A-014

P 行列線形相補性問題における局所一様向き付けについて
Linear Complementarity Problems on P-matrices and Local Uniformity

福田俊*， Bernd Gärtner†， Lorenz Klaus‡， 宮田洋行§， 森山園子¶，

平成 26 年 6 月 30 日

1 はじめに

線形相補性問題 (linear complementarity problem、以下 LCP) とは、行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とベクトル $q \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき $w = Mz + q, w^{\mathrm{T}}z = 0, w, z \geq 0$ を満たすベクトル $w, z \in \mathbb{R}^n$ を見つける問題である (特に LCP(M, q) と書く)。LCP は線形計画問題、２次計画問題、双行列ゲームといった問題の統一的枠組みを与える重要な問題として様々な方面から研究されてきた。一般に LCP には解が存在するとは限らず、さらに解の存在判定性問題が NP 完全であることが知られている [2]。しかし、M を P 行列に限定した場合、常に一意的な解が存在する [6] など多くのよい性質を持つことが知られ、さらに P 行列 LCP が NP 困難ならば、NP=co-NP を導く [8] ことから、NP 困難ではないと考えられている。P 行列は以下のように定義される。

定義 1. P 行列とは全ての主小行列式が正となる実数正方行列である。

一方、P 行列 LCP の多項式時間アルゴリズムも見つかっておらず、計算複雑度に関する研究が続いている。Stickney と Watson は Bard 型アルゴリズムと呼ばれるピボットアルゴリズムが超立方体のある向き付け (PLCP 向き付け) のシンクを探す問題として、解釈できることを示した [3] が、Foniok らは、特に P 行列の部分クラスである K 行列では、その向き付けが局所一様性という良い性質を満たすため、線形回のピボット操作で解を見つけることができることを示した [1]。

本研究では、Bard 型アルゴリズムが線形回で終了する十分条件である局所一様向き付けを誘導する LCP の特徴づけに向けた第一歩として、次を調べる。まず 4 次元で K 行列 LCP が誘導する向き付けと P 行列 LCP 向き付けのうち局所一様性を満たすものを列挙し、両者の間の差を調べる。また、局所一様向き付けを誘導するような K 行列 LCP(および K*行列 LCP) でない LCP の無限族を構成し、さらに広いクラスの LCP が局所一様向き付けを与えることを見る。最後にそれを元に、いくつか将来的な課題を挙げる。

*東北大学大学院情報科学研究科
†スイス連邦工科大学チューリッヒ校理論計算機科学科
‡国立情報学研究所、河原林 ERATO 巨大グラフプロジェクト
§東北大学大学院情報科学研究科
¶日本大学文理学部情報科学科

2 LCP と超立方体グラフの向き付け

まず、Bard 型アルゴリズムと呼ばれる LCP に対するピボットアルゴリズムと可能なピボット操作を表現する n 次元超立方体の向き付けについて紹介し、M が K 行列の場合の向き付けの特徴について述べる。以下、$[n] := \{1, \ldots, n\}$ とする。

2.1 Bard 型アルゴリズム

Stickney と Watson は、線形相補性問題を解くピボットアルゴリズムとしてよく知られる Bard 型アルゴリズムを適切に向きづけられた n 次元超立方体グラフのシンクを探すアルゴリズムとして定式化した [3]。

LCP(M, q) を考えたとき、各 $i \in [n]$ に対する w と z を相補対と呼ぶ。条件 $w^{\mathrm{T}}z = 0$ と $w, z > 0$ から、任意の $i \in [n]$ に対して「$w_i = 0$ または $z_i = 0$」が得られる。各 $i \in [n]$ に対して w_i と z_i のどちらかを 0 に定め、0 でない方の変数を x_i と書くことにする。このとき、条件 $w = Mz + q$ は $q = \sum a_i x_i$ と書ける。ただし、$a_i \in \mathbb{R}^n$ は次のように定められるベクトルである。まず、$x_i = w_i$ のとき、a_i は e_i、すなわち、第 i 単位ベクトルであり、次に $x_i = z_i$ のとき a_i は $-m_i$、すなわち、$-M$ の第 i 列ベクトルである。これは $x_1, \ldots, x_n$ を変数とする線形方程式系であり、この方程式系の非負解が LCP(M, q) の解になる。

