)})$ が成立すると仮定する．このとき，補題 5 より次の補題が成立する．

補題 6. 単調非減少線形関数 f_i $(i\in[n])$ について，σ を $(\delta(f_i),\gamma(f_i))$ の辞書式順に対応する置換とする．このとき，$i\leq j$ ならば $\overline{f}_{\sigma(i)}\preceq\overline{f}_{\sigma(j)}$ が成立する．

補題 3 と 6 から，単調非減少線形関数 f_i に対する最大部分合成順問題，あるいは，$\overline{f}_i$ に対する最大全合成順問題は $(\delta(f_i),\gamma(f_i))$ の辞書式順序を求めることができる．従って，最適解を $\mathrm{O}(n\log n)$ 時間で求めることができ，定理 1 の部分合成順に関する部分を示した．

次に，定理 4 を示す．$h_i(x)=a_ix+b_i$ $(i\in[n])$ を単調非減少線形関数とし，$f_i(x)=\max\{h_i(x),c_i\}$ $(i\in[i])$ とする．関数 f_i に対する最大部分合成順問題について考察する．序論で示した通り，この問題は各商品価値が 2 値の確率変数である自由順序秘書問題を含む．

以下

$$\overline{f}_i(x)=\max\{a_ix+b_i,c_i,x\}\qquad(2)$$

に対する最大全合成順問題を用いて解析する．

補題 7. c を実数とし，$\overline{f}_i$ $(i\in[n])$ を式 (2) で定義される関数とする．最大全合成順問題 $((\overline{f}_i)_{i\in[n]},c)$ の最適解 σ で，任意の $i\,(>1)$ に対し $\overline{h}_{\sigma(i)}\circ\overline{f}_{\sigma(i-1)}\circ\cdots\circ\overline{f}_{\sigma(1)}(c)\geq c_{\sigma(i)}$ となるものが存在する．ただし，$h_i(x)=a_ix+b_i$ $(a_i\geq 0)$ とする．

定理 4 の証明. 補題 7 より，$n+1$ 個の最大部分合成順問題 $((h_i)_{i\in[n]},c)$, $((h_i)_{i\in[n]\setminus\{k\}},c_k)$ $(k\in[n])$ の最大値は，元の最大部分合成順問題の最適値となる．

よって，定理 1 から $\mathrm{O}(n^2\log n)$ 時間アルゴリズムが直接得られる．さらに，(δ,γ) の辞書式順序を先に $\mathrm{O}(n\log n)$ 時間で求めることで，各問題は線形時間で解くことができる．従って計算量は $\mathrm{O}(n^2)$ となる． □

3. 最大全合成順問題

定理 1 の全合成順に関する部分の証明の概略を与える．残念なことに，単調非減少線形関数の全合成順では補題 3 の条件を満たす置換 σ が存在するとは限らない．しかし，以下の補題のように，最適解の候補は線形個に絞ることができる．

補題 8. $\prod_{i=1}^n a_i\geq 1$ ならば，ある s,t $(0\leq s\leq t\leq n)$ について $\delta(f_{\sigma(t+1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(n)})=\delta(f_{\sigma(1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(s)})=-1$, $\delta(f_{\sigma(s+1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(t)})=1$, $\gamma_{\sigma(t+1)}\leq\cdots\leq\gamma_{\sigma(n)}\leq\gamma_{\sigma(1)}\leq\cdots\leq\gamma_{\sigma(s)}$, かつ $\gamma_{\sigma(s+1)}\leq\cdots\leq\gamma_{\sigma(t)}$ を満たす最適解 σ が存在する．

補題 9. $\prod_{i=1}^n a_i<1$ ならば，ある s,t $(0\leq s\leq t\leq n)$ について $\delta(f_{\sigma(t+1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(n)})=\delta(f_{\sigma(1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(s)})=1$, $\delta(f_{\sigma(s+1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(t)})=-1$, $\gamma_{\sigma(t+1)}\leq\cdots\leq\gamma_{\sigma(n)}\leq\gamma_{\sigma(1)}\leq\cdots\leq\gamma_{\sigma(s)}$, かつ $\gamma_{\sigma(s+1)}\leq\cdots\leq\gamma_{\sigma(t)}$ を満たす最適解 σ が存在する．

これらより，単調非減少線形関数の最大全合成順に対する効率的なアルゴリズムを構成できる．

定理 1 の全合成順に関する証明. 補題 8 と 9 より，単調非減少線形関数の最大全合成順問題は以下のように解くことができる．置換 $\sigma:[n]\to[n]$ を $\delta(f_{\sigma(1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(r)})=-1$, $\delta(f_{\sigma(r+1)})=\cdots=\delta(f_{\sigma(n)})=1$,

