A-38

総頂点間経路長を最小にする完全K分木の根と深さ同一全頂点の追加的隣接化

Additional Adjacencies between the Root and All Nodes with the Same Depth in a Complete K-ary Tree Minimizing Total Path Length

澤田　清 †
Kiyoshi Sawada

1．まえがき

企業などの組織の階層構造（ピラミッド組織）は，構成主体（個人や部，課など）を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に対して追加的な隣接化を行う（辺を追加する）ことは，上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する [1]．

筆者らは，すでに，高さ H の完全２分木の，同じ深さの２頂点間および同じ深さの全頂点間に追加的隣接化を行った場合に，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする隣接深さを求めた [2]．また，より一般化した完全 K 分木に対して，根と根以外の１つの頂点との間に追加的隣接化を行った場合に，総頂点間経路長を最小にする頂点深さを求めた [3]．本研究では，完全 K 分木の根とある深さの全頂点との間に追加的隣接化を行う場合に，総頂点間経路長を最小にする隣接の深さについて考える．これは，完全 K 分木型の構造を持つ組織内の最上位層の主体（社長など）と特定の下位層の全主体との間で追加的な関係形成を行う場合に，どの層と関係を結べば組織全体の情報伝達が最も効果的になるかという問題に対応している．

2．総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述したように，高さ $H(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の，深さ $N(N=2,3,\cdots,H)$ の全頂点と根とを隣接化する．ただし，完全 K 分木は，すべての葉が同じ深さをもち，すべての内部頂点の次数が K であるような K 分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

このとき，総頂点間経路長が最小となる N を求めることを考える．ここでは，追加的な隣接化を行うことにより，隣接化前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたか（総頂点間短縮経路長と呼ぶ）を定式化する．

深さ N 以上の頂点同士は，深さ N の頂点から追加辺を通って根まで行き，根から追加辺を通って深さ N の頂点まで行く経路により短縮される．この短縮経路長について，深さ N 以上の頂点のすべての組み合わせの総和を求めると，

$$A_H(N)=\left\{M(H-N)\right\}^2 K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1} iK^i \tag{1}$$

となる．ここで，$M(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．

次に，深さ N 以上の頂点と深さ N 未満の頂点の短縮経路長を求める．この場合，２通りの経路によって短縮される．すなわち，深さ N の頂点から追加辺を通って根まで行き，根から追加辺を通って深さ N の頂点まで行ってから一階層ずつ上がって深さ N 未満の頂点へ到達する経路（下ルートと呼ぶ）と，深さ N の頂点から追加辺を通って根まで行った後，一階層ずつ下がって深さ N 未満の頂点へ到達する経路（上ルートと呼ぶ）である．両ルートの短縮経路長のうち大きい方の短縮経路長の総和を求めるが，下ルートと上ルートの短縮経路長が等しい場合は，式の上では上ルートの短縮経路長を用いる．このと

†流通科学大学 情報学部 経営情報学科
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

き，下ルートおよび上ルートの短縮経路長は，それぞれ次のように定式化される．

$$B_H(N) = 2M(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{[N/2]-1}\sum_{j=1}^{N-i-1} jK^j, \tag{2}$$

$$C_H(N) = M(H-N)K^N\sum_{i=1}^{[N/2]}\Big\{(K-1)M([(N+1)/2]-i)+1\Big\}(N-2i+1). \tag{3}$$

ただし，$[\cdot]$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す．また，$\sum_{i=1}^{0}\cdot = 0$ と定義する．

次に，深さ N 未満の頂点同士の短縮経路長を求める．この場合，以下の３通りに分けて考える．まず同じ深さの頂点同士の場合は，その頂点から一階層ずつ下がって深さ N の頂点まで行き，追加辺を通って根まで行く．さらに追加辺を通って深さ N の頂点へ行き，そこから一階層ずつ上がって行く経路により短縮される．この場合の短縮経路長は，

$$D_H(N) = K^N(K-1)\sum_{i=1}^{[N/2]-1}\sum_{j=1}^{N-2i-1} jK^j \tag{4}$$

となる．２頂点の深さが異なる場合は，深い方の頂点から深さ N の頂点まで一階層ずつ下がって行き，追加辺を通って根まで行く．そこから，追加辺を通って深さ N の頂点まで行ってから一階層ずつ上がって浅い方の頂点へ行く経路（下ルート）と，根から一階層ずつ下がって浅い方の頂点へ行く経路（上ルート）に分けられる．ここでも，下ルートと上ルートの短縮経路長が等しい場合は，式の上では上ルートの短縮経路長を用いることとすると，下ルートおよび上ルートの短縮経路長は，それぞれ次のように定式化される．

$$E_H(N) = 2K^N(K-1)\sum_{h=1}^{[N/2]-2}\sum_{i=1}^{[N/2]-h-1}\sum_{j=1}^{N-2h-i-1} jK^j, \tag{5}$$

$$F_H(N) = \sum_{i=1}^{[N/2]-1} K^{N-i}\sum_{j=1}^{[N/2]-i}\Big\{(K-1)M([(N+1)/2]-j)+1\Big\}(N-2i-2j+1). \tag{6}$$

ただし，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot = 0$ と定義する．

以上より，総頂点間短縮経路長は，

$$S_H(N) = A_H(N) + B_H(N) + C_H(N) + D_H(N) + E_H(N) + F_H(N) \tag{7}$$

となる．

総頂点間短縮経路長を最大にする，すなわち総頂点間経路長を最小にする N の値に関する解析結果は，発表時に報告する．

参考文献

[1] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86, 1993.

[2] 澤田 清, 宇野 斉, “完全２分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, Vol.10, No.4, pp.335–346, 2000.

[3] 澤田 清, 宇野 斉, “総頂点間経路長を最小にする完全K分木の根との追加的隣接化”, 情報処理学会第61回全国大会講演論文集 (1), pp.167–168, 2000.