A-015

有向グラフに対する許容条件付き位相的整列問題の計算量

Complexity of the Topological Sort Problem for Directed Graphs with Tolerance Conditions

神保 秀司† 山本 博章‡
Shuji JIMBO Hiroaki YAMAMOTO

1 はじめに

本論文では，有向グラフ $G=(V,E)$ で各辺に重みが，各点に点許容値が付いているものに対して，与えられた条件を満たす G の点の順列を求める問題を扱う．G の点の順列が満たすべき条件として各点 v について，v に接続する有向辺 e の重みと v における点許容値からなる不等式をいくつかの自然な形で統一的に与え，それらを G に対する許容条件と呼ぶ．例えば，n 点からなる辺重み $w(e)$ 及び点許容値 $t(v)$ が付けられた単純有向グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき，V の要素の順列 $\rho=v(1)v(2)\cdots v(n)$ が各点 $v(i)$ について不等式

$$\sum_{j<i,v(i)v(j)\in E} w(v(i)v(j)) \le t(v(i)) \qquad (1)$$

を満たすという許容条件を $P^-_{\mathrm{out}}(G,w,t,\rho)$ で表す．G の各点 v の点許容値が $t(v)=0$ であり，各有向辺 e の重みが $w(e)=1$ であるとき，許容条件 $P^-_{\mathrm{out}}(G,w,t,\rho)$ を満たす G の点の順列 ρ を求める問題は，G が有向非サイクル的グラフ (Directed Acyclic Graph, DAG) であるか否かを判定し，DAG であるとき G の点集合上の位相的順序を与える問題，すなわち従来から位相的整列問題と呼ばれている問題である．このことから，$P^-_{\mathrm{out}}(G,w,t,\rho)$ を満たす G の点の順列 ρ を求める形の問題を許容条件付き位相的整列問題と呼ぶことにする．本論文では，問題の入力になる有向グラフ G は単純有向グラフのみであると仮定する．本論文では，辺重みおよび点許容値付き単純有向グラフに対する式 (1) のような条件をいくつか提案し，それらを満たす点の順列を求める形の許容条件付き位相的整列問題がある場合に線形時間で解け，かつ，ある場合には NP 完全であることを示す．

有向グラフ $G=(V,E)$ が有向閉路をもたないとき，すなわち DAG であるとき，かつそのときに限り，G の点集合 V に位相的順序と呼ばれる線形順序 $\prec$ を導入できることが知られている．V 上の線形順序 $v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_n$ が，任意の有向辺 $v_iv_j \in E$ について，

$$i<j$$

が成り立つという条件を満たすとき，$\prec$ は G についての位相的順序であるという．与えられた有向グラフ G が DAG であるか否かを判定し，DAG であるとき G についての位相的順序を求める線形時間アルゴリズムが知られている [2]．有向グラフ $G=(V,E)$ の各点が完了しなくてはならない仕事を表し，点 v から w への有向辺 vw が仕事 w に先行して仕事 v を完了しなくてはならないという制約条件を表していると見做せば，G についての位相的順序は，すべての仕事が完了するように逐次的に仕事を処理できる順序を表している．一般に，多くの現実的に重要な問題が辺や点に重みをもつ DAG で定式化できれば，位相的順序に従って動的計画法を適用してその問題が解けることが多い [1]．

2 許容条件付き位相的整列問題

グラフ $G=(V,E)$ は，n 点からなる辺重み $w(e)$ 付き単純有向グラフであり，さらに，G の各点には点許容値 $t(v)$ が付けられているとする．ただし，辺重み及び点許容値はすべて非負である，すなわち $w(e)\ge 0$ かつ $t(v)\ge 0$ が成り立つとする．辺重み及び点許容値付きグラフ G とその点の順列 $\rho=v(1)v(2)\cdots v(n)$ についての許容条件として，式 (1) で定義した $P^-_{\mathrm{out}}(G,w,t,\rho)$ に加えて

$$P^+_{\mathrm{out}}(G,w,t,\rho) \Leftrightarrow \forall i, \sum_{j>i,v(i)v(j)\in E} w(v(i)v(j)) \le t(v(i)),$$

$$P^-_{\mathrm{in}}(G,w,t,\rho) \Leftrightarrow \forall i, \sum_{j<i,v(j)v(i)\in E} w(v(j)v(i)) \le t(v(i)),$$

$$P^+_{\mathrm{in}}(G,w,t,\rho) \Leftrightarrow \forall i, \sum_{j>i,v(j)v(i)\in E} w(v(j)v(i)) \le t(v(i))$$

の 3 つを定義する．このとき次の定理が成り立つ．

† 岡山大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University
‡ 信州大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Shinshu University

定理 1 有向グラフ G の点の個数を n で，辺の本数を m で表す．条件を表す記号 F が P^-_{out}，P^+_{out}，P^-_{in}，P^+_{in} のどれを表していても，辺重み $w(e)$ 及び点許容値 $t(v)$ が付けられた単純有向グラフ $G = (V, E)$ を入力し，$F(G, w, t, \rho)$ を満たす G の点の順列 ρ を求める問題例を $O(m + n)$ 時間で解くことができる．