$\gamma(f_{\sigma(1)}) \le \cdots \le \gamma(f_{\sigma(r)}), \gamma(f_{\sigma(r+1)}) \le \cdots \le \gamma(f_{\sigma(n)})$ を満たすものとする．補題 8 と 9 より，最適解の中で $(\sigma(t), \sigma(t{+}1), \ldots, \sigma(n), \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(t{-}1))$ の形のものが存在する．よって，n 個の合成結果 $d_t = f_{\sigma(t-1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)} \circ f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(t)}(c)$ を計算し，その最大値を出力することで最適値を求められる．さらに，$a = \prod_{i=1}^{n} a_i$ とすると，$d_{t+1} = a_{\sigma(t)} \cdot (d_t - a \cdot c) - b_{\sigma(t)} \cdot (a-1) + a \cdot c$ が成立するので，$\mathrm{O}(n \log n)$ 時間で最適解を求められる． □

最大 k 合成順問題については，補題 8 と 9 より，動的計画法を用いることで $\mathrm{O}(kn^2)$ 時間アルゴリズムを構成できる．

4. NP 困難性

前節までで，最大全合成順問題，部分合成順問題共に与えられる関数が単調非減少線形関数であれば効率的に解けることをみた．しかし，f_i が非線形の場合には，単調増加な 2 区分からなる区分線形関数の場合に限っても (近似の意味でも)NP 困難であることを示す．ここで，単調増加で凹な高々2 区分からなる区分線形関数に対する最大全合成順問題は，時間依存スケジューリング問題に対する Cheng と Ding [3] の結果から，NP 困難であることがすぐに分かることに注意されたい．

以下では定理 3 の (ii) のみを示すが，(i) も同様にして示すことができる．帰着には NP 困難と知られる次の問題を用いる ([8, 14])．

ProductPartition: n 個の正整数 $a_1, \ldots, a_n$ が与えられた時，$\prod_{i=1}^{n} a_i = T^2$ とすると $\prod_{i \in I} a_i = T$ なる部分集合 $I \subseteq [n]$ が存在するか判定する問題．

f_i $(i \in [n])$ を単調増加で凸な高々2 区分からなる区分線形関数，すなわち，実数 $a_i^1, a_i^2, b_i^1, b_i^2$ $(a_i^1, a_i^2 > 0)$ に対して，

$$f_i(x) = \max\{a_i^1 x + b_i^1,\ a_i^2 x + b_i^2\} \tag{3}$$

とする．困難性を示す前に，関数合成の基本的な性質を 2 つ示す．

整数 $i \in [n]$ に対し，$g_i(x) = a_i(x-d) + d$ とする．このとき，

$$g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x) = (x-d)\prod_{i=1}^{n} a_i + d \tag{4}$$

が成立する．また，$\prod_{i=1}^{n} a_i > 0$ より以下の不等式が成立する．

$$\begin{aligned} g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x) &< d \quad \text{if } x < d,\\ g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x) &= d \quad \text{if } x = d,\\ g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x) &> d \quad \text{if } x > d. \end{aligned} \tag{5}$$

定理 3 (ii) の証明．ProductPartition から単調増加で凸な高々2 区分から成る区分線形関数に対する最大全合成順問題及び最大部分合成順問題へと帰着する．正整数 $a_1, \ldots, a_n$ (>1) について $\prod_{i=1}^{n} a_i = T^2$ とする．$n+2$ 個の関数 f_i $(i = 1, \ldots, n+2)$ を以下のように構成する:

$$f_i(x) = \begin{cases} \max\left\{\frac{1}{a_i}(x - T^2) + T^2,\ a_i(x - T^2) + T^2\right\} \\ \qquad (i = 1, \ldots, n \text{ のとき}), \\ x + 2T \\ \qquad (i = n+1 \text{ のとき}), \\ 4\alpha(T+1)^2\left(x - 2T^2 + \left(\frac{T}{T+1}\right)^2\right) - 2T^2 + \left(\frac{T}{T+1}\right)^2 \\ \qquad (i = n+2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ただし，α を 1 以上の定数とする．各 f_i が単調増加で凸な高々2 区分からなる区分線形関数であることは明らかである．さらに，$f_i(x) \ge x$ が任意の $i \in [n]$ について成り立つので，最大全合成順の解は最大部分合成順問題の解にもなる．従って，全合成順だけを考える．以下，最大全合成順問題 $((f_i)_{i \in [n+1]}, c = 0)$ の最適値は，

$$\begin{aligned} &\prod_{i \in I} a_i = T \text{ なる } I \subseteq [n] \text{ が存在すれば } 2T^2, \\ &\text{存在しなければ } 2T^2 - (T/(T+1))^2 \text{ 以下} \end{aligned} \tag{$*$}$$

