

G-008

指数時間ステップングを用いた 3 次元散乱体の FDTD 解析
 Finite Difference Time Domain Analysis of 3-D Scattering Medium Employing Exponential Time Stepping

鈴木 将弘[†] 阿部 陽介[†] 谷藤 忠敏[†]
 Masahiro Suzuki Yosuke Abe Tadatoshi Tanifuji

1. はじめに

波長 0.7-1μm における酸化及び還元ヘモグロビンの光吸収係数波長依存性の相異を利用した近赤外分光法は生体診断に広く応用されている^[1]。現在は連続光や強度変調光を用いた分光法が主流であるが、ピコ秒パルスを用いる時間領域拡散光トモグラフィ (Time Resolved Diffuse Optical Tomography: TRDOT) により、生体内の血流及び血中酸素濃度分布をより厳密に同定できる可能性が示されている^{[2]-[4]}。TRDOT を実現するためには生体中の光パルス伝搬解析が不可欠である。生体は光学的に不均一なため、生体中の光伝搬は有限要素法^[3]や FDTD 法^{[2],[5],[6]}等の数値解析が用いられている。本報告では、FDTD 解析の時間短縮のため Yee 格子サイズを拡大したとき問題となる解の振動抑圧法を提案する。

2. 理論

光拡散方程式は時刻 t 、位置 \mathbf{r} の放射発散度 $\phi(\mathbf{r}, t)$ と拡散放射流速 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ の連立微分方程式で、次式で表される^{[5][6]}。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \mu_{tr} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) \hat{\mathbf{s}} d\omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \mu_a \phi(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) d\omega \quad (2)$$

式中の μ_a 及び μ_{tr} は光吸収及び輸送減衰係数であり、 μ_r は散乱係数 μ_s 及び非等方散乱パラメータ g と μ_a を用いて $\mu_r = \mu_a + (1-g)\mu_s$ で与えられる。 $\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)$ は波源、 $\hat{\mathbf{s}}$ は方向を示す単位ベクトル、 c は光速である。生体の平均的な μ_r は約 2 mm^{-1} で μ_a ($\sim 0.02 \text{ mm}^{-1}$) に比べて大きい。このため、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ は時間的に急速に減衰するので、光拡散方程式の(1)式を通常の差分 (Linear Time Stepping :LTS) を用いると精度が悪い。このため、Maxwell 方程式の解法で用いられている指数時間ステップング (Exponential Time Stepping : ETS)^[7]を用いて光拡散方程式を FDTD 法により解析する。ETS は光拡散方程式を時間のみに関する微分方程式と見なす。次にこの微分方程式の一般解と特解を解析的に求め、これを放射発散度 $\phi(\mathbf{r}, t)$ と拡散放射流速 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ の漸化式に変換する。例えば時刻 $t=(n+1/2)\Delta t$ における $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ の x 成分 $J_x^{(n+1/2)\Delta t}$ の FDTD 解析における漸化式は LTS 及び ETS 共に Yee 格子座標 (i, j, k) を用いて次式で与えられる。

$$J_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) = C_1 J_x^{n-1/2}(i+1/2, j, k) - C_{1A} [\phi^n(i+1, j, k) - \phi^n(i, j, k)] / \Delta x \quad (3)$$

但し C_1 及び C_{1A} は LTS と ETS で異なり、それぞれ次式で与えられる。

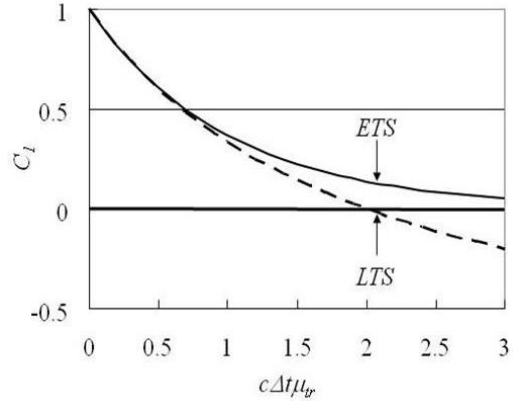
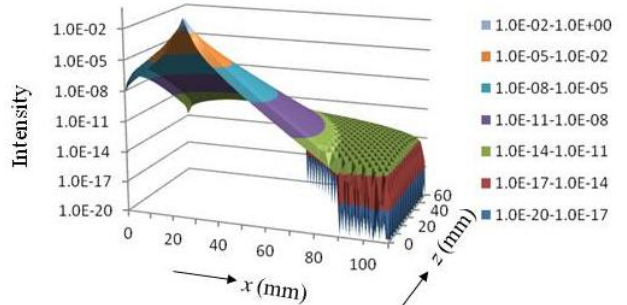
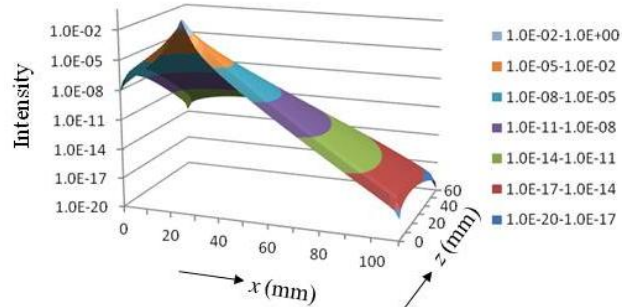


