

電磁流体方程式における高速数値計算法と数値解の評価†

鶴 飼 正 行** 津 田 孝 夫***

プラズマの巨視的振舞を支配する電磁流体方程式の非線形性を十分に取り扱いえうる唯一の手段は数値計算であり、スーパーコンピュータによる超高速計算が多くの問題処理に本質的であることが認識されている。本稿では、電磁流体方程式の数値計算に基本的なアルゴリズムについて具体的に論じている。特に、数値的境界条件の設定法、数値解の妥当性を示唆する判定基準、超高速計算法、等に主題がおかれている。ここで提案された数値計算法は、双曲型と放物型方程式の間の強い結合が重要な典型的問題に適用され、注意深くパラメータを選ぶことにより幾つかの妥当性の判定基準を満足する数値解を得ることが可能であることを実例を用いて示している。

1. ま え が き

電磁流体 (MHD) 方程式はプラズマの巨視的振舞を決定する方程式として良く知られており、巨大プロジェクトと言われている宇宙科学や核融合工学に対して基本的に重要な役割を果たす。MHD 方程式は双曲型や放物型方程式が組み合わされた複雑な非線形連立偏微分方程式で与えられ、実用上有用な解を得る最も有効な手段は数値計算 (もしくはシミュレーション) であることが認識されてきた。その有用な数値解を得るために設計されるべき基本的なアルゴリズムは次のようなものであろう。(1) 数値解の妥当性の判定法。一般に数値誤差は扱う問題に大きく依存する。例えば、双曲型方程式に基づく強い非線形解 (衝撃波) を得るためには数値的散逸を導入することが不可避であり、これは放物型方程式に対して誤差項を導入する。したがって、いろんな角度から数値解の妥当性を示唆する判定基準を工夫し、数値計算結果を診断する必要がある。(2) 数値的境界条件の設計法。有限の計算領域において問題に応じた適切な境界が必要となるので、その境界に適合する数値的境界条件を工夫する必要がある。(3) スーパーコンピュータによる超高速計算法。一般に計算の精度を上げるためには非常に多くの格子点を与えることが本質的となり、計算の高速化を図ることが極めて重要になってくる¹⁾。

本稿では、多くの数値計算を実行することにより、有用な数値解を得るために基本的かつ実用的なアルゴ

リズムを設計し開発している。さらに、典型的な初期値境界値問題を用いて、ここで提案されたアルゴリズムの有効性を議論し応用例を示す。

2. 電磁流体方程式

圧縮性電磁流体方程式は無次元化された保存形で次のように与えられる²⁾。

$$\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\partial (\rho \mathbf{u}) / \partial t = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{B} \mathbf{B}) - \nabla (P + \mathbf{B}^2) / 2 \quad (2)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{J}) \quad (3)$$

$$\partial \varepsilon / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

ここに、 $\varepsilon = \rho u^2 + P(\gamma - 1) + \mathbf{B}^2$, $\mathbf{S} = (\varepsilon + P + \mathbf{B}^2) \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + 2\eta(\mathbf{J} \times \mathbf{B})$, であり、オームの法則、 $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$, を用いている。また $\mathbf{u} \mathbf{u}$, $\mathbf{B} \mathbf{B}$ はテンソルである。上式で ρ , \mathbf{u} , \mathbf{B} および P は各々 (正規化された) プラズマ密度, プラズマ速度, 磁場, プラズマ圧を示している。また, \mathbf{J} , \mathbf{E} , ε は各々電流密度, 電場, 全 (プラズマ+磁場) エネルギー密度を示し, η , γ は各々磁気レイノルズ数の逆数と比熱比を示している。

式(1)-(5)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x + \partial \mathbf{G}(\mathbf{U}) / \partial y \\ + \partial \mathbf{H}(\mathbf{U}) / \partial z = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに x, y, z はデカルト座標であり, \mathbf{U} は変数ベクトルで, $\mathbf{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, \varepsilon)$ で与えられる。また $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ は \mathbf{U} によって決まるベクトルである。

3. 数値計算法

3.1 数値スキーム

並列計算が容易であるという観点から (後述), 流体力学の解析に広く用いられている陽的差分法, 2段階

† High-Speed Computations of Magnetohydrodynamic Equations and Criteria of the Numerical Solutions by MASAYUKI UGAI (Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University) and TAKAO TSUDA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Kyoto University).

