A-005

根付き部分木の総利益最大化

Maximum-profit rooted not-necessarily-spanning tree problem

安部 友輔* 千葉 英史* 古賀 裕紀* 斉藤 寿樹†
Yusuke Abe Eishi Chiba Hiroki Koga Toshiki Saitoh
影山 孝夫* 古林 隆* 五島 洋行*
Takao Kageyama Takashi Kobayashi Hiroyuki Goto

1 はじめに

連結無向グラフ，特別な点，各点の非負収入，各辺の非負コストが与えられたとき，特別な点を根とする利益最大となるような無向木を求めたい．ただし，この無向木は必ずしも全域である必要はない．

上の問題の応用として，ケーブル TV 事業がある．そこでは，唯一のセンターと顧客からなる点集合と，2 点間接続可能なケーブルからなる辺集合を仮定する．センターからケーブルに介して，顧客はサービスを受けることができる．そのとき，ケーブルを張るためのコストと，顧客から得る収入を考慮して，どの顧客にどのようにケーブルを張るのかを決める問題になる．また，ガス，水道，電気などのサービスも上述と同様に問題を定式化することが出来る．

次章で問題の定式化を行う．この問題は NP 困難であるが，紙面の都合上，その証明は省略する．第 3 章では，3 つの異なるヒューリスティックを与える．さらに，計算実験を通して，各アルゴリズムの性能評価も行った．発表の際に，それらの結果を示し，我々の検討結果を述べる．

我々が提案する問題はネットワーク上の基本的な問題であるため，多くの関連研究が存在する．特に近いものを挙げれば，例えば古典的なものに，最小根指定全域有向木問題 [1] がある．これに続くものとして，最小根指定有向部分木問題 [2] がある．

2 問題の定式化

連結無向グラフ $G = (V, E)$ を導入する．$V := \{1, 2, \ldots, n\}$ は唯一のセンターと顧客からなる集合である．簡単のため，センターを点 1 と仮定する．E は 2 点 i, j $(\in V)$ 間に張ることのできるケーブルからなる集合である．各点 i $(\in V)$ には収入 p_i (≥ 0) が付随する．また，各辺 $\{i, j\}$ $(\in E)$ にはコスト c_{ij} (≥ 0) が付随する．(ここで，G は無向グラフなので，$c_{ij} = c_{ji}$ が成立つと仮定する)．

顧客 i, j 間にケーブルを張るとき，顧客 i, j から $p_i + p_j$ の利益を得ることが出来るが，2 点 i, j $(\in V)$ 間を張るためのケーブルコスト c_{ij} が必要となる．また，センターの利益は無いとする（つまり，$p_1 = 0$）．

さて，点 1 を根とする（必ずしも全域である必要はない）無向木 $T = (N, A)$ の中で，目的関数

$$\mathrm{profit}(T) = \sum_{i \in N} p_i - \sum_{\{i,j\} \in A} c_{ij}.$$

を最大化したい．ここでは簡単のため，無向木 T を部分木と呼ぶ．

連結無向グラフ $G = (V, E)$，収入 p_i (≥ 0)，コスト c_{ij} (≥ 0) が与えられたとき，$\mathrm{profit}(T)$ を最大にする部分木を求める問題を，最大利益根付き部分木問題（Maximum-Profit-Rooted-Subtree : MPRS）と呼ぶ．

3 提案ヒューリスティック

3.1 剪定法

MPRS の入力に対して，以下のように単純連結有向グラフ $D = (N_D, A_D)$ を構成する．

- $N_D := V$.
- $A_D := \{(i, j) | \{i, j\} \in E\} \setminus \{(j, 1) | \{1, j\} \in E\}$.
- 各有向辺 (i, j) $(\in A_D)$ の重み $w_{ij} := p_j - c_{ij}$.

次に，D 上で，有向辺の重みの合計が最大となるような，点 1 を根とする全域有向木を求める．具体的には，根指定重み最大全域有向木を求めるために，問題等価性に関する結果 [1] を利用して，さらに Edmonds' branching algorithm [1] を適用する．

上で求めた全域有向木に対して，目的関数値を小さくする有向辺が存在する場合は，それらの有向辺を削除する．具体的には，その重みと (根の方から見て) それより先の有向辺の重みの和が負である有向辺を全て削除する．この手法の利点として，削除される有向辺が一つも無ければ，最適解が得られる．

3.2 付随木連結法

各点 i を根とする部分木 (S_i, X_i) を導入する．これを点 i の付随木と呼ぶ．最初は，各点が自分自身のみ

*法政大学 Hosei University, email: e-chiba@hosei.ac.jp
†神戸大学 Kobe University

を付随木として持つ．また点 i の付随木 (S_i, X_i) は

$$\text{利益 } z_i = \sum_{h \in S_i} p_h - \sum_{\{g,h\} \in X_i} c_{gh}$$

を持つ．各点において，付随木の利益が増加するなら，そのサイズも大きくなる．最終的には点 1 の付随木に含まれる点を抽出して，それらの点に関する最小全域木を計算する．無向辺 $\{i, j\}$ を 2 本の有向辺 (i, j) と (j, i) に置き換えて，有向辺 (i, j) の重みを $z_j - c_{ij}$ とする．

