

H-11 Fokker-Planck 方程式から見たニューラルネットワークの 1/f スペクトル特性 1/f spectra characteristics of Neural Networks from the Fokker-Planck Equation

神谷 良信†
Yoshinobu Kamitani

松葉 育雄‡
Ikuo Matsuba

1. まえがき

過去 100 年ほどにわたって、1/f タイプの長期記憶現象が物理学、生物学、社会学などの諸分野にわたって観測されている[1],[2],[3]. 1/f の普遍性にもかかわらず、1/f を示すシステムの一般的なメカニズムは今だ明らかになっていない。しかし、それを明らかにしようとする試みの中で、自己組織化臨界現象 (SOC, Self-Organized Criticality) が多くのシステムとの関係があるようである[4],[5]. そこで、我々は、SOC の観点を加味したニューラルネットワークモデルを、空間スケールで粗視化し[6], 1/f を空間の自己相似性より導いた。さらに、2次元空間に広がるニューラルネットワークモデル上でシミュレーションを行い、1/f スペクトルを確認した[7],[8],[9],[10]. その後、1/f スペクトルは3次元空間内でも、解析的、実験的に確認された[11]. しかしながら、それらの研究で 1/f スペクトルを導く自己相似解の存在は示したものの、それがなぜゆえ有限なネットワーク上で安定に存在しうるのかについて議論はしていない。ゆえに今回、それを示すために確率的な取り扱いを考えた。具体的には、いまだ1次元内モデルに対してであるが、確率の流れを扱う Fokker-Planck 方程式により、自己相似解が安定である場合の性質を解析的、実験的に考察、確認するものである。

2. ニューラルネットワーク

我々は、1次元内のニューロンの挙動を表す基本式として、

$$\dot{x}_i = x_i(1-x_i^2) + \lambda(w_{i,i-1}x_{i-1} + w_{i,i+1}x_{i+1}) + \xi_i \quad (1)$$

を取る。この式の右辺はニューロン x_i が ± 1 のいずれかの安定状態へ向かうしきい値の効果を意味する項、左右の2つのニューロンからの相互作用を意味する項、さらに揺動項からなっている。式中の変数、 $w_{i,i-1}$, $w_{i,i+1}$ は、+1、または-1 を確率 1/2 で取るものとする。揺動項は周囲からの影響を総合して平均 0、分散 D のガウス分布に従うとする。これを基本式とする1次元内のニューラルネットワークは、 $\lambda=1/2$ の場合に、解析的にも、また数値計算でも、1/f スペクトルを示すことが分かっている[10]. 具体的に、式(1)の揺動項を取り除いた方程式は、

$$x_i(t) \propto t^{-1/2} \quad (2)$$

なる自己相似解をもち、これからパワースペクトルは、

$$P(f) \propto \frac{1}{f} \quad (3)$$

と算出される。実験的には、式(1)に従うニューロン

†千葉大学大学院自然科学研究科 博士後期課程

‡千葉大学工学部情報画像工学科

群が適切な揺動項により外乱を受ける場合に、各ニューロン値の総和量の挙動として 1/f スペクトルが観測される。

さて、式(1)に従うニューロン N 個からなる1次元内の開放端モデルを考える。その系に Fokker-Planck 方程式を用いた解析を行おう[12],[13]. この場合、FP 方程式は $W(\{x\}, t)$ なる確率 W を考えて、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\{x\}) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{i,j}^{(2)}(\{x\}) \right] \cdot W \quad (4)$$

となる。式(4)を解くと、定常状態での解として、

$$W(\{x\}) = \exp \left(\frac{2N}{D} \left[\frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{4\lambda^2}{D} \right) \frac{x^4}{4} \right] \right) \quad (5)$$

を得る。後に、実験的には $2|\lambda| = \sqrt{D}$ の場合を中心に 1/f スペクトルが得られることが判明するのであるが、式(5)を見ると、系が臨界状態の場合、つまり、 $2|\lambda| = \sqrt{D}$ となり、確率が発散する臨界点の場合に 1/f スペクトルが現れることが理論的に明らかとなる。

