LA-8 Arborescent 絡み目に対するジョーンズ多項式計算アルゴリズム

A polynomial-time algorithm for computing the Jones polynomials of arborescent links

原　正雄*　　谷　聖一†　　山本　慎‡
Masao Hara　　**Sei'ichi Tani**　　**Makoto Yamamoto**

1 はじめに

絡み目が自明な絡み目であるかを判定する問題や二つの絡み目が同値であるかを判定する問題は，結び目理論における基本的問題である．1999 年に J. Hass, J. C. Lagarias, N. Pippenger [1] によって，絡み目が自明であるかを判定する問題が **NP** に入ることが示された．一方，二つの絡み目が同値であるかを判定する問題に対しては，原始帰納的であるかどうかも知られていない．

結び目理論では，この問題と関連して様々な絡み目の不変量が定義され研究が行われてきた．最も代表的な多項式不変量の一つであるジョーンズ多項式は，V.F.J. Jones [3] により定義され，L.H. Kauffman [4] により絡み目のダイアグラムから組み合わせ論的に計算する方法が考案された．非自明な結び目で自明な結び目と同じ Jones 多項式を持つものは，現在まで知られておらず，Jones 多項式は結び目の判別能力に優れいる．しかし，Kauffman の計算法では $2^{c(\tilde{L})}$ 個の多項式の和を計算しなければならない．ここで，$\tilde{L}$ は，Jones 多項式を計算したい絡み目のダイアグラムで，$c(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の交点数とする．実際，D.J.A. Welsh [2, 7] により Jones 多項式の計算は #–**P** 困難であることが示されており，最悪指数時間かかると予想される．

このように，Jones 多項式の計算は一般には困難であると思われるが，入力する絡み目のダイアグラムに制限を加えると，多項式時間で計算できる場合があることが知られている．Mighton [6] により，Tait グラフの tree width が高々 2 であるとき，その Kauffman ブラケット多項式が $O(c(\tilde{L})^4)$ 時間で計算できることが示されている．また，Makowsky [5] により，Tait グラフの tree width が定数のとき，その Kauffman ブラケット多項式が $c(\tilde{L})$ の多項式時間で計算できることが示されている．本論文では，Arborescent 絡み目のダイアグラムの Kauffman ブラケット多項式を計算するアルゴリズムで，Mighton の方法よりも実現が容易で高速なものを示す．

定理 1 任意の *Arborescent* 絡み目のダイアグラム $\tilde{L}$ に対して，その *Kauffman* ブラケット多項式（ジョーンズ多項式）は $O(c(\tilde{L})^3)$ 時間で計算できる．

2 結び目理論に関する定義

3 次元ユークリッド空間内に埋め込まれた，互いに素な n 個の単純閉曲線 (円周 S^1) を n 成分の絡み目または単に絡み目 という．特に，1 成分の絡み目を結び目 という．絡み目を平面に射影した図で，多重点が横断的に交わっている 2 重点のみのものをその絡み目の**正則射影**という．さらに，各 2 重点にもとの絡み目における交叉の上下の情報を加えたものを，その絡み目の**ダイアグラム**といい，2 重点を交点という．

*東海大学理学部情報数理学科
†日本大学文理学部情報システム解析学科
‡中央大学理工学部数学科

L を絡み目，$\tilde{L}$ を L のダイアグラム，$C(\tilde{L})$ を $\tilde{L}$ の交点の集合 $c(\tilde{L})$ を $\tilde{L}$ の交点数とする．写像 $s : C(\tilde{L}) \longrightarrow \{+1,-1\}$ を $\tilde{L}$ のステート (*state*) といい，$\mathcal{S} = \{-1,1\}^{c(\tilde{L})}$ を $\tilde{L}$ のステート全体の集合とする．各 $s \in \mathcal{S}$ について，$\mu(s) = \sum_{c \in C(\tilde{L})} s(c)$，絡み目のダイアグラム $\tilde{L}$ の各交点 c において，図 1 のように変形して得られる交点のない ダイア

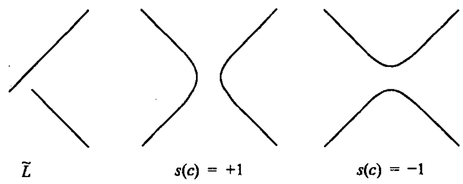

図 1: 交点のスムージング

グラム $s\tilde{L}$ の成分数を $\beta(s)$ とし，A を変数とする Laurent 多項式 $T(s)$ を $A^{\mu(s)}\left(-A^2 - A^{-2}\right)^{\beta(s)-1}$ とおく．このとき，絡み目のダイアグラム $\tilde{L}$ の *Kauffman* ブラケット多項式 $\langle\tilde{L}\rangle$ は，次のように定義される: $\langle\tilde{L}\rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}(\tilde{L})} T(s)$