Bard 型アルゴリズムでは、まず基底 $B \subseteq [n]$ を適当に選ぶ。そのとき、$n \times n$ の行列 $A_B = (a_1^{(B)}, \ldots, a_n^{(B)})$ を

$$a_i^{(B)} = \begin{cases} -m_i & i \in B \text{ のとき} \\ e_i & i \notin B \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。M が P 行列のとき、任意の基底 B に対して A_B は正則となる。ベクトル $A_B^{-1}q$ の成分が全て非負ならば、

$$w_i = \begin{cases} 0 & i \in B \\ (A_B^{-1}q)_i & i \notin B \end{cases}, z_i = \begin{cases} (A_B^{-1}q)_i & i \in B \\ 0 & i \notin B \end{cases}$$

は LCP の解となるのでアルゴリズムは終了する。ベクトル $A_B^{-1}q$ に負の成分があった場合は、そのうちの一つ i を選び、基底 B に i を含めるか否かを逆にする。これを $A_B^{-1}q$ の全成分が非負になるまでくり返す。

Bard 型アルゴリズムにおいて、$A_B^{-1}q$ の負成分のどれを新たに基底に加えるかは任意性があることが分かる。これを決める規則をピボット規則と言う。

2.2 唯一シンク向き付け

ここで以上のピボット操作を超立方体の向き付けとして記述できることを述べる。$I \subseteq [n]$ としたとき、n 次元 0-1 ベクトル $v \oplus I$ の要素は以下のように定義される。

$$(v \oplus I)_j = \begin{cases} 1 - v_j & j \in I \\ v_j & j \notin I \end{cases} \tag{1}$$

また、n 次元超立方体グラフは以下で定義されるグラフ $G = (V, E)$ である。

$$V := \{0,1\}^n, E := \{\{v, v \oplus e_i\} : v \in V, i \in [n]\} \tag{2}$$

$v \in \{0,1\}^n$ と $C \subseteq [n]$ について、$V_{v,C} = \{v \oplus I : I \subseteq C\}$ と定める。ある $v \in \{0,1\}^n$, $C \subseteq [n]$ について、$V_{v,C}$ で誘導される G の部分グラフを G の部分超立方体グラフと呼ぶ。

定義 2. ([4]) ϕ を n 次元超立方体グラフの向き付けとする。ϕ が任意の空でない部分超立方体において唯一のシンクを持つならば、ϕ を唯一シンク向き付け (unique-sink orientation、以下 USO) と呼ぶ。

さて、PLCP(M, q) から誘導される超立方体グラフの向き付けを以下のように定める。

$$v \to v \oplus e_i \text{なる有向辺が存在する} \Leftrightarrow (A_{B(v)}^{-1}q)_i < 0 \tag{3}$$

ここで、$B(v) := \{j \in [n] : v_j = 1\}$ とする。このようにして定められて向き付けを PLCP 向き付けと言う。PLCP 向き付けは常に USO となることが知られており、PLCP を解くことと、PLCP から誘導されるような USO のシンクを探すことが等価であることがわかっている [3]。PLCP から誘導されるような USO は唯一シンク性の他に次のような性質を満たすことが分かっている。

Holt-Klee 性 ([5])：凸多面体 P の向き付けに対して、それを任意の P の k 次元面 F 上に制限した向き付けには (唯一の) ソースから (唯一の) シンクへ向けて k 個の F 上の頂点素な有向道が存在する。