図 1 ETS と LTS の係数



(a) LTS



(b) ETS

図 2 3 次元散乱体の光強度分布 ($c\Delta t\mu_{tr} \sim 4$)

$$C_1 = \frac{2 - c\Delta t\mu_{tr}}{2 + c\Delta t\mu_{tr}} \text{ (LTS)}, \quad C_1 = e^{-c\Delta t\mu_{tr}} \text{ (ETS)}, \quad (4)$$

$$C_{1A} = \frac{2c\Delta t\mu_{tr}}{2 + c\Delta t\mu_{tr}} \text{ (LTS)}, \quad C_{1A} = (1 - e^{-c\Delta t\mu_{tr}}) / \mu_{tr} \text{ (ETS)} \quad (5)$$

図 1 は LTS と ETS を用いた場合の C_1 と $c\Delta t\mu_{tr}$ の関係を示す。図から $c\Delta t\mu_{tr}$ が 1 より充分小さい場合は、両者の値は一致するが、 $c\Delta t\mu_{tr}$ が大きくなるに従い乖離が顕著になり、

[†] 北見工業大学 Kitami Institute of Technology

LTS の場合 C_l が負になる。

3. 解析結果

3.1 光強度分布

前項で述べた理論を $110 \times 110 \times 60$ (mm³) の 3 次元均一光散乱体に適用し、LTS と ETS を比較した。図 2 は LTS と ETS で計算した定常状態における光強度分布を示す。光強度分布の計算では、 $(1-g)\mu_s$ 及び μ_a を生体の平均的な値である 2 及び 0.02 mm^{-1} と仮定し、立方体 Yee 格子サイズ (Δz) を 2mm とした。この場合、 $c\Delta t\mu_r \sim 4$ となり(4)式と図 1 から推察できるように LTS では C_l は負になる。このため、図 2(a)に示すように LTS を用いると光源・検出器間隔が 50mm 以上になると光強度分布が振動し、 $c\Delta t\mu_r$ の値に応じて大きな誤差を伴うことが分かる。これに対して ETS を用いると、図 2(b)に示すように散乱体全体に亘り光強度分布に振動は視られない。以上の結果から、ETS は光拡散方程式の FDTD 解析における解の振動を抑圧する有効な手段であることが分かる。

3.2 光パルス波形解析精度

本報告で用いた FDTD 解析は、 Δz を 0.5 mm に微細化すると光パルス波形解析誤差は 1% 以下である^[6]。このため、 $\Delta z = 0.5 \text{ mm}$ の FDTD 解析結果を用いて Δz を 2 mm に拡大して計算した光パルス波形解析精度を評価した。Yee 格子を拡大した場合、グリッド分散により平均遅延時間精度が劣化する^[6]。このため、遅延時間補償を行い、波形そのものの解析精度劣化を評価した。解析精度は光パルス波形のピーク時間 ($n_1\Delta t$) 以降の相対振幅が 10^{-4} に減少する時間帯 ($n_2\Delta t$) の平均振幅誤差が最小になる遅延時間補償と以下の Rms 値 (χ^2) が最小になる 2 つの補償法を検討した。

$$\chi^2 = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{[J_z^{\Delta z=2}(n\Delta t) - J_z^{\Delta z=0.5}(n\Delta t)]^2}{J_z^{\Delta z=0.5}(n\Delta t)} \quad (6)$$