絡み目 L の各成分に向きがついているとき L を有向絡み目という．有向絡み目の (有向) ダイアグラム $\tilde{L}$ に対して，$V_L(A) = (-A^{-3})^{w(\tilde{L})}\langle\tilde{L}\rangle$ とおくと，V_L は $\tilde{L}$ の選び方によらないことが知られている．ただし，ここで $w(\tilde{L})$ はライズ (*writhe*) とよばれる整数である．ジョーンズ多項式とは，この V_L で $A = t^{\frac{3}{4}}$ と変数変換したものである．詳しくは [4] を参照．

絡み目のダイアグラムにより分けられる平面の領域をチェッカーボードのように白黒 2 色に塗り分ける．このうち一方の色，たとえば非有界な領域を含まない色の各領域に 1 つずつ点を取る．それらの点を図 2 のように線で結び，各線には，図 3 のように $+, -$ を つける．このようにして得られるグラフを，その絡み目またはダイアグラムの *Tait* グラフという． $G = (V, E, \mathrm{sgn})$ を $\tilde{L}$ の Tait グラフとする．ステートを E から $\{+1,-1\}$ への写像とみなし，ステート s に対して，E_s を $E_s = \{e \in E | \mathrm{sgn}(e) = s(e)\}$ とし，sG を

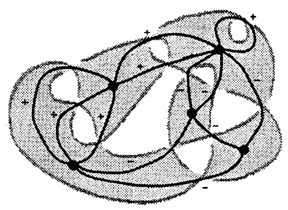

図 2: Tait グラフ

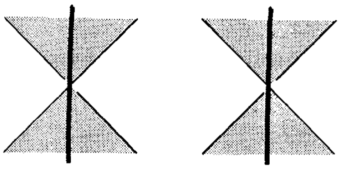

図 3: Tait グラフの辺の符号

$sG = (V, E_s)$ とする．すると，$\beta(s)$ は，sG の 0 次元と 1 次元の Betti 数の和となり，sG から $T(s)$ が容易に計算でき，Tait グラフから Kauffman ブラケット多項式が計算できることがわかる．

3　定理の証明

定理 1 の証明は，より単純なダイアグラムに対して Kauffman ブラケット多項式を求める多項式時間アルゴリズムを構成し，それらのアルゴリズムを利用して Arborescent 絡み目のダイアグラムに対する多項式時間アルゴリズムを構成することにより行う．

補題 2 絡み目のダイアグラムの *Tait* グラフが木のとき，その *Kauffman* ブラケット多項式は線形時間で計算できる．

定義 絡み目のダイアグラム $\tilde{L}$ が $(2, n)$ 型トーラス絡み目のダイアグラムであるとは，$\tilde{L}$ の Tait グラフ G が，$|n|$ 辺からなるサイクルか，あるいは，2 頂点とその 2 頂点間を結ぶ $|n|$ 辺からなるグラフになり，$n > 0$ のときすべての辺のラベルが $+$ で，$n < 0$ のときすべての辺のラベルが $-$ のときをいう．

補題 3 $(2, n)$ 型トーラス絡み目のダイアグラム の *Kauffman* ブラケット多項式は，$O(n \log n)$ 時間で計算できる．

ダイアグラム中で，少なくとも 1 個以上の交点で上を通り交点の下を通らないものを上道という．上道の中でそれ以上長くとれないものを最長上道という．最長上道が 2 本であるようなダイアグラムを持つ絡み目を 2-*bridge* 絡み目という．

補題 4 2-*bridge* 絡み目のダイアグラムの *Kauffman* ブラケット多項式は多項式時間で計算できる．

定義 絡み目のダイアグラム $\tilde{L}$ の Tait グラフ G にある頂点 v が存在して $V(G) \setminus \{v\}$ の誘導部分グラフが木になるとき，$\tilde{L}$ を *Arborescent* 絡み目のダイアグラム という．