** 愛媛大学工学部情報工学教室

*** 京都大学工学部情報工学教室

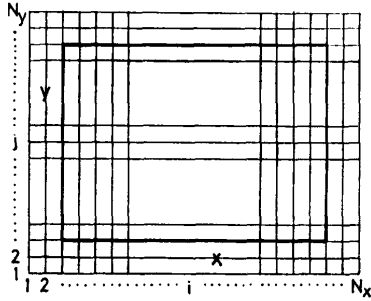


図 1 2次元領域におけるメッシュ点

Fig. 1 Mesh points in the two-dimensional region.

Lax-Wendroff (L-W) 法, を基本的スキームとして採用する. ここでは簡単のため問題を空間的に2次元に限定するが, 以下の議論は一般性を失うことなく3次元に拡張できる. この場合, (6)式で $\partial/\partial z=0$ であり, $U=(\rho, \rho u_x, \rho u_y, B_x, B_y, \epsilon)$ となる. 計算領域をメッシュ状に分割し, x および y 方向の格子点の番号を i, j で記述し $1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y$ とする (図 1). また x 方向, y 方向のメッシュ幅を各々 $\Delta x, \Delta y$ とし, 時間さきみを Δt とする. 時間 $t=(n+2)\Delta t$ における U^{n+2} を $t=n\Delta t$ の U^n から計算するのに次の2段階を必要とする³⁾.

$$U_{i,j}^{n+1} = (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n)/4 \\ - (\Delta t/2\Delta x)(F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n) \\ - (\Delta t/2\Delta y)(G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n) \quad (7)$$

$$U_{i,j}^{n+2} = U_{i,j}^{n+1} - (\Delta t/\Delta x)(F_{i+1,j}^{n+1} - F_{i-1,j}^{n+1}) \\ - (\Delta t/\Delta y)(G_{i,j+1}^{n+1} - G_{i,j-1}^{n+1}) \quad (8)$$

ここに, F^n, F^{n+1} は各々 $F(U^n), F(U^{n+1})$ を示す (G についても同様). この数値スキームは次の条件が満足される時数値的に安定であるとされている³⁾.

$$(|u|+c)\Delta t/\Delta < 1/\sqrt{2} \quad (9)$$

ここに Δ は $\Delta x, \Delta y$ の小さい方をとり, u, c は各々局所的な流体速度と波の速度である.

一方(3)式は移流拡散方程式であり, 右辺第2項は拡散係数 η が定数であると $\eta^2 B$ の形の拡散項になる. 良く知られているように拡散方程式は(7), (8)の形の差分スキームに対して不安定である. そこで私たちはこのような拡散項を他の項と切り放し, (7)式において拡散項は無視し, (8)式を計算する時のみ考慮した (ただし拡散項の計算には $t=n\Delta t$ の値を用いる). このような拡散項の取り扱いに対して数値的安定条件は次式で与えられるとされている³⁾.

$$\eta(2\Delta t)/(2\Delta)^2 < 1/4 \quad (10)$$

空間的刻み幅 $\Delta x, \Delta y$ を定めると(9), (10)両式を満足するように時間刻み Δt を選ばばよい. 多くの

数値計算の結果, 双曲型方程式に基づく強い非線形性(衝撃波)を含まない解に対してはこのスキームはきわめて良好な結果を与えるが, 衝撃波が現れてくると突然数値的に不安定になった²⁾.

衝撃波を数値的に安定に得るためにはなんらかの散逸項が必要になる. L-W スキームと整合して物理量を保存するような数値的散逸項を導入することを考えよう. まず次の形の人工的粘性項が知られている⁴⁾.

$$(\Delta t/2\Delta x)[\Delta o_x(Q_x \Delta o_x U) \\ + (\Delta x/\Delta y)\Delta o_y(Q_y \Delta o_y U)] \quad (11)$$

ここにオペレーター Δo_x は, 任意の関数 $f(x, y)$ に対して $2\Delta o_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)$ のように定義されている (Δo_x についても同様). また $Q_x(x, y), Q_y(x, y)$ は次のように定義される.

$$Q_x(x, y) = \kappa |u_x(x + \Delta x, y) - u_x(x - \Delta x, y)|, \\ Q_y(x, y) = \kappa |u_y(x, y + \Delta y) - u_y(x, y - \Delta y)| \quad (12)$$

(11)式の (i, j) 成分を $U = U^n$ として計算された項が(8)式の右辺に付け加えられる. 粘性係数 κ を十分大きくすると数値的に安定に衝撃波を表現できる⁵⁾.

より簡単に効果的な数値的散逸を与えることが経験的に分かっている方法として, 次のように変数をスムージングする方法がある. すなわち, (8)式右辺の $U_{i,j}^{n+1}$ の代りに次式を与える.

$$(1-\sigma)U_{i,j}^{n+1} + (\sigma/4)(U_{i+1,j+1}^{n+1} + U_{i+1,j-1}^{n+1} \\ + U_{i-1,j+1}^{n+1} + U_{i-1,j-1}^{n+1}) \quad (13)$$

ここに σ は重みである.