一方で PLCP 向き付けの組合せ的特徴づけは知られていない。

2.3 主ピボット変換と K*行列

次に主ピボット変換 (Principal Pivot Transform、以下 PPT) と呼ばれる行列変換と K*行列という行列クラスについて述べる。

定義 3. ([10]) 主ピボット変換 (PPT) とは行列 M と基底 $B \subseteq [n]$ によって定まる以下のような行列変換である。

$$M_B := -(A_B)^{-1}A_{\bar{B}}$$

ここで、$\bar{B} = [n] \backslash B$ である。LCP(M, q) が誘導する向き付けと LCP$(M_B, A_B^{-1}q)$ が誘導する向き付けは同型である。PPT は B の取り方によって 2^n 個の組合せが考えられ、P 行列は PPT に対して閉じている、すなわち P 行列に対して PPT を行うと変換後の行列も P 行列となることが知られている。

次に P 行列の部分クラスである K 行列について述べる。

定義 4. ([10]) K 行列とは P 行列かつ、非対角成分の要素が 0 以下であるような行列である。

K 行列という行列クラスは PPT に対して閉じておらず、PPT を行った後の行列が K 行列になるとは限らない。そこで、PPT によって K 行列に遷移しうる行列クラスとして、K*行列を定義する。

定義 5. ([9]) K*行列とは、ある基底 $B \subseteq [n]$ に対して、M_B が K 行列となるような行列クラスである。

2.4 KLCP 向き付けと局所一様性

K 行列に限定した LCP について考えることにする。K 行列から誘導されるような向き付けを KLCP 向き付けと呼ぶ。KLCP 向き付けは局所一様性という顕著な性質を持つことが知られている [1]。局所一様性を定義するために、まず一様な向き付けという性質について述べる。

定義 6. ([1]) n 次元超立方体グラフの任意の頂点 $v \in \{0,1\}^n$ について、$v_i = 0$ の場合に限り、$v \to v \oplus e_i$ が成り立つような USO を一様な向き付けと呼ぶ。

定義 7. ([1]) n 次元超立方体グラフの USO が、$u_J = 0$ かつ任意の $j \in J$ に対し $u \to u \oplus e_j$ なる向き付けとなる任意の $J \subseteq [n]$, $u \in \{0,1\}^J$ に対し、$\{u \oplus I : I \in \{0,1\}^J\}$ が誘導する部分超立方体に制限した USO が一様であるとき、ϕ を局所上方向一様と言う。

定義 8. ([1]) 局所上方向一様な向き付けで、かつ、全ての向き付けを反転した場合に反転後の向き付けも局所上方向一様となるような向き付けを局所一様な向き付けと呼ぶ。

任意の KLCP が誘導する USO は局所一様な向き付けを持つことが知られている。また、局所一様性を持つような USO は任意のピボット規則の Bard 型アルゴリズムに関して線形回のピボット操作でシンクに到達することが証明されており、KLCP は多項式時間可解であることが知られている [1]。

3 結果

3.1 局所一様な PLCP 向き付けと KLCP 向き付けの比較

PLCP 向き付けの列挙としては、3 次元の場合 [3]、4 次元の場合 [7] が今までになされている。本研究では、3 次元と 4 次元それぞれの場合について、PLCP 向き付けの中で局所一様性を満たしているような向き付けを計算した結果、それぞれ 8 個と 141 個の向き付けが見つかった。また、KLCP 向き付けを列挙した結果、3 次元と 4 次元の場合において、それぞれ 8 個、141 個の向き付けが得られ、局所一様向き付けを満たす PLCP 向き付けの集合と完全に一致した。

	3 次元	4 次元
PLCP 向き付け	17 ([3])	6910 ([7])
局所一様性を持つ PLCP 向き付け	8	141
KLCP 向き付け	8	141

表 1: 3 次元・4 次元超立方体の PLCP 向き付けの数 (同型を除く)

3.2 局所一様な向き付けを誘導しうる行列クラスについて

それでは、M が K 行列でなくても局所一様性を満たすような LCP 向き付けが得られる場合はあるだろうか。

命題 1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について、LCP(M, q) が局所一様な向き付けを誘導するような K 行列でない P 行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とベクトル $q \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

