A-004

完全グラフのオイラー回帰長についての予想の進展

Progress on the Conjecture on the Eulerian Recurrent Lengths of Complete Graphs

神保 秀司†
Shuji JIMBO

1　はじめに

オイラーグラフ G のオイラー回路のうち最短閉路長が最大のものの最短閉路長を G のオイラー回帰長と呼び，奇数 n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長 $e(n)$ について考察する．既に $n-2$ が $e(n)$ の上界であること，および，計算機を使った検証実験により，21 以下の奇数 n に対して $e(n) = n-3$ であることが判明している．これらより，任意の奇数 $n \geqq 7$ に対して $e(n) < n-2$ が成り立つことが予想される．さらに，著者は，その予想の証明を補助する目的で 2012 年にある予想を提案した [1]．しかしながら，その予想は，直接の目標である $e(n) < n-2$ の証明に応用し難いと考えられる．本論文では，オイラー回路上の各辺についての正負の向きとオイラー回路における反転配置の 2 つの概念の導入による証明の方針について述べる．

2　オイラー回路上の辺の正負の向き

初めに 2 つの定義を述べる．

定義 1 無向グラフの小道 (trail) T の上で，同一点 v の 2 つの異なる出現位置 i, j, $i<j$, の間に点 v が出現しないときそれらの出現位置の組 (i, j) を T における**回帰対**と呼び，$j-i$ をその回帰対の長さと呼ぶ．T が回路の場合も同様に定義する．　□

奇数 n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路の回帰対の総数は，K_n の辺の本数 $|E(K_n)| = n(n-1)/2$ に等しい．

定義 2 無向グラフの小道 $T = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m$ 上の出現位置 i が点 v_i の最初の出現位置でも最後の出現位置でもないとき，T 上の出現位置 $p(i)$ と $q(i)$ を，それぞれ，$(p(i), i)$ と $(i, q(i))$ が T における回帰対になる位置と定義する．

T 上の出現位置 i について $p(i), q(i), p(i+1), q(i+1)$ がすべて定義されているとき，$p(i) < p(i+1)$ かつ $q(i) < q(i+1)$，または，$p(i) > p(i+1)$ かつ $q(i) > q(i+1)$ が成り立っていれば K_n の辺 $e = (v_i, v_{i+1})$ は T について**正の向き**であるといい，そうでなければ**負の向き**であるという．T が回路の場合も同様に定義する．　□

比較的簡単な計算機実験に基づいて，以下に述べる定理 2 が得られた．定理 2 の証明に使われる次の補題は，著者らによる文献 [2] の定理 7 から直ちに得られる．

補題 1 n は，$n \geqq 13$ を満たす奇数とする．完全グラフ K_n のオイラー回路 C の最短閉路長が $n-2$ であれば，C における回帰対の長さは，$n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$ のいずれかである．

定理 2 n は $n \geqq 13$ を満たす奇数とする．n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路 C について K_n の正の向きの辺すべてからなる集合を E^+ で，負の向きの辺すべてからなる集合を E^- で表す．このとき，C の最短閉路長が $n-2$ であれば，次式が成り立つ．

$$|E^-| \geqq \frac{1}{5}|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{10} \tag{1}$$

証明. $n \geqq 13$ および C の最短閉路長が $n-2$ であることより，C 上連続して並ぶ 11 個の点 $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{11}$ は，互いに異なる 11 個の点である．C 上連続して並んだこれらの点を結ぶ 10 本の辺を $e_i = v_i v_{i+1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$，で表す．各 $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ について，$(p(i), i)$ と $(i, q(i))$ がどちらも点 v_i の回帰対になるように出現位置 $p(i)$ と $q(i)$ を定め，$p'(i) = i - p(i) - n$, $q'(i) = q(i) - i - n$ とおく．補題 1 より，

条件 1 各 $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ について，$-2 \leqq p'(i) \leqq 3$ および $-2 \leqq q'(i) \leqq 3$ が成り立つ．

さらに，各 $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ について $(p(i), i)$ と $(i, q(i))$ がどちらも回帰対であることから，

条件 2 各 $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ について $|p'(i+1) - p'(i) + 1| > 1$ および $|q'(i+1) - q'(i) + 1| > 1$ が成り立ち，さらに，各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ について，$i < j$ ならば

† 岡山大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

$|p'(i+1)-p'(i)+1|+|q'(i+1)-q'(i)+1|>2$ が成り立つ．

各辺 $e_i=v_iv_{i+1}$，$i\in\{1,2,\ldots,10\}$，について，

条件 3 $p'(i)<p'(i+1)+i$ かつ $q'(i)>q'(i+1)+i$，あるいは，$p'(i)>p'(i+1)+i$ かつ $q'(i)<q'(i+1)+i$