図 3 は光源検出器間隔 (d) が 8、24、40 及び 56 mm の場合の遅延時間補償値と平均誤差の関係を示す。図から補償値を最適にすると $d=8\text{mm}$ を除いて誤差は数%以下に留まっており、ETS は LTS より誤差が小さいことが分かる。また、Rms 値で視ると図 3 から ETS は LTS のそれより最大 1 桁程度小さくなっており、両者の差がより顕著になることが判明した。

図 4(a)及び 4(b)は $d=48\text{mm}$ とした時の、平均誤差及び Rms 値最小の各場合に対応する光パルス波形と各時間帯における振幅誤差を示す。図から ETS を適用するとパルスステール部に振幅振動が無く、振幅誤差も最大 2%程度に留まっている。これに対して LTS を用いると光パルスステール部の振幅振動により、特にこの時間帯の精度劣化が顕在化することが分る。

4. まとめと今後の課題

3 次元散乱体の光パルス波形解析を行う FDTD 法において、指数時間ステップ法を提案し、その有用性を検証した。今後は本解析を時間領域拡散光トモグラフィに適用し、像再生精度の検討を行う必要がある。

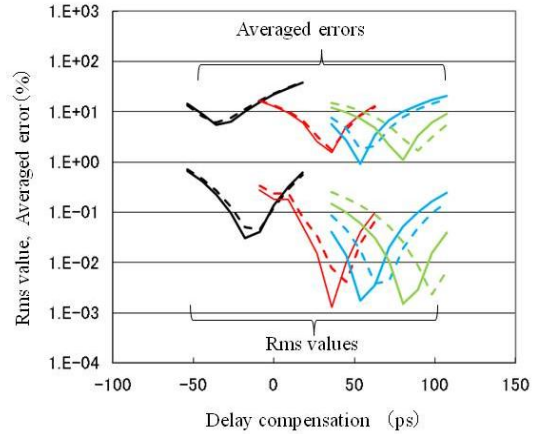
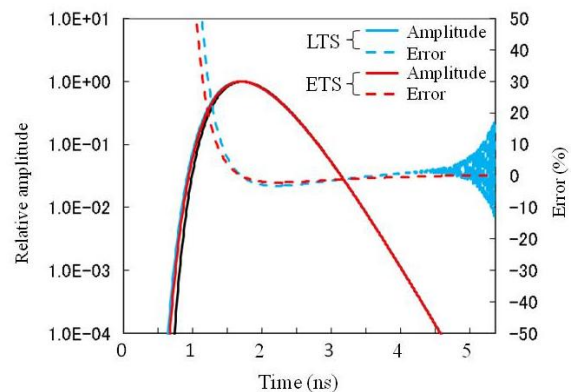
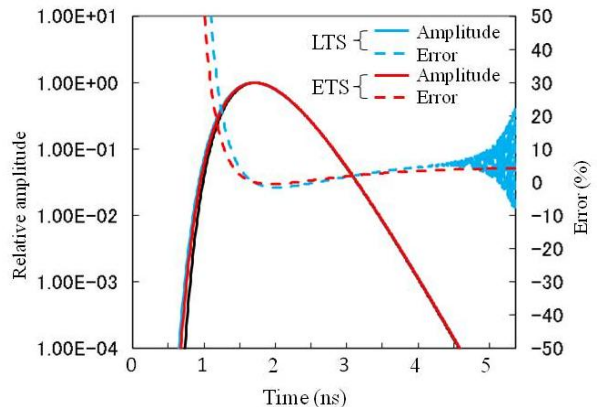


図 3 LTS (破線) と ETS (実線) の誤差



(a) 平均誤差最小



(b) Rms 値最小

図 4 光パルス波形と振幅誤差

謝辞

本研究の一部は科研費 (24560493) により行われた。

参考文献

- [1] Fabiani M *et al.*, IEEE Eng. Med. Biol. Mag. 26:14-58, 2007.
- [2] A.H.Hielscher *et al.*, IEEE TMI, vol.18, no.3, pp.262-271, 1999
- [3] F.Gao *et al.*, Appl. Opt. vol.41, no.4, pp.778-791, 2002.
- [4] Q. Zhao *et al.*, Biomed. Opt. Express, vol.2, pp.705-716, 2011.
- [5] T.Tanifuji *et al.*, IEEE TMI, vol.21, no.2, pp.181-184, 2002.
- [6] T.Tanifuji *et al.*, Appl. Opt. vol.50, no.12, pp.1697-1706, 2011.
- [7] A. Taflov, "Computational Electrodynamics", (Artech House, Norwood, MA, 1995), Chap. 3.