A-21

Affine Arithmeticにおける最良乗算の実現

Realization of the Best Multiplication in Affine Arithmetic

宮島信也 [1] 宮田孝富 [1] 柏木雅英 [1]
Shinya MIYAJIMA Takatomi MIYATA Masahide KASHIWAGI

早稲田大学理工学部情報学科 [1]
Department of Information and Computer Science, School of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

数値計算において, 計算を行うと同時にその結果の誤差評価をも同時に計算するような方法を総称して**精度保証付き数値計算**と呼び, 近年急速な進歩を遂げている. 精度保証付き数値計算の実現において最も基本的かつ重要な技法に, **区間演算**が挙げられる. 区間演算とは, 実数値を [下限, 上限] という 2 つの浮動小数点数で挟まれた区間で表現し, その区間同士の加減乗除等の演算を「演算結果として有り得る集合を包含するように」定義することにより行われるものである. そのとき, 区間の両端を計算する際に丸めの向きを「外向き」にしておくことによって丸め誤差の影響分を区間内に収め, 丸め誤差の把握を行うことが出来る.

区間演算の問題点の一つとして, 確かに計算された区間は真の値を含むものの, 区間幅が極端に広くなってしまうことが多い点が挙げられる. この現象は, 複数の変数の間に互いに相関があるにも関らず, 区間演算ではそれを無視して独立な値として計算を行ってしまうことに原因がある.

区間演算における上記の問題を解決するための方法の 1 つとして,**Affine Arithmetic** が挙げられる.Affine Arithmetic は Affine 形式とよばれる多項式のもとで, 変数間の相関関係を考慮して計算を行うという特徴をもち, これにより, 通常の区間演算で見られる区間の幅の増大を抑える効果が期待される. 加減算や定数倍など線形演算は問題ないが, 非線形演算の場合は新しいダミー変数 $\varepsilon_{\mathbf{new}}$ を導入することにより計算結果を Affine 形式とできる.Affine Arithmetic を様々な関数に適用するためには非線形演算の実現方法が重要である.

Affine Arithmetic における非線形演算については, 単項演算については, 最適な実現方法が分かっている. しかし, 乗算 $x \times y$, 除算 x/y については最適な実現方法が分かっていない. そこで本報告では新手法として,Affine Arithmetic における乗算の, 最適な評価を与える方法 (**最良乗算**) と,Arithmetic における除算の, 現状の方法よりも良好な評価を与える方法 (**改良除算**) を提案する. またこれらの新手法と現状の方法との比較を行い, これらの新手法の方が現状の方法より良好な評価を与えることができることを示す.

2 区間演算

区間演算とは, 実数値を [下限, 上限] という 2 つの浮動小数点数で挟まれた区間で表現し, その区間同士の加減乗除等の演算を「演算結果として有り得る集合を包含するように」定義することにより行われるものである. すなわち演算結果の区間には, 上端に演算結果のとりえる最大値を, 下端に演算結果のとりえる最小値をおく. このような演算を加減乗除や単項演算に対して定義しておけば, それらの組合せで書かれた関数の値域の包含が出来ることは明らかである. ここで, 区間の両端を計算する際に丸めの向きを, 区間の下限を計算するときには切り捨て, 区間の上限を計算するときには切り上げを行うようにすれば, 丸め誤差があっても真値を包含するという区間演算の性質は損なわれない.

だが, 区間演算の問題点の一つとして, 確かに計算された区間は真の値を含むものの, 区間幅が極端に広くなってしまうこと (精度が極端に低下してしまうこと) が多い点が挙げられる. この現象は,2 つの変量 (変数) 間で互いに相関があるにも関らず, 区間演算における減算ではそれを無視して独立な値として計算を行ってしまうことに原因がある. ゆえに区間演算における上記の問題を解決するためには, 変数間の相関性を考慮しつつ計算を行う必要がある.

3 Affine Arithmetic

Affine Arithmetic は変数間の相関性を考慮することにより 2 節で述べた区間演算における問題を解決する方法の一つである. この方法は文献 [1] で提案されたものである.Affine Arithmetic では, 変量 x は affine 多項式

$$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \tag{1}$$

で表される. ここで,x_i は実数であり, ε_i はそれが $[-1,1]$ に含まれることだけが分かっているような dummy 変数である.Affine 多項式は, 次のようにして通常の区間に変換できる.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta], \delta = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{2}$$

Affine 多項式 x, y に対して, 加算, 減算, 乗算は次のように定義する (ただし α は定数).

$$\begin{aligned} x \pm y &= (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1)\varepsilon_1 \\ &\quad + \cdots + (x_n \pm y_n)\varepsilon_n && (3) \\ x \pm \alpha &= (x_0 \pm \alpha) + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n && (4) \\ \alpha x &= (\alpha x_0) + (\alpha x_1)\varepsilon_1 + \cdots + (\alpha x_n)\varepsilon_n && (5) \end{aligned}$$

次に非線形演算について述べる. 非線形演算 f に対して, affine 多項式 x に対する単項演算 $z = f(x)$ は一般に, affine 多項式で表すことはできない. このような場合は,

$f(x)$ をなるべく良く近似するような一次関数 $ax+b$ を求め, 新しい dummy 変数 ε_{n+1} を導入し,

$$f(x)=(ax+b)+\delta\varepsilon_{n+1} \quad (\delta=\max_{x\in X}|f(x)-(ax+b)|) \quad (6)$$

を最適な評価としている.