L-W スキームを(11)式や(13)式によって変形する方法は衝撃波の数値計算を安定化することが経験的に知られているが, 同時に数値的(人工的)散逸を導入する. したがって, 拡散方程式(3)において拡散係数 η による拡散と同時に数値的散逸による拡散が必然的に含まれることになり, 特別に注意する必要がある. そこで, 本論文では拡散項が重要でかつ強い衝撃波を含む問題を具体例として取りあげ, 数値的散逸の影響を調べることにする.

3.2 境界条件

図1に計算領域を示し太い線で囲まれた部分が現象を解析する領域である. この領域を以後内部領域ということにする (ここでは矩形領域を考える). 単位時間ステップ ($2\Delta t$) ごとに $3 \leq i \leq N_x - 2, 3 \leq j \leq N_y - 2$ の格子点上の値が更新され, それを取り巻く外側の格子点上の値は境界条件によって与えられる. 実用上典型的な境界は(1)対称性境界, (2)周期性境界, (3)

壁境界, (4)人工境界であろう。(1), (2)の境界条件はほとんど自明である。例えば対称性境界条件は境界に対して変数が対称になるように与えることによって満足される。問題になるのは(3), (4)の境界条件である。特に, 人工境界は非常に応用範囲が広いにもかかわらず, 理想的な人工境界条件を設計することは原理的には不可能なことであろう。

完全導電性の壁では, $E_t = u_n = B_n = S_n = 0$, とする(添字 t, n は各々境界に平行, 垂直な成分を示す)。数値的には, このような条件に対応する離散系での条件が等価的に満足されると同時に, L-W スキームとの適合性を考え, 物理量が保存されるように設計されるべきである。このことを念頭に置き, 私たちは次のようなアルゴリズムを考えた。例えば図1で壁が $y = L_y$ に存在するとし, 壁の中 ($y < L_y$) に仮想的な格子点を考える。任意の正数 y' に対して, $\rho(x, L_y + y') = \rho(x, L_y - y')$, $u_x(x, L_y + y') = u_x(x, L_y - y')$, $u_y(x, L_y + y') = -u_y(x, L_y - y')$, $B_x(x, L_y + y') = B_x(x, L_y - y')$, $B_y(x, L_y + y') = -B_y(x, L_y - y')$, $P(x, L_y + y') = P(x, L_y - y')$, のように与える。

次に, 人工境界の場合, 理想的には波が境界を横切る時全く反射されることなく(境界の存在を意識することなく)通りぬけなければならない。私たちが提案する人工境界条件は次のようなものである。

$$\partial/\partial n(\rho, u_x, u_y, B_x, P) = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

ここに n は境界に垂直な方向の座標であり, 境界に垂直な磁場成分 B_n は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より求める。したがって, 境界値は内部領域の最も近い格子点上の値を外挿することによって与えられる。このアルゴリズムの正当性は後に具体的な例を用いて検討されるであろう。

3.3 数値解の妥当性の判定基準

基礎方程式(1)-(5)から直接導かれる次のような数学的事実を基にして数値解の妥当性の判定基準を立てることとする。(A)(1)-(5)を線形化することにより解析的に固有値問題を解くことができ, 与えられた形状に対して理論的に固有値が得られる。(B)すべての境界上で $u_n = S_n = 0$ が成り立つ系を“閉じた系”と定義する。この場合, 式(1)および(4)を計算領域 S 全体にわたって面積分を行うと $\partial[\rho]_S/\partial t = 0, \partial[\epsilon]_S/\partial t = 0$ が得られる(質量, エネルギー保存則) ($[f]_S$ は $f(x, y)$ の面積分)。(C)原点, $\mathbf{r} = (x, y) = (0, 0)$, で常に $\mathbf{B} = 0$ であるとす, $y = L_y$ に壁境界があるとす(したがって $E_t = 0$)。 (3)式の x 成分を $y = 0$ から $y = L_y$ まで y 軸 ($x = 0$) に沿って線積分するこ