3. F P 方程式と数値実験

3.1 Fokker-Planck 方程式より

図1に $D=4.0$ と $D=1.2$ の場合の Fokker-Planck 方程式からの解曲線を示す。明らかに、 $D=4.0$ から D が小さくなるにつれて、徐々にニューロンが2つの安定状態にある確率が大きくなる遷移が見られる。つまり、揺動項による外乱を受けるが、各ニューロンは安定状態に緩和してゆく。外乱が大きい場合、系は安定状態に達することができない。外乱が小さければ小さいほど、つまり、 D が小さいほど、系は 1/f スペクトル特性を示す。これより、式(1)のダイナミクスを持つニューラルネットワークは、外乱が小さいほど、1/f を示すことが分かる。

3.2 理論と実験の相違点

前節で述べたように、 D が小さいほど、系は 1/f スペクトル特性を示すのであるが、詳細な実験によると、 $D < 0.2$ の場合は D が小さくなるにつれ、 $P(f) \propto 1/f^\beta$ として、 β も 1 より小さくなっていく。これは、一見、前節と矛盾するようである。しかし、 ξ_i が揺動項であることに注意すると、これは式(1)中の第1項の安定状態に向かう効果が大きくなり、ニューロン群が安定状態から変化できなくなっているものと解釈できる。つまり、 ξ_i は揺動項として外乱を表しており、大きくなると系は 1/f を示さなくなるのであるが、それと同時に、式(2)に従って緩和過程を取り続ける各ニューロンに、外部からエネルギーを供給する効果も持っているものと考えられる。すなわち ξ_i には2つの側面がある。これが他の効果とバランスする場合に、1/f が現れるものと考えられる。