証明： まず、LCP(E_n, q) を考える。ここで、E_n は $n \times n$ 単位行列であり、q は適当な n 次元ベクトルである。すると、E_n は K 行列であるので、LCP(E_n, q) が誘導する向き付けは局所一様性を満たす。

さて、E_n の 1 行 n 列の要素に十分小さな $\epsilon > 0$ を加えたような行列 $E_{n,\epsilon}$ を考える。$E_{n,\epsilon}$ は K 行列でないことに注意する。一方、ϵ は十分小さいため、LCP$(E_{n,\epsilon}, q)$ が誘導する超立方体の向き付けは LCP(E_n, q) で誘導される向き付けと等しい。したがって、$E_{n,\epsilon}$ は局所一様性を満たす行列となる。(証明終)

次に K 行列を K*に置き換えても同様のことが成り立つことを示す。

定理 9. $n > 3$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$ について、LCP(M, q) が局所一様な向き付けを誘導するような K*行列でない P 行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とベクトル $q \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

証明： $U = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \le i < j \le n\}$ とおく。以下に示すような $n \times n$ の上三角行列の族 $(M_\chi)_{\chi \in \{+1,-1\}^U}$ の中で、どの基底 B に対する PPT を行ったとしても K 行列になりえないような M_χ が存在することを示す。

写像 $\chi : U \to \{+1, -1\}$ ごとに、以下のように $n \times n$ 行列 $M^{(\chi)} = (m_{i,j}^{(\chi)})$ を定める。

$$m_{i,j}^{(\chi)} = \begin{cases} \chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ 1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

ただし、$\epsilon > 0$ は十分小さい実数とする。また、$q \in \mathbb{R}^n$ を

$$q = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

とする。

ここで、行列 $M^{(\chi)}$ と基底 B に対し、$A_B^{(\chi)} = (a_{i,j}^{(B,\chi)})$ が以下のように定まる。

$j \in B$ のとき、　$j \notin B$ のとき、

$$a_{i,j}^{(B,\chi)} = \begin{cases} -\chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ -1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}, \quad a_{i,j}^{(B,\chi)} = \begin{cases} 0 & (i < j) \\ 1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

次に $A_B^{(\chi)}$ に対する逆行列 $(A_B^{(\chi)})^{-1} = (\tilde{a}_{i,j}^{(B,\chi)})$ を計算すると、

$$\tilde{a}_{i,j}^{(B,\chi)} = \frac{1}{\det(A_B^{(\chi)})}(-1)^{i+j}\det(A_{Bj,i}^{(\chi)})$$

ただし、$A^{(\chi)}_{Bj,i}$ は $A^{(\chi)}_{B}$ から j 行と i 列を取り除いたような余因子行列とする。このとき $A^{(\chi)}_{B}$ は三角行列であるため、逆行列 $(A^{(\chi)}_{B})^{-1}$ も三角行列となる。次に $A^{(\chi)}_{\bar{B}} = (\bar{a}^{(B,\chi)}_{i,j})$ を計算する。

$j \in B$ のとき、　　　　　$j \notin B$ のとき、

$$\bar{a}^{(B,\chi)}_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i < j) \\ 1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}, \bar{a}^{(B,\chi)}_{i,j} = \begin{cases} -\chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ -1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

を得る。PPT は $M^{(\chi)}_{B} = -(A^{(\chi)}_{B})^{-1} A^{(\chi)}_{\bar{B}}$ によって定義される行列変換なので、$M^{(\chi)}_{B} = (m^{(B,\chi)}_{i,j})$ は、

$$m^{(B,\chi)}_{i,j} = -\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}^{(B,\chi)}_{ik} \bar{a}^{(B,\chi)}_{kj}$$

と計算され、ここで ϵ が非常に小さいため、ϵ^2 以上の項を無視して計算を進めると以下を得る。

$j \in B$ かつ $i \in B$ のとき、

$$m^{(B,\chi)}_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{2^{j-i-1}+i+j}\chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ 1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