とにより, $d\Phi/dt = E_n$, が得られる [ここで $\Phi(t)$ は B_x の線積分であり, $E_n(t) = \eta(\mathbf{r} = 0, t)J(\mathbf{r} = 0, t)$]。この式をさらに時間0から t まで積分すると次の磁束保存式が得られる。

$$\Phi(t) - \Phi(t=0) = \Phi_N(t) \quad (15)$$

ここに $\Phi_N(t)$ は $E_n(t)$ の時間積分である。

3.4 超高速計算アルゴリズム

一般に, ベクトル計算機の加速性能を向上させるためには次の二点の本質的である。まず第一に, プログラムで実行される命令ステップの大部分を占める DO ループ中の繰り返し計算が並列化(ベクトル化)されること, すなわちベクトル化率を向上させる点である。第二に, ベクトル命令で処理されるデータ数(すなわちベクトル長)をできるだけ大きくとることである。現在の問題の場合, (7), (8)式は各々6個の方程式からなり, これがベクトル化の対象となる。L-W法は陽的差分法であり, したがって(7), (8)式の右辺はすべて旧値で与えられており, 左辺で定義されている U の新値を求める6つの式は完全に並列化可能となる。この意味で L-W スキーム等の陽的差分法はベクトル計算機との整合性が良いということができ

る。実際問題として, 利用できる計算機の資源(記憶容量等)を考慮してアルゴリズムを設計すべきである。次節に示す数値計算では次のようなアルゴリズムを採用している。ここで, 図1の幾何学的形状を考慮して $U_{i,j}^{n+1}$ を j 行 i 列の $U_{i,j}^{n+1}$, ($U_{i,j}^{n+1}$) ($1 \leq i \leq N_x$) を j 行の $U_{i,j}^{n+1}$ 等とよぶことにする。準備段階として作業領域 V_{i1}, V_{i2} ($i = 2, \dots, N_x - 1$) に(7)式から計算された第2, 3行の $U_{i,j}^{n+1}$ の値が各々ストアされているものとする。その時, 計算は次のステップを通して行われる。

repeat for $j = 3, \dots, N_y - 2$

第 $j+1$ 行の $U_{i,j}^{n+1}$ を計算して V_{i3} にストアする

repeat for $k = 3, \dots, N_x - 2$

第 j 行 k 列の $U_{i,j}^{n+2}$ を(8)式から V_{i1}, V_{i2}, V_{i3} を用いて計算する

結果を作業領域 W_k にストアする

V_{i2}, V_{i3} のデータを各々 V_{i1}, V_{i2} に平行移動する

W_k のデータを $U_{i,j-2}$ に平行移動する。

このアルゴリズムは次の利点をもつ。まず $U_{i,j}^{n+1}$ の値を全格子点で計算した後に $U_{i,j}^{n+2}$ の値を計算する場合に比べて, $U_{i,j}^{n+1}$ の値をストアするのに必要な作業領域が $3/(N_y - 2)$ になる(通常 $N_y \gg 1$)。次に, $U_{i,j}^{n+2}$ の

値を U^* の値から (7), (8) 式を通して直接計算する場合 (この場合は U^{*+1} の値をストアする作業領域は必要ない) に比べて, (7) 式の計算回数が 1/4 になる。

このアルゴリズムでは明らかに x 方向の計算しかベクトル化の対象とならない。しかしながら, 後に具体的計算例で示されるように, 通常 N_x は大きく (数百) とるのでベクトル長は十分大きく, 極めて高いベクトル加速性能が得られる。したがって, 現在の計算機資源を念頭におくと, 2 次元計算用としては合理的かつ有用なアルゴリズムとなることが期待できる。

4. 数値計算例

4.1 数値計算モデル

初期条件を与え, 境界条件を問題に応じて適切に組み合わせ, メッシュ幅などを設定することにより直ちに計算を実行できる。ここでは前節で提案されたアルゴリズムの有用性を具体的な例を用いて説明するため, 次のようなモデルを考える。初期的 (時間 $t=0$) に磁場 $B=[B_x(y), 0]$ は次のように与えられる: $0 \leq y \leq 1$ で $B_x = \sin(y\pi/2)$, $1 < y \leq 2.3$ で $B_x = 1$, $2.3 < y \leq 2.9$ で $B_x = \cos[(y-2.3)\pi/1.2]$, $2.9 < y$ で $B_x = 0$; また $y < 0$ に対して $B_x(y) = -B_x(-y)$ 。磁場は x 軸に関して反平行になっており, (5) 式より $|y| < 1$ の領域に (z 方向の) 電流 J が存在する (したがって, 電流シートモデルとよばれている)。初期的に $\rho=1, u=0$ とすると (2) 式より $P+B_x^2 = \text{const.}$ となり, プラズマ圧 P は初期的に, $P=1+\beta_0-B_x^2$ で与えられ ($\beta_0=0.1$ とする), 初期的に平衡状態にある。