証明． 最初に F が P^-_{out} を表している場合を証明する．不等式 $\sum_{w \neq v_n} w(v_n w) \leq t(v_n)$ を満たす G の点 v_n を求める．もし，そのような点 v_n が存在しなければ $P^-_{\mathrm{out}}(G, w, t, \rho)$ を満たす G の点の順列 ρ が存在しないことは明らかである．次に，$P^-_{\mathrm{out}}(G - v_n, w, t, \rho')$ を満たす $G - v_n$ の点の順列 ρ' を再帰的に求める．そのような $G - v_n$ の点の順列 $\rho' = v_1 v_2 \cdots v_{n-1}$ が存在すれば，G の点の順列 $\rho = v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$ が $P^-_{\mathrm{out}}(G, w, t, \rho)$ を満たすことは明らかである．ただし，$G - v$ で有向グラフ G から点 v を除去して得られる有向グラフを表す．一方，一般に $P^-_{\mathrm{out}}(G, w, t, \sigma)$ を満たす G の点の順列 $\sigma = w_1 w_2 \cdots w_n$ が存在すれば，$G - w_n$ の点の順列 $\sigma' = w_1 w_2 \cdots w_{n-1}$ は，$P^-_{\mathrm{out}}(G - w_n, w, t, \sigma')$ を満たす．従って，上の再帰的アルゴリズムで $P^-_{\mathrm{out}}(G - v_n, w, t, \rho')$ を満たす $G - v_n$ の点の順列 ρ' が存在しなければ，$P^-_{\mathrm{out}}(G, w, t, \rho)$ を満たす G の点の順列 ρ も存在しない．この再帰的アルゴリズムの実行時間が $O(m+n)$ であることを示すのは，容易である．

F が P^-_{out} 以外の条件を表している場合の証明も同様である．詳細は，省略する． □

定理 1 を拡張して次の定理 2 が得られる．証明は省略する．

定理 2 有向グラフ G の点の個数を n で，辺の本数を m で表す．複数の重み $w_1(e), w_2(e), \ldots, w_k(e)$ と点許容値 $t_1(v), t_2(v), \ldots, t_k(v)$ が与えられているとする．l は，$0 \leq l \leq k$ を満たす整数とする．

このとき，すべての $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ について条件 $P^-_{\mathrm{out}}(G, w_i, t_i, \rho)$ を満たし，かつ，すべての $i \in \{l + 1, l + 2, \ldots, k\}$ について条件 $P^-_{\mathrm{in}}(G, w_i, t_i, \rho)$ を満たす G の点の順列 ρ を求める問題を $O(k(m + n))$ 時間で解くことができる．

さらに，すべての $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ について条件 $P^+_{\mathrm{out}}(G, w_i, t_i, \rho)$ を満たし，かつ，すべての $i \in \{l + 1, l + 2, \ldots, k\}$ について条件 $P^+_{\mathrm{in}}(G, w_i, t_i, \rho)$ を満たす G の点の順列 ρ を求める問題も $O(k(m + n))$ 時間で解くことができる．

次の定理は，位相的整列問題を自然な形で辺重み及び点許容値付き単純有向グラフに拡張した問題で NP 完全であるものが存在することを主張している．

定理 3 有向グラフ G の点の個数を n で，辺の本数を m で表す．辺重み $w(e)$ 及び点許容値 $t(v)$ が付けられた単純有向グラフ $G = (V, E)$ を入力し，$P^-_{\mathrm{out}}(G, w, t, \rho)$ 及び $P^+_{\mathrm{in}}(G, w, t, \rho)$ を同時に満たす G の点の順列 ρ を求める問題は，NP 完全である．

証明． 与えられた正整数列 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を合計が等しくなるように 2 分割する問題 PARTITION の問題例を定理の問題例に多項式時間で帰着することができる．PARTITION の目的は，$\sum_{i=1}^{k} a_{j(i)} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)/2 = h(a)$ を満たす a の部分列 $(a_{j(1)}, a_{j(2)}, \ldots, a_{j(k)})$ を求めることである．この PARTITION の問題例に解が存在すれば，その解は，$G = (\{1, 2, \ldots, n+1\}, E)$，$E = \{(n+1, 1), (n+1, 2), \ldots, (n+1, n), (1, n+1), (2, n+1), \ldots, (n, n+1)\}$，各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について $w(n+1, i) = w(i, n+1) = a_i$, $t(n+1) = h(a)$，$t(1) = t(2) = \cdots = t(n) = 0$ により得られる定理の問題例の解 ρ から次のように導かれる．$S = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \rho(i) < \rho(n+1)\}$ とおいたとき，$\sum_{i \in S} a_i = h(a)$ が成り立つ．証明の詳細は，省略する． □

3 おわりに

定理 3 の証明に使われた NP 完全問題 PARTITION は，NP 完全問題でありながら，実用上解決が容易であることが知られている．実際，PARTITION を解く擬多項式時間アルゴリズムが存在し，対応する最適化問題を解く完全多項式時間近似方式 (FPTAS) が存在する [3]．現在，定理 3 にあるような複数の許容条件が指定された許容条件付き位相的整列問題の解き易さについての理論的考察と計算機実験を計画している．発表時にある程度の結果が示せることを期待している．

参考文献

[1] J. L. Gross and J. Yellen. *Handbook of Graph Theory, Second Edition.* Discrete Mathematics and Its Applications. Chapman and Hall/CRC, 2014.

[2] A. B. Kahn. Topological sorting of large networks. *Communications of the ACM*, Vol. 5, No. 11, pp. 558–562, 1962.

[3] D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms.* Cambridge University Press, 2011.