となる．この $(*)$ を示すことで，$f_{n+2}(2T^2) > 2\alpha T^2$ かつ，$x \le 2T^2 - (T/(T+1))^2$ ならば $f_{n+2}(x) \le x$ なので，最大全合成順問題 $((f_i)_{i \in [n+2]}, c = 0)$ の最適値は，$\prod_{i \in I} a_i = T$ なる部分集合 $I \subseteq [n]$ が存在すれば $2\alpha T^2$，存在しなければ $2T^2 - (T/(T+1))^2$ 以下となる．よって，P=NP でない限り，α 近似アルゴリズムは存在しないことになる．

最後に $(*)$ を示す．$n{+}1$ 次の置換 σ に対し，l を $\sigma(l) = n+1$ なる整数とする．また，$I = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(l-1)\}$，$p = \frac{1}{\prod_{i \in I} a_i}$ とする．ここで，$\prod_{i=l+1}^{n+1} a_{\sigma(i)} = \prod_{i \in [n] \setminus I} a_i = pT^2$ である．よって置換 σ の順での合成結果は:

$$\begin{aligned} &f_{\sigma(n+1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(l+1)} \circ f_{\sigma(l)} \circ f_{\sigma(l-1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}(0) \\ &\quad = f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(l+1)} \circ f_{n+1}(T^2(1-p)) \qquad (6) \\ &\quad = f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(l+1)}(T^2(1-p) + 2T) \\ &\quad \le pT^2(T^2(1-p) + 2T - T^2) + T^2 \qquad (7) \\ &\quad = 2T^2 - T^2(pT-1)^2 \end{aligned}$$

となる．ここで，(6) は (4) と (5) から成立し，(7) は (4) と $a_{\sigma(i)} > 1$ $(\forall i \ge l+1)$ から成立する．また，(7) の等号成立条件は $T^2(1-p) + 2T \ge T^2$，すなわち $p \le 2/T$ である．さらに，$1/p$ が整数であり，$1/p = T$ のとき最大，$1/p = T+1$ のとき 2 番目に大きくなるので

$$f_{\sigma(n+1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}(0) \begin{cases} = 2T^2 & (p = 1/T), \\ \le 2T^2 - \left(\frac{T}{T+1}\right)^2 & (p \ne 1/T) \end{cases}$$

が成立する． □

参考文献

[1] M. Babaioff, N. Immorlica, D. Kempe, and R. Kleinberg. A knapsack secretary problem with applications. *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*, pages 16–28, 2007.

[2] M. Babaioff, N. Immorlica, and R. Kleinberg. Matroids, secretary problems, and online mechanisms. In *Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 434–443, 2007.

[3] T. C. E. Cheng and Q. Ding. The complexity of scheduling starting time dependent tasks with release times. *Information Processing Letters*, 65(2):75–79, 1998.

[4] T. C. E. Cheng and Q. Ding. Single machine scheduling with deadlines and increasing rates of processing times. *Acta Informatica*, 36(9-10):673–692, 2000.

[5] B. Dean, M. Goemans, and J. Vondrák. Adaptivity and approximation for stochastic packing problems. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 395–404. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[6] B. Dean, M. Goemans, and J. Vondrák. Approximating the stochastic knapsack problem: the benefit of adaptivity. *Mathematics of Operations Research*, 33(4):945–964, 2008.

[7] T. S. Ferguson. Who solved the secretary problem? *Statical Science*, 4(3):282–289, 1989.

[8] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman New York, 1979.

[9] S. Gawiejnowicz and L. Pankowska. Scheduling jobs with varying processing times. *Information Processing Letters*, 54(3):175–178, 1995.

[10] J. N. Gupta and S. K. Gupta. Single facility scheduling with nonlinear processing times. *Computers & Industrial Engineering*, 14(4):387–393, 1988.

[11] K. I.-J. Ho, J. Y.-T. Leung, and W.-D. Wei. Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times. *Information Processing Letters*, 48(6):315–320, 1993.

[12] P. Jaillet, J. Soto, and R. Zenklusen. Advances on matroid secretary problems: Free order model and laminar case. In *Proceedings of the 16th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, pages 254–265, 2013.

[13] G. Mosheiov. Scheduling jobs under simple linear deterioration. *Computers & Operations Research*, 21(6):653–659, 1994.

[14] C. T. Ng, M. Barketau, T. C. E. Cheng, and M. Y. Kovalyov. "Product partition" and related problems of scheduling and systems reliability: Computational complexity and approximation. *European Journal of Operational Research*, 207:601–604, 2010.

[15] S. Oveis Gharan and J. Vondrák. On variants of the matroid secretary problem. In *Proceedings of the 19th Annual European Symposium on Algorithms*, pages 335–346, 2011.

[16] V. S. Tanaev, V. S. Gordon, and Y. M. Shafransky. *Scheduling Theory: Single-Stage Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[17] W. Wajs. Polynomial algorithm for dynamic sequencing problem. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, 31(3):209–213, 1986.