時間 $t=0$ で平衡状態にある初期形状に擾乱を与え, 系の時間発展を調べる。すなわち, 時間範囲 $0 < t < 4$ において局所的に拡散係数 η を (人為的) に有限 ($\neq 0$) とし, それに伴う物理量の変化を数値的擾乱として用いる。時間 $t > 4$ に対しては拡散係数 η としして次のような異常電気抵抗モデルを考える⁶⁾。

$$\eta(r, t) = k_R (|V_D(r, t)| - V_C) \quad \text{for } |V_D| > V_C$$

$$= 0 \quad \text{for } |V_D| < V_C \quad (16)$$

ここに $V_D = J/\rho$ であり, 現在の 2 次元問題ではスカラー量になる。数値計算はすべて倍精度で行い, また比熱比 $\gamma=2$ とし, 4.3 節, 4.4 節の計算では (16) 式で $k_R = 1.5 \times 10^{-3}, V_C = 4$ としている。

4.2 固有値問題

解析的に固有値問題を解くことにより, 十分長い電

流シートでは (16) 式で与えられた η に依存する固有値は実数になり $k_R^{0.6} V_C^{2.2}$ に比例することが理論的に示せる⁶⁾ (物理的にはこの固有値はいわゆるテアリングモードの成長率を与える)。この問題を前節で述べた数値計算法を用いて検討するため (16) の k_R, V_C をパラメータにして上述の初期条件のもとで計算を行った ($\Delta x = 0.04, \Delta y = 0.015, \Delta t = 0.002$ とし, $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3.3$ の矩形領域において x 軸, y 軸上には対称性境界条件, $x=4, y=3.3$ には人工境界条件を与えた)。ここで成長率は次のようにして求めた。まず, テアリングモードが成長する直前の物理量を零オーダー量とし, 成長した後の物理量と零オーダー量の差をファーストオーダー量とする。ファーストオーダー量の絶対値に対数をとった値を時間に対してプロットすると, ファーストオーダー量が零オーダー量に比べて十分小さい間は, 直線的に変化することが認められる。この直線の傾きを数値計算から得られる成長率とよぶ。図 2 にこのようにして求められたテアリングモードの成長率をプロットし, 線形理論値は実線で示してある。この図から分かるように数値計算結果は理論と良く一致しており, 本論文の数値計算法が妥当なことを示している。

4.3 閉じた系 (CLOSED SYSTEM)

計算領域を $0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 3.3$ の矩形領域にとる。 x 軸, y 軸上の境界には対称性境界条件を与え, 上部境界 ($y=3.3$) は壁境界とし, 右端の境界 ($x=9$) には周期性境界を与えている (図 1)。このような境界

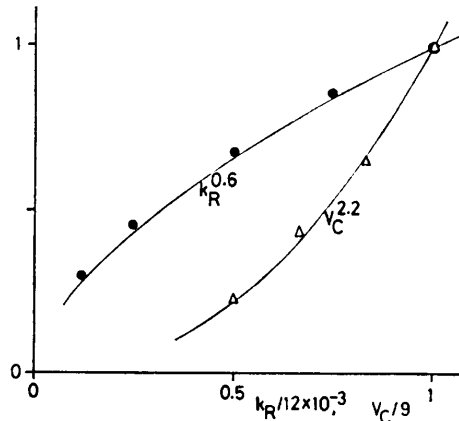


図 2 V_C を固定した場合 (黒点) と k_R を固定した場合 (三角) の数値計算より得られた固有値 (成長率)。実線は理論値を示す。

Fig. 2 Eigenvalues (growth rates) obtained numerically for the cases (●) V_C is fixed and (▲) k_R is fixed. Solid curves indicate the theoretical values.

条件のもとでは、量が境界を横切って計算領域に出入りすることはなく、いわゆる閉じた系になることが示せる。ここでは、 $\Delta x=0.04$, $\Delta y=0.015$ (したがって $N_x=230$, $N_y=225$), $\Delta t=0.003$ として計算した。この問題に対する数値解の性質やその物理的解釈は筆者らによって既に詳しく調べられているので⁷⁾、ここではその数値解の妥当性の問題を中心に議論する。

上述の初期境界値問題に対する数値解の時間的发展過程を要約すると次のようになる。原点 ($r=0$) では (対称性より) 常に $B=0$ であり、そこを中心にして (3) 式の右辺第 2 項 (拡散項) が右辺第 1 項に比べて支配的な領域が原点近傍に局在する (これを拡散領域と言う)。拡散領域の外側では拡散項は無視できて双曲型方程式が支配的となる (これを波領域と言う)。(無次元化された) 時間 $t>30$ において η [(16) 式] が拡散領域で急激に増大し、その結果生じた磁場拡散 (特に磁気リコネクションもしくはテアリングと言う) に伴う磁場変化によって流体が加速される。拡散領域と波領域との間のセルフコンシステントな相互作用により、その非線形飽和段階でスローショックとファーストショックが定在的に立つ解に発展し、 $t>45$ で準定常的形状が確立される。詳しくは文献⁷⁾に述べられている。