は，e_i が負の向きであるための必要十分条件である．

計算機を使って条件 1 と 2 を満たす関数 p',q' : $\{1,2,\ldots,11\}\to\{-2,-1,0,1,2,3\}$ すべてについて条件 3 を満たす $i\in\{1,2,\ldots,10\}$ の個数 $N(p',q')$ を数え，$N(p',q')$ の最小値が 2 であるという結果が得られている．もし，式 (1) を満たさない K_n のオイラー回路で最短閉路長が $n-2$ であるもの C が存在すれば，C に負の向きの辺の個数が高々 1 である 10 本の辺からなる 11 個の点の並び

$$C=\cdots\to v_1\to v_2\to\cdots\to v_{11}\to\cdots$$

が存在し，この並びから条件 1 と 2 を満たす p', q' をつくれば $N(p',q')\leqq 1$ が成り立ち，計算機実験の結果と矛盾するので，そのような C は存在しない． □

従来のプログラムを修正して最短閉路長が $n-2$ 以上である K_n の小道を延長する実験を比較的小さい n の値について実施したところ，負の向きの辺が全体に占める割合は平均して 60% 以上であり，その割合の最小値は 25% であるという結果が得られた．より巧妙な計算機実験により，定理 2 の中の定数 1/5 を 1/4 に置き換えることができること期待している．

3 負の向き辺の本数の上界

オイラー回路上負の向きの辺を境に生じた 2 点 v, w 間の順序の逆転は，その後のオイラー回路上次の形の入れ子の点の配置の出現により解消されなければならない．このような点の配置を点 v と w についての**反転配置**と呼ぶことにする．

$$\cdots\to v\to\cdots\to w\to x_1\to\cdots\to x_m\to w \\ \to\cdots\to v\to\cdots$$

ただし，$x_1,x_2,\ldots,x_m$ は v でも w でもない点である．このとき，次の定理が成り立つ．証明は，省略する．

定理 3 n 個以上の点からなる無向グラフの小道で最短閉路長が $n-2$ 以上であるものにおいて，点 v と w についての反転配置は次のようになっている．

$$\begin{aligned}&\cdots\to v\to x\to w\to x_1\to\cdots\to x_{n-2}\to w\\&\quad\to y\to v\to\cdots,\\&v\neq w,\quad |\{v,w,x_1\to\cdots\to x_{n-2}\}|=n.\end{aligned}\tag{2}$$

すなわち，左右両方の v と w の間にはどちらも点が丁度 1 個存在し，内側の 2 つの w の間には，互いに異なる $n-2$ 個の点が並んでいる．

最短閉路長が $n-2$ である K_n のオイラー回路が存在すれば，定義より負の向きの辺の本数と反転配置の個数は等しくなければならない．定理 3 より，1 つの反転配置には，長さが $n+3$ の回帰対と長さが $n-1$ がそれぞれ 1 つずつ，長さが $n-2$ の回帰対が 2 つ，長さが $n+1$ 以上である回帰対が 2 つ，合計 6 個の回帰対が含まれる．順序の逆転の対象となっている 2 点についての長さ $n+3$ と $n-1$ の 2 つの回帰対が異なる反転配置の間で共有されることはないので，次の定理が得られる．

定理 4 奇数個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路で最短閉路長が $n-2$ であるもの C が存在すれば，C における反転配置の総数と C について負の向きの辺の総数は等しく，$|E(K_n)|/2=n(n-1)/4$ 未満である．

さらに 1 つの反転配置に対応する他の 4 つの回帰対についても他の反転配置に共有されることはないと予想する．

予想 1 奇数個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路で最短閉路長が $n-2$ であるもの C が存在すれば，C における反転配置の総数と C について負の向きの辺の総数は等しく，$|E(K_n)|/6=n(n-1)/12$ 以下である．

この予想が成り立てば，定理 2 と合わせて 13 以上の奇数 n について $e(n)<n-2$ が成り立つ，すなわち K_n には最短閉路長が $n-2$ であるオイラー回路が存在しないことが導かれる．

4 おわりに

定理 2 の係数 1/5 を 1/4 に変えたものと定理 4 の $|E(K_n)|/2$ を $|E(K_n)|/4$ に変えたもの示すことにより $e(n)<n-2$ の予想の証明が完結することを期待している．

参考文献

[1] 神保秀司．オイラー回帰長の上界についての予想の検証．電子情報通信学会総合大会講演論文集, Vol. 2012, No. D-1, p. 2, 2012.

[2] 神保秀司, 橋口攻三郎, 韓梅．完全グラフと完全二部グラフの回帰長について．電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピュテーション, Vol. 101, No. 707, pp. 49–56, 2002.