一方, 非線形二項演算においては現状では多くの課題を残している. その理由を説明するために変数間の相関について述べる. 変数間に相関がある場合とは Affine 形式で表現された区間 (変数)x,y の間で, 共通の ε が用いられている (添字が同じ ε が用いられている) 場合である. このとき変数 x,y は互いに独立した値をとることができないため, 点 (x,y) は変数 x,y の変域 X,Y $(X=[x_0-\delta_x,x_0+\delta_x],Y=[y_0-\delta_y,y_0+\delta_y],\delta_x=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\delta_y=\sum_{i=1}^{n}|y_i|)$ により構成される長方形領域 $X\times Y$ 内の全ての点をとることができない. ゆえに非線形二項演算においては変数 x,y 間の相関を考慮して, 点 (x,y) が真にとりうる領域に対して最適な a,b,c,δ を求め,$x/y=ax+by+c+\delta\varepsilon_{\text{new}}$ を結果とする必要がある. 非線形二項演算においても非線形単項演算と同様の方法は可能ではあるが, この方法は変数 x,y 間の相関を無視し, 点 (x,y) がこの長方形領域 $X\times Y$ 内の全ての点をとるものとして x/y を $ax+by+c$ で線形近似してしまう.

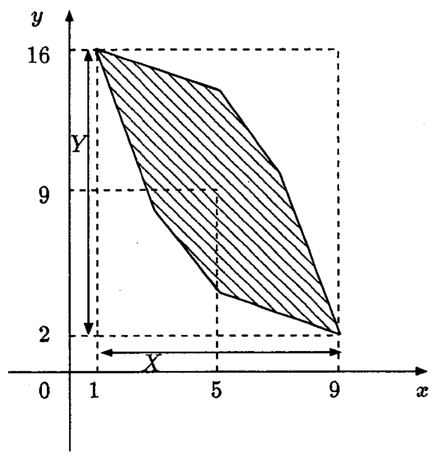

図 1 変数 x,y 間に相関がある場合 ($x=5+2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$ $x\in[1,9]$, $y=9-\varepsilon_1+4\varepsilon_2+2\varepsilon_3$ $y\in[2,16]$ のとき. 点 (x,y) が真にとりうる領域は斜線部)

4 Affine Arithmetic の乗算

4.1 現状の乗法

本方法は点 (x,y) が長方形領域 $X\times Y$ 内の全ての点をとるものとして, **長方形領域 $X\times Y$ に対して最適な** a,b,c,δ を求め,$xy=ax+by+c+\delta\varepsilon_{\text{new}}$ を結果とする. 本方法は変数 x,y 間に相関がない場合に限れば最適な評価を与えるが, 変数 x,y 間に相関がある場合, 最適な評価を与えることができない.

4.2 新手法 (最良乗算)

本方法は点 (x,y) が変数 x,y 間の相関を考慮し, **点 (x,y) が真にとりうる領域に対して最適な** a,b,c,δ を求め,$xy=ax+by+c+\delta\varepsilon_{\text{new}}$ を結果とする. 本方法は現状の方法に比べ常に同等以上の評価を与え, その評価は常に最適である.

5 Affine Arithmetic の除算

5.1 現状の方法

本方法は長方形領域 $X\times Y$ に対して最適な a,b を求め, その a,b を用いて**長方形領域 $X\times Y$ に対して最適な** c,δ を求め,$x/y=ax+by+c+\delta\varepsilon_{\text{new}}$ を結果とする. 本手法は変数 x,y 間に相関がない場合には最適な評価を与えるが, 変数 x,y 間に相関がある場合には最適な評価を与えることができない.

5.2 新手法 (改良除算)

本手法では長方形領域 $X\times Y$ に対して最適な a,b を求め, その a,b を用いて**点 (x,y) が真にとりうる領域に対して最適な** c,δ を求め,$x/y=ax+by+c+\delta\varepsilon_{\text{new}}$ を結果とする. 本手法における a,b の取り方は常に最適とは限らないが, 与えられた a,b に対する c,δ の取り方は常に最適である. 本手法は現状の方法に比べ, 常に同等以上の評価を与えることが予想される.

6 数値例による比較

数値例として,$x\in[0,1],y\in[1,3](x=0.5+0.5\varepsilon_1,y=2+\varepsilon_2)$ のとき, 乗算の例として $(x+2y)(x-y)+7y$, 除算の例として $\frac{-3x+2y}{2x+y}-0.2y$ の区間評価を行う. このとき, 演算結果の区間幅が狭い演算方法ほど高精度な演算方法である. 通常の区間演算,Affine Arithmetic における乗除算現状の方法, 新手法を使用したときの演算結果の区間幅は次のようになる.

乗算の演算結果の比較

使用した方法	演算結果の区間幅
通常の区間演算	35.000000
Affine Arithmetic(現状の方法)	18.500000
Affine Arithmetic(新手法)	13.531250

除算の演算結果の比較

使用した方法	演算結果の区間幅
通常の区間演算	6.200000
Affine Arithmetic(現状の方法)	4.810998
Affine Arithmetic(新手法)	3.524211

7 結論

6 節より新手法の方が現状の方法より良好な評価を与えることを示すことができた. ゆえに結論として,Affine Arithmetic の乗除算を行うときには本論文で提案した新手法の利用をお薦めしたい.

参考文献

[1] Marcus Vinícius A.Andrade, João L. D.Comba and Jorge Stolfi: "Affine Arithmetic", INTERVAL '94, St. petersburg (Russia), March 5-10, 1994.

[2] 白井健一, 宮田孝富, 柏木雅英:"Affine Arithmetic における除算について", 2000 年電子情報通信学会基礎・境界ソサエティ大会講演論文集,A-2-3,p.45