定理 1 の証明．（概略）Tait グラフを G とし，G の頂点でそれを取り除くと木になる頂点を v，$V(G) \setminus \{v\}$ の誘導部分グラフの木を T とおく．T の任意の頂点 v' について，$\{v, v'\}$ は G の 2–カットになり，G の部分グラフ G_1, G_2 が存在し，$G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \{v, v'\}$ となる．絡み目のダイアグラムは G_1, G_2 に対応する 2 つのタングル分解にできる．このとき，G_i，$(i = 1, 2)$ に対応するタングルの分母と分子は，それぞれ，G_i と G_i において v と v' を同一視したグラフ $G/(v = v')$ を Tait グラフにもつ絡み目のダイアグラムになる．

T^* を次数 2 の頂点がなく，T を細分にもつようなグラフとする．T^* は T の次数 2 の頂点を端点にもつ辺を縮約していくことにより得られる．T^* の各辺 e は T のパス $\alpha(e)$ に対応し，その両端点は次数が 2 ではない．$\alpha(e)$ と v から $\alpha(e)$ に結ぶ辺を合わせた G の部分グラフを考えると，G の分解 $G = \bigcup_{e \in E(T^*)} G_e$ が得られ，$e \neq e'$ のとき $G_e \cap G_{e'}$ は空か T^* の 1 つの頂点になる．この分解は一意的ではない．$\{G_e\}_{e \in E(T^*)}$ を利用して Kauffman ブラケット多項式は次のように $O(c(\tilde{L})^3)$ 時間で計算できる．

ステップ **1:** G と v から T, T^* と $\{G_e\}_{e \in E(T^*)}$ を計算．

ステップ **2:** 全ての $e \in E(T^*)$ に対して $e = v_1 v_2$ とする．$\deg_{T^*}(v_1) = 1$ $(\deg_{T^*}(v_2) = 1)$ のとき，G_e を Tait グラフにもつ絡み目のダイアグラムと $G_e/(v = v_1)$ $(G_e/(v = v_2))$ を Tait グラフにもつダイアグラムは共に 2–bridge ダイアグラムであ．これらの多項式を e のラベルとする．$\deg_{T^*}(v_i) > 2, (i = 1, 2)$ のとき，G_e, $G_e/(v = v_1)$, $G_e/(v = v_2)$, $G_e/(v = v_1 = v_2)$ の 4 つのグラフそれぞれを Tait グラフにもつ絡み目のダイアグラムは，全て 2–bridge ダイアグラムであり Kauffman ブラケット多項式は多項式時間で計算できる．これらの多項式を e のラベルとする．

ステップ **3:** T^* の辺の組 e, e' で e と e' は共通の頂点 v_1 をもち，e も e' も v_1 以外の頂点の T^* における次数が 1 となる組があるとき，$G_e \cup G_{e'}$ と $(G \cup G_{e'})/(v = v_1)$ をそれぞれ Tait グラフにもつ絡み目のダイアグラムは e と e' のラベルから高々6 回の多項式の四則演算で計算できる．T^* から e' を取り除き e のラベルをここで計算した多項式に更新する．上のような辺の組がないとき，T^* の辺 e の端点の次数が 1 となるものを選ぶ．e の次数が 1 でない頂点 v_1 を含む他の辺は 1 つである．それを e' とする．e' は高々 4 つのラベルを持っていて，$G_e \cup G_{e'}$ と $(G \cup G_{e'})/(v = v_1)$ をそれぞれ Tait グラフにもつ絡み目のダイアグラムは e と e' のラベルから高々6 回の多項式の四則演算で計算できる．T^* から e を取り除き e' のラベルをここで計算した多項式に更新する．

最後の辺を消去したとき元のダイアグラムの Kauffman ブラケット多項式が計算できる．□

参考文献

[1] J. Hass, J.C. Lagarias and N. Pippenger. The computational complexity of knot and links problems. *Journal of the ACM*, Vol. 46, No. 2 (1999), 185-211.

[2] F. Jaeger, D. L. Vertigan, and D. J. A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 108:35–53, 1990.

[3] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12:103–111, 1985.

[4] L. H. Kauffman. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 26:395–407, 1987.

[5] J. A. Makowsky. Colored Tutte polynomials and Kauffman brackets for graphs of bounded tree width. Preprint.

[6] J. Mighton. *Knot Theory on Bipartite Graphs*. PhD thesis, Dept. of Math., University of Toronto, Canada, 1999.

[7] D. J. A. Welsh. *Complexity: Knots, Colorings and Counting*, Cambridge Univ. Press, 1993.