この数値計算を例にとり、第 3 章で述べた数学的事実を用いて数値解の妥当性を判定してみる。まず量の保存則は次のように調べられる。領域中の積分量 $[\rho]_s(t)$, $[\varepsilon]_s(t)$ は時間 t における各格子点上の ρ , ε の数値を領域中の格子点全部にわたって加算することにより直ちに得られる。この数値計算の場合、時間 $t=60$ (一万ステップの計算に相当) においても各々の値は有効数字 6 桁以上の精度で $[\rho]_s(t=0)$, $[\varepsilon]_s(t=0)$ の値に一致しており、保存則をほぼ完全に (計算機の誤差範囲で) 満足する計算になっている。このことはオーバーフロー等の異常現象なく計算が安定に行われる限り、パラメータ (メッシュ幅、数値的散逸係数 κ , σ , 等) の選び方によらずすべての計算例で成立した。

次に磁束保存則, (15) 式, について調べた。 $\Phi(t)$ は $B_z(x=0, y, t)$ を y 軸に沿って $y=0$ から $y=3.3$ まで数値的に線積分することにより得られ、 $\Phi_N(t)$ は $E_N(t)$ の時間に関する数値積分, $(2\Delta t) \sum_{i=1}^n E_N[i(2\Delta t)]$, によって直ちに計算できる [$t=n(2\Delta t)$ とする]。ここに $|\Phi_N(t)|$ は拡散係数 $\eta(r=0, t)$ によって消滅した磁束量を示し、 $|\Phi(t)-\Phi(t=0)-\Phi_N(t)|$ は数値的散

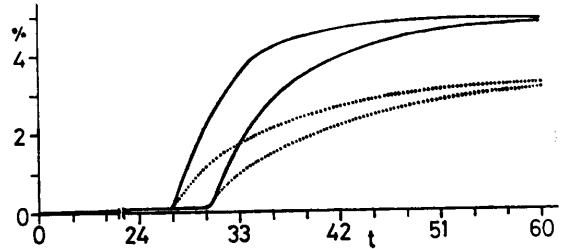


図 3 散逸係数 $\sigma=0.02$, $\kappa=5$ (実線), $\sigma=0.02$, $\kappa=0$ (破線) に対する数値的散逸の相対的大きさ $\delta(t)$ の時間変化

Fig. 3 Temporal changes of the relative magnitude of the numerical dissipation $\delta(t)$ for the cases of the dissipation coefficients $\sigma=0.02$, $\kappa=5$ (solid lines) and $\sigma=0.02$, $\kappa=0$ (dotted lines).

逸を導入したことによる“数値的”拡散によって消滅した磁束量を示すと考えられ、各々分離できるものと考えられる。したがって、数値的散逸の影響は

$$\delta(t) = 100 \times |\Phi(t) - \Phi(t=0) - \Phi_N(t)| / |\Phi_N(t)|$$

を採用できるとの予想を持つが、この予想は数値例では裏付けられている。

図 3 は数値的散逸係数, κ , σ [(12), (13) 式], の選び方によって $\delta(t)$ がどのように変化するかを示している。ここでは、 $t>33$ で強い衝撃波が現れ始めることを考慮し、 $t>27$ に対して数値的散逸項を導入した場合、 $t>30$ で導入した場合、の 2 通りについて調べた。この図から次のことが見いだせる。数値的散逸の影響 $\delta(t)$ は解が準定常状態 ($t>45$) に収束するに従い、散逸項を導入した時間にあまり依存せず一定レベルに落ち着く。さらに、 $\kappa=3$, $\kappa=7$ ($\sigma=0.02$) の場合についても調べたが $\delta(t)$ は κ が大なるほど大きくなることを見いだされ、このことは上に述べた予想の裏付けとなることとしてよいだろう。

一方、散逸係数をパラメータとして多くの数値計算を実行した結果、数値的散逸の大きさ $\delta(t)$ が数 % 程度に収まれば、その数値解への影響は衝撃波近傍を除き無視できるくらい小さいことを経験的に見いだしている。したがって、パラメータを適切に選ぶことにより、数値的散逸 (3.2 節) は強い衝撃波を (数値的に) 安定化するほど大きく、同時に放物型方程式 (3) に対しては無視できるほど小さくすることが可能であることが分かる。この際注意すべき点は、拡散領域の半分の厚みの中に、十分多くの格子点 (典型的に 10 以上) が常に存在するようにメッシュ幅を十分小さく設定しておくことである。格子点数が十分でないと、数値的散逸の影響が深刻になり、数値的散逸によって引き起

