A-024

完全K分木連結ピン型組織構造の階層間関係追加

Adding Relation between Two Levels of a Complete K-ary Linking Pin Organization Structure

澤田　清 †
Kiyoshi Sawada

1.　はじめに

企業などの組織の構造には，上下間の一元的な命令系統に基づくピラミッド組織構造や，ピラミッド組織構造に部門内の横方向の協力関係を付加した連結ピン型組織構造（Likert[1] の組織分類では，システム４と呼ばれている）などがある．ピラミッド組織構造は，構成主体を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる [2]．また，連結ピン型組織構造は，根付き木の兄弟（同じ親を持つ頂点）を隣接化した構造として表すことができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，これらの組織構造に辺を追加することは，組織にあらかじめ設定された主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する．

筆者らは，すでに，完全 K 分木のピラミッド組織構造および連結ピン型組織構造を対象とした関係追加モデル，(1) 同じ深さの２頂点間に辺を１本追加する，(2) 同じ深さの全頂点間に辺を追加する，について，総頂点間経路長（全頂点間の最短経路長の総和）を最小にする辺の追加位置を解析的に求めた [3, 4]．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す．また，深さは根からその頂点までの経路長（経路の辺の数）を表す．

本研究では，高さ $H(H=2,3,\ldots)$ の完全 K 分木の全兄弟が隣接化されている完全 K 分木連結ピン型組織構造に対して，深さ $M(M=0,1,\ldots,H-2)$ の頂点と，その子孫である深さ $N(N=M+2,M+3,\ldots,H)$ の頂点との間に１辺を追加する場合に，総頂点間経路長を最小にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求めることを考える．図 1. に完全 K 分木連結ピン型組織構造の例（$K=2,H=5$）を示す．ここで扱う辺追加モデルは，完全 K 分木連結ピン型組織構造を持つ組織内の直系の上位層（上司）と下位層（部下）との間に追加的な関係形成を行う場合に，どの層とどの層で関係を結ぶのが最も効果的であるかという問題に対応している．

†流通科学大学 総合政策学部 総合政策学科
Department of Policy Studies, Faculty of Policy Studies,
University of Marketing and Distribution Sciences

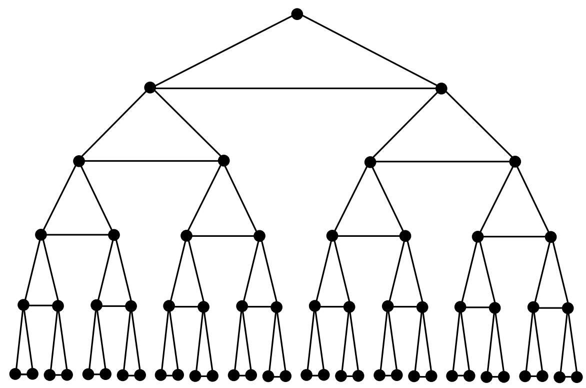

図 1: 完全 K 分木連結ピン型組織構造（$K=2,H=5$）

完全 K 分木連結ピン型組織構造の 2 頂点 v_i と $v_j(i,j=1,2,\ldots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路長を $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような辺追加後の 2 頂点 v_i，v_j 間の最短経路長を $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は辺追加により 2 頂点間の最短経路長がどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．ここで，総頂点間短縮経路長を最大にすることは，総頂点間経路長を最小にすることを意味する．

2.　総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述した完全 K 分木連結ピン型組織構造への辺追加問題について，総頂点間短縮経路長を定式化する．辺追加により隣接化される深さ M の頂点と深さ N の頂点をそれぞれ v_M，v_N とし，v_N の子孫の集合を V_1 とする．ただし，子孫はその頂点自身も含む．また，v_M の子孫のうち v_N の親の祖先の集合を V_2 とする．ただし，祖先はその頂点自身も含む．また，v_M の子孫のうち V_1 と V_2 を除いた頂点の集合を V_3 とする．さらに，完全 K 分木連結ピン型組織構造の全頂点集合から v_M の子孫を除いた頂点の集合を V_4 とする．

このとき，V_1 の頂点と V_2 の頂点との間の短縮経路長

の総和は，

$$A_H(M,N) = W(H-N) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor} (N-M-2i+1) \quad (1)$$

と表される．ただし，$W(h)(h=0,1,2,\ldots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，$\lfloor \cdot \rfloor$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す．次に，V_2 内の頂点間および，V_1 の頂点と V_3 の頂点との間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$B(M,N) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor - 1} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor - i} (N-M-2i-2j+1), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} C_H(M,N) &= W(H-N) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M-1}{2} \right\rfloor} (K-1) \\ &\quad \times W(H-M-i)(N-M-2i) \quad (3) \end{aligned}$$

で与えられる．ただし，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$ と定義する．さらに，V_2 の頂点と V_3 の頂点との間および，V_3 内の頂点間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$\begin{aligned} &D_H(M,N) \\ &= \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M-1}{2} \right\rfloor - 1} (K-1)W(H-M-i) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{N-M-1}{2} \right\rfloor - i} (N-M-2i-2j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M-1}{2} \right\rfloor} (K-1)W(H-N+i-1) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{N-M-1}{2} \right\rfloor - i + 1} (N-M-2i-2j+2), \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E_H(M,N) \\ &= \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor - 1} (K-1)W(H-N+i-1) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor - i} (K-1)W(H-M-j) \\ &\quad \times (N-M-2i-2j+1) \quad (5) \end{aligned}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$ と定義する．また，V_1 の頂点と V_4 の頂点との間，V_2 の頂点と V_4 の頂点との間および，V_3 の頂点と V_4 の頂点との間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$\begin{aligned} F_H(M,N) &= \big(W(H) - W(H-M)\big)W(H-N) \\ &\quad \times (N-M-1), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_H(M,N) &= \big(W(H) - W(H-M)\big) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M}{2} \right\rfloor - 1} (N-M-2i-1), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &J_H(M,N) \\ &= \big(W(H) - W(H-M)\big) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-M-1}{2} \right\rfloor} (K-1)W(H-N+i-1) \\ &\quad \times (N-M-2i) \quad (8) \end{aligned}$$

と表される．

以上より，総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ は，

$$\begin{aligned} &S_H(M,N) \\ &= A_H(M,N) + B(M,N) + C_H(M,N) \\ &\quad + D_H(M,N) + E_H(M,N) + F_H(M,N) \\ &\quad + G_H(M,N) + J_H(M,N) \quad (9) \end{aligned}$$

と定式化される．

総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ を最大にする最適深さ対 $(M,N)^*$ に関する解析結果は，発表時に報告する．

参考文献

[1] R. Likert, J. G. Likert, New Ways of Managing Conflict, McGraw-Hill, New York, 1976.

[2] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[3] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree, European Journal of Operational Research, Vol.174, No.3, pp.1491–1500, 2006.

[4] K. Sawada, Adding relations in the same level of a linking pin type organization structure, IAENG International Journal of Applied Mathematics, Vol.38, No.1, pp.20–25, 2008.