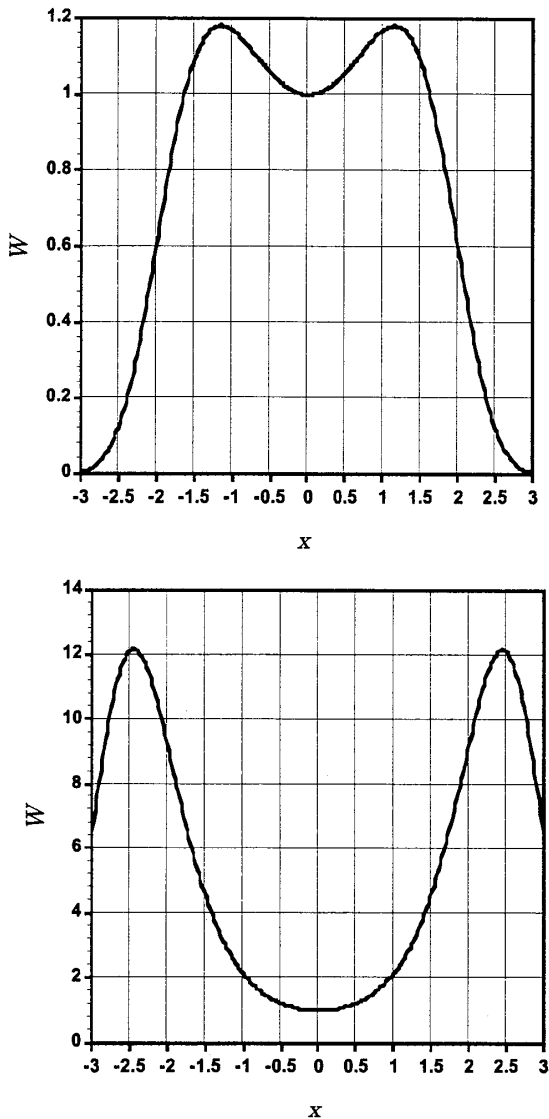


図1 xの分布. 上から, $D=4.0$, $D=1.2$, の場合

4. 結論

前章までの議論より, $1/f$ スペクトルが現れる条件が明らかになる. 本研究のモデルでは, $2|\lambda| = \sqrt{D}$ の場合を中心として, すなわち, 1次元内モデルでの左右からのニューロンの影響と, 遷動項の効果が同程度の場合を中心として, $1/f$ が現れる. この場合に, 式(1)のしきい値の効果, 相互作用の効果, 遷動項の効果, がバランスを保つものと考えられる. さらにFP方程式によると, D が大の場合に x は分散しており局所的なピークをもたない, また D が小の場合には局所的なピークを持ち, その場合に $1/f$ スペクトルが観測される. また, さらに D が小の場合, 系は各ニューロンが変化しない状態に落ち込んでしまう. これらは数値実験でも確認される. つまり, 各ニューロンがしきい値の効果もたらす安定点の周囲で, 相互作用を受けながら, 適当な外乱を受け振動している場合, $1/f$ スペクトルが現れると言える.

今後は, 2次元内, 3次元内のネットワークモデルにもFP方程式を適用し, 解析を試みるのが課題である.

また, $1/f$ スペクトルは非線形現象の1つであるが, 本研究でのモデルのような比較的単純なモデルにガウスノイズを付加しただけで, それが現れるのは興味ある現象である. 実際, モデル式(1)の右辺は, 系からのエネルギーの散逸, 系内の相互作用, そして系へのエネルギーの供給を表している. この点からは, 本研究はより一般的な非平衡開放系に現れる $1/f$ スペクトルを解明する端緒足り得るのでは, と期待される.

5. 文献

- [1] H.J.Jensen, "Lattice gas as a model of $1/f$ noise," *Physical Review Letters*, vol.64, no.26, pp.3103-3106, June 1990.
- [2] D.L.Gilden, T.Thornton, M.W.Mallon, " $1/f$ noise in human cognition," *Science*, vol.267, pp.1837-1839, Mar. 1995.
- [3] Y.Chen, M.Ding, J.A.Scott Kelso, "Long memory processes ($1/f^\alpha$ type) in human coordination," *Physical Review Letters*, vol.79, no.22, pp.4501-4504, Dec. 1997.
- [4] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise," *Physical Review Letters*, Vol.59, no.4, pp.381-384, July 1987.
- [5] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality," *Physical Review A*, Vol.38, no.1, pp.364-374, July 1988.
- [6] 松葉育雄, "高周波領域における普遍スペクトル特性," *日本応用数学会論文誌*, vol.7, no.4, pp.415-428, 1997.
- [7] 神谷良信, 須鎗弘樹, 松葉育雄, "ニューラルネットワークシミュレーションによる脳波の $1/f$ スペクトルの検証," 1999 信学ソ大, no.A-2-10, p.43, Sept. 1999.
- [8] H.Suyari, Y.Kamitani, and I.Matsuba, "Randomly connected neural networks displaying $1/f$ spectra," *IJCNN2000, the proceedings(CD-ROM)*, Como, Italy, July 2000.
- [9] Kamitani, H.Suyari, and I.Matsuba, " $1/f$ fluctuation derived from the coarse-graining method for a neural network model," *ICONIP2000, the proceedings(CD-ROM)*, Taejon, Korea, Nov. 2000.
- [10] 神谷良信, 須鎗弘樹, 松葉育雄, "ニューラルネットワークモデルの空間的粗視化による $1/f$ スペクトルの導出," *信学論 (A)*, vol.J84-A, no.9, pp.1148-1156, Sept. 2001.
- [11] Y.Kamitani, and I.Matsuba, "Neural Networks in Three Dimensions Producing $1/f$ spectra," *ICONIP2001, vol.2*, pp.627-631, Shanghai, China, Nov. 2001.
- [12] 堀 淳一, *ランジュバン方程式*, 岩波書店, 東京, 1977.
- [13] H.Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag Press, New York, 1989.