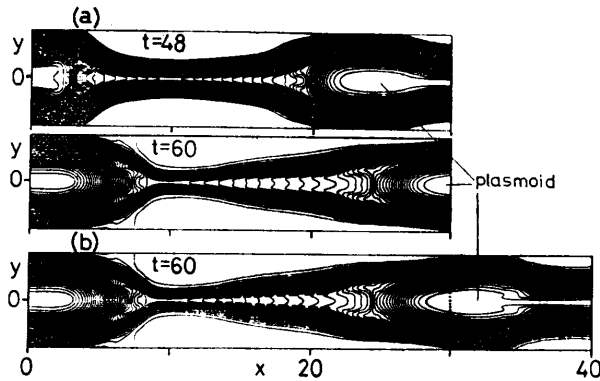


図4 開いた系におけるプラズモイドの成長と伝播を示す磁場形状。(a)は $N_x=605$ の場合、(b)は $N_x=805$ の場合。(b)において定立的スローショックは破線で示されている。

Fig. 4 Magnetic field configuration indicating the growth and propagation of a plasmoid in an open system for the cases (a) $N_x=605$ and (b) $N_x=805$. In (b) standing slow shocks are indicated by dashed lines.

こされた結果を物理的に意義ある現象として誤った結論を引き出す恐れがあり、特別に注意する必要がある。

4.4 開いた系 (OPEN SYSTEM)

人工境界条件 (3.3 節) の有効性を検討するため次のような数値計算を行った。図4 (a)の計算では、計算領域を $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 3.3$ の矩形領域にとり、 $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.015$ ($N_x = 605$, $N_y = 225$), $\Delta t = 0.003$ とした。x 軸, y 軸には前と同じ対称性境界を与えるが、境界 $y = 3.3$, $x = 30$ においては人工境界条件 [(14)式で各々 $n = y$, $n = x$ とおく] を与えた。図4 (b)の計算では他の条件は(a)の場合と全く同じにし、 $N_x = 805$ としてより長い領域を設定した (したがって、 $x = 40$ に人工境界が存在する)。いずれの計算でも数値散逸係数は $\kappa = 5$, $\sigma = 0.02$ とし、 $t > 30$ で導入している。

図4は磁場形状の時間的发展を示しており、プラズモイド (高温プラズマのかたまり) がスローショック (破線で示されている) の右端に形成され、成長しながら x の正方向に有限振幅の圧縮波として伝播する様子が示されている。プラズモイド中ではプラズマが圧縮されており、そのプラズマ圧によって磁力線にふくらみができている。図4 (a)ではプラズモイドは時間 $t = 60$ で境界 $x = 30$ を通過中であるが、図4 (b)では $x = 30$ (点線で示す) は領域中にあり“理想的な人工境界”になっている。これらの図を比べると分か

るように、図4 (b)で示された $0 \leq x \leq 30$ における数値解は図4 (a)の結果と定性的、定量的に良く一致することが確かめられている。他の例 (例えば、スローショックが人工境界の外側まで拡がっている場合) においても同様のことが確かめられた。3.2 節で提案した人工境界の処理方法は、本論文の数値実験においては有効であったことを強調しておく。

5. 結 論

電磁流体方程式の数値計算に基本的なアルゴリズムについて一般的に論じた。Lax-Wendroff 差分スキームを用いて、拡散項の取り扱い、数値的散逸の導入、高速計算アルゴリズムの設計等について具体的な方法を提案した。さらに、数値解の評価法 (すなわち数値計算の診断法)、数値的境界条件 (特に人工境界条件) の設計法を実用的観点から提案した。ここで提案された数値計算法は、放物型 (拡散) 方程式が重要でかつ双曲型方程式の強い非線形性 (衝撃波) を含む問題に適用され、適切に数値パラメータを選ぶことにより、幾つかの妥当性の判定基準を満足する数値解が得られることを数値的に確認した。