$j \in B$ かつ $i \notin B$ のとき、

$$m^{(B,\chi)}_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{2^{j-i-1}+i+j-1}\chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

$j \notin B$ かつ $i \in B$ のとき、

$$m^{(B,\chi)}_{i,j} = \begin{cases} -\chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

$j \notin B$ かつ $i \notin B$ のとき、

$$m^{(B,\chi)}_{i,j} = \begin{cases} \chi(i,j)\epsilon & (i < j) \\ 1 & (i = j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

このように $M^{(\chi)}_{B}$ は、対角成分が 1、非対角成分が $+\epsilon$ か $-\epsilon$ となるような上三角行列になる。これらより、$M^{(\chi)}_{B}$ が K 行列となっているためには、全ての $i < j$ において $m^{(B,\chi)}_{i,j}$ が $-\epsilon$ になっている必要があることがわかる。基底 B を固定するごとに $M^{(\chi)}_{B}$ が K 行列になるための写像 χ は一意的に決まるので、$M^{(\chi)}$ が K*行列になる χ は 2^n 通りであることが分かる。一方、写像 $\chi : U \to \{+1, -1\}$ の定め方は、$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 通りあるので、$n > 3$ のとき、$M^{(\chi)}$ が K*行列にならない写像 χ が存在することがわかる。

$\epsilon > 0$ は十分小さく取っているので、そのような $M^{(\chi)}$ が誘導する LCP 向き付けは局所一様性を満たす。(証明終)

4　まとめ

本論文では、LCP の Bard 型アルゴリズムが線形回のステップで終了するための十分条件である局所一様性を持つ PLCP 向き付けを列挙し、それらが KLCP 向き付けの数と等しいことを 3 次元と 4 次元において示した。それが一般に成り立つかどうかは今後の課題である。また、K*行列でなくても局所一様な向き付けを誘導するような LCP の無限族を構成した。今後の課題としては、局所一様向き付けを誘導する LCP の特徴づけを行うことが挙げられる。それと関連して、ある局所一様向き付けを与えるような $(M, -q)$ 全体の空間 (それを空間を向き付けの実現空間と呼ぶことにする) 構造を調べることも今後の課題である。例えば、局所一様向き付けの実現空間は連結であるか調べることは興味深いと考えられる。

参考文献

[1] J. Foniok, K. Fukuda, B. Gärtner, and H. -J. Luthi. Pivoting in linear complementarity: Two polynomial-time cases. Discrete Comput. Geom, 42(2):187-205,2009.

[2] S.-J. Chung. NP-completeness of the linear complementarity problem. J. Optim. Theory Appl., 60(3):393-399,1989

[3] A. Stickney and L. Watson. Digraph models of Bard-type algorithms for the linear complementarity problem. Math. Oper. Res., 3(4):322-323, 1978.

[4] T. Szabó and E. Welzl. Unique sink orientations of cubes. In Proceedings of the 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science(FOCS'01). 547-555,2001.

[5] F. B. Holt and V. Klee. A proof of the strict monotone 4-step conjecture. Advances in Discrete and Computational Geometry, volume 223 of Contemporary Mathematics,201-216,1998.

[6] C. H. Papadimitriou. On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. J. Comput. System Sci., 48(3):498-532, 1994.

[7] K. Fukuda, L. Klaus and H. Miyata, Enumeration of PLCP-orientations of the 4-cube, `http://arxiv.org/abs/1309.7225`, 2013.

[8] N. Megiddo, A note on the complexity of P-matrix LCP and computing equilibrium, RJ 6439, IBM Research, Almaden Research Center, 650 Harry Road, San Jose, California, 1988.

[9] J. Foniok, K. Fukuda and L. Klaus, Combinatorial characterizations of K-matrices, Linear Algebra Appl., 434:68–80, 2011.

[10] R.W. Cottle, J.-S. Pang and R.E. Stone, The linear complementarity problem, Academic Press, 1992.