1. 初期化 $S_i := \{i\}, X_i := \phi, z_i := p_i \quad (i \in V)$, $A_d := \{(i, j) | \{i, j\} \in E\} \setminus \{(j, 1) | \{1, j\} \in E\}$.
2. A_d 中で重み最大の有向辺 (i, j) を求める．その重み値が 0 以下ならば，5. へ．$j \in S_i$ であれば，4. へ．
3. 各 $h = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$i \in S_h$ ならば，辺 (i, j) を加えることによって，点 h の付随木に点 j の付随木を連結させる（利益 z_h を更新する）．ただし，これによって，閉路ができるときは，点 j の付随木の一部を除くことにする．— (*)
4. A_d から (i, j) を除き，A_d が ϕ でなければ 2. へもどり，ϕ であれば 5. へ．
5. 元グラフ G で，S_1 に関する最小全域木を計算する（ここでは，c_{ij} のみを考慮する）．

(*) 終点 j の付随木から一部の辺を除く手順

1. 端点が S_k に含まれる辺を除く
2. 残った木に辺 (i, j) を加える
3. $function(i)$ を実行する

$function(e)$
e から出る辺に対して，それ以降で得られる最大の利益（負の時は 0）を加えた値を求める辺 (e, f) に対する $max\{p_f - c_{ef} + function(f), 0\}$ の和に等しい（再帰）

3.3 最大重み経路法

基本的なアイデアは，有向グラフ上で，最大重み経路を繰り返し計算することである．そのような経路を求めるためには，有向グラフ上に正の重みの有向閉路が存在しないことを保証しなければならない．実際，以下のアルゴリズムはこれを保証している（証明は省略）．
また，STEP3 で以下の集合を導入する．

- V_{w1} : 無向木を構成する点集合
- V_{w0} : 無向木を構成しない点集合

1. G 中で，$p_i \geq c_{ij}$ かつ $p_j \geq c_{ij}$ を満たす 2 点 i, j を，1 つの点に縮約する．縮約された点の収入を $p_i + p_j - c_{ij}$ とする．縮約後，多重辺が生じたならば，コストの大きい方の無向辺を削除する．縮約後の無向グラフを $G_w = (V_w, E_w)$ とする．点 i $(\in V_w)$ に縮約された G の点からなる集合を S_i とする．
2. 縮約無向グラフ G_w 中の各無向辺を，双方向の有向辺とみなし，各有向辺 (i, j) の重みを $w_{ij} = p_j - c_{ij}$ とする．ただし，$i = 1$ または $w_{ij} > 0$ であれば，$w_{ji} = -\infty$ とする．
3. $V_{w1} = \{1\}$ とする．$V_{w0} = V_w - V_{w1}$ が空集合になるまで，以下の (3.1) から (3.4) を繰り返す．

   (3.1) $|V_{w1}| \geq 2$ ならば，V_{w1} 中の任意の 2 点間の重みを 0 とする．V_{w1} 中の任意の点から，各点 j $(\in V_{w0})$ までの最大重み経路を計算して，その重み値を v_j とする．

   (3.2) $v_j = \max_{i \in V_{w0}}\{v_i\}$ を満たす点 j を $j_{\max}$，点 $j_{\max}$ への経路中に含まれる点集合を $R_{j_{\max}}$，$V_{WR} := R_{j_{\max}} - V_{w1}$ とする．

   (3.3) $V_{w1} := V_{w1} \cup V_{WR}$.

   (3.4) $i \in V_{WR}$，$j \in V_{w0} \setminus V_{WR}$ である無向辺 $\{i, j\}$ に対して，$w_{ji} = -\infty$ とする．$w_{ij} = -\infty$ ならば，$w_{ij} = p_j - c_{ij}$ (< 0) とする．
4. STEP3 の計算中に得られる最大重み経路を全て抽出したものは，V_w に関する全域無向木である．この全域木から，利益を減少させる無向辺を削除する．具体的には，その重みと (根の方から見て) それより先の辺の重みの和が負である辺を除く．点 1 とつながっている点の集合を V_{WT} とし，

$$V_T = \bigcup_{i \in V_{WT}} S_i$$

   とする．
5. 元グラフ G で，V_T に関する最小全域木を計算する．

4 結論と今後の課題

本研究では，ネットワーク上における新しい MPRS を提案した．また，この問題が NP 困難であることを証明した．さらに，3 つのヒューリスティックを提案した．これらは全て実装され，計算実験を行い各々の性能評価を行った．今後の課題として，精度保証を持つ近似アルゴリズムの開発が考えられる．

参考文献

[1] B. Korte and J. Vygen: “Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms,” Fourth Edition, Springer-Verlag, 2008.

[2] V. V. Rao and R. Sridharan: “Minimum-weight rooted not-necessarily-spanning arborescence problem,” Networks, vol. 39(2), pp. 77 – 87, 2002.