電磁流体方程式の応用範囲は非常に広く、適切なアルゴリズムに基づかれた数値計算はプラズマ理工学上の多くの難問を解決する強力な (時として唯一の) 手段となりうるということが認められてきている⁸⁾。現在、空間的に2次元の問題は、スーパーコンピュータの実効性能を向上させることにより極めて精密な計算が可能となっている。実際、4.2, 4.3 節で示された計算結果は、超高速計算によって初めて明らかにされたものであり、複雑な高温プラズマ現象を理解する上で数値計算 (シミュレーション) は不可欠となっている。例えば、図4に示された結果は、地球磁気圏で近年観測されて話題をよんだ大規模プラズモイドの伝播、ハレーすい星の尾のダイナミクス、太陽フレアに伴うプラズマジェット、銀河における宇宙ジェット、等の宇宙プラズマ現象を理解する上で基本的に重要となる。

しかしながら、MHD 数値計算を真に実用化するためには3次元計算が必要であり、精度を落さず (すなわち十分多くの格子点を用いて) 計算を実行するためには超高速計算の実現が本質的となる。例えば、図4 (b)に示す数値計算では、3.4 節で述べたアルゴリズムでプログラムが作製されているが、プログラム全体のベクトル化率は 99.6% であることが調べられ、ベクトル計算機 VP-2000 を用いると FACOM-M 382

を用いた時に比べて実測値で約 30 倍の計算速度が得られた。それでも、ひとつの数値解を得るためには VP-200 を用いて約 90 分の CPU 時間と約 15 MB のメモリを必要とした。この計算を（同程度のメッシュ幅を用いて）3次元計算に拡張すると約 100 倍の計算時間と記憶容量を必要とする。したがって、階層記憶間のデータ転送の最少化⁹⁾、ベクトル長の長大化（多重ループのベクトル化）、グラフィックス（動画）のリアルタイム処理、等スーパーコンピュータの加速性能を最大限引き出すためのアルゴリズム設計、開発がこれからの最大の課題であろう。

謝辞 本研究は一部文部省科学研究費一般研究(C)の援助を受け、計算は京都大学大型計算機センター VP-200 および九州大学大型計算機センター VP-100 によって行われた。記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Ugai, M. and Tsuda, T.: Supercomputing for Plasma MHD Simulations, *Proc. of the First Appi Workshop on Supercomputing*, pp. 109-123 (1987).
- 2) Ugai, M. and Tsuda, T.: Magnetic Field-line Reconnection by Localized Enhancement of Resistivity. Part 1. Evolution in a Compressible MHD Fluid, *J. Plasma Phys.*, Vol. 17, No. 3, pp. 337-356 (1977).
- 3) Richtmyer, R. D. and Morton, K. W.: *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd ed., pp. 351-368, Interscience Publishers, New York (1967).
- 4) Lapidus, A.: A Detached Shock Calculation by Second-Order Finite Differences, *J. Comput. Phys.*, Vol. 2, No. 1, pp. 154-160 (1967).
- 5) Tsuda, T. and Ugai, M.: Magnetic Field-Line Reconnection by Localized Enhancement of Resistivity. Part 2. Quasi-Steady State, *J. Plasma Phys.*, Vol. 18, No. 3, pp. 451-471 (1977).
- 6) Ugai, M.: Global Dynamics and Rapid Collapse of an Isolated Current-Sheet System Enclosed by Free Boundaries, *Phys. Fluids*, Vol. 29, No. 11, pp. 3659-3667 (1986).
- 7) Ugai, M.: Nonlinear Growth of Fast Reconnection in the Long Tearing-Type Field Geometry, *Phys. Fluids*, Vol. 30, No. 7, pp. 2163-2166 (1987).
- 8) Ugai, M.: MHD Simulations of Fast Reconnection Spontaneously Developing in a Long Current Sheet, *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 49, No. 1, pp. 185-192 (1988).
- 9) 津田孝夫, 巽 孝明: メモリの階層性とベクトル計算機の実効性能, *情報処理学会論文誌*, Vol. 25, No. 1, pp. 37-45 (1984).

(昭和 63 年 1 月 22 日受付)

(昭和 63 年 7 月 15 日採録)

編 者 正 行 (正 会 員)



昭和 23 年生。昭和 46 年京都大学工学部電子工学科卒業。昭和 48 年同大学院修士課程修了。同年愛媛大学工学部助手。現在同大学工学部情報工学科助教授。工学博士。計算物理の基礎的研究に従事。現在は数値シミュレーション、特に数値解析、スーパーコンピューティング、グラフィックス（アニメーション）等に興味をもつ。電気学会等会員。

津 田 孝 夫 (正 会 員)



1932 年生。1957 年京都大学工学部電気工学科卒業。現職は京都大学工学部情報工学科教授。工学博士。現在の主要研究テーマは、メモリ階層間データ転送量の下限とそれによるアルゴリズムの最適化、ベクトル計算機のための自動ベクトル化と自動並列化、実時間オペレーティングシステムなど専用 OS の構成と実現法など。