

# Grouplet 変換を用いたカラー画像のぼけ復元・拡大

## Color-image deblurring and over-sampling with the grouplet transform

石川 健一 小松 隆十 齊藤 隆弘  
Ken-ichi ISHIKAWA Takashi KOMATSU Takahiro SAITO

### 1. はじめに

筆者らは先に、画像の構造的特徴に適した方向性を持った冗長な関数系 (Frame) をブロックマッチングにより方向適応的に探索して方向性 Haar Lifting を構成する S. Mallat の Tight-Frame Grouplet 変換<sup>[1]</sup>を、シフト不変 Haar Wavelet 変換と組み合わせて得られる冗長変換領域において、その変換係数に Hard Color-Shrinkage を適用することによる雑音除去手法を提案した<sup>[2][3]</sup>。この手法では、水平・垂直方向に関数系が固定されているシフト不変 Haar Wavelet 変換のみを冗長画像変換に用いた既存方法と比較し、テクスチャや、斜め方向・曲線状のエッジが良好に保存されるという優位性が確認された。

本稿では、この Tight-Frame Grouplet 変換を、シフト不変 Haar Wavelet 変換領域での Shrinkage による画像のぼけ復元・拡大法<sup>[4]</sup>に導入し、その有効性について実験的に検討する。2章では、Tight-Frame Grouplet 変換の概要について説明する。3章では、Grouplet 変換の実用上の工夫として、シフト不変 Haar Wavelet 変換と組み合わせること、そのために考慮すべきことを述べる。4章では、シフト不変 Haar Wavelet 変換領域での Shrinkage による画像のぼけ復元・拡大法について説明する。5章では、この方式に3章で述べた方法で Grouplet 変換を組み込み、その性能を実験的に評価する。

### 2. Tight-Frame Grouplet 変換

Tight-Frame Grouplet 変換<sup>[1]</sup> (以下 TF-GT と呼ぶ) は、入力画像からブロックマッチングによって各点を最も Regularity が高い方向の点と対応付けて、対応ごとに逐次的に荷重 Haar Lifting (平均と差分の計算) を行う変換である。そのため構造的画像特徴に適応的で、また変換は階層的に行い、階層  $j$  で  $2^{j-1}$  離れた点へと対応付けの間隔を広げていく多重スケール変換である。また、それらが全体として Tight-Frame 変換を構成しているということを大きな特徴としている。

以下に TF-GT の計算アルゴリズムを示す。TF-GT には水平方向と垂直方向の変換があるが、以下では、垂直方向の変換についてのみ示した。水平方向の変換は処理を単に転置することで得られる。

[垂直方向 TF-GT の計算アルゴリズム]

記法:

$f[n]$ : 入力画像の配列 ( $M \times N$ )

$G_0$ : 画像の標本点の集合 ( $MN$  点)

$J$ : 変換の階層数

$a[n]$ : 平均係数の配列 ( $M \times N$ )

$d_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ): 差分係数の配列 (各々  $M \times N$ )

$A_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ): 標本点を対応付けるベクトル場の配列 (各々  $M \times N$ )。これを Association Field と呼ぶ。

$s[n]$ : 平均係数のサポートサイズの配列 ( $M \times N$ )。

TF-GT は、Association Field  $A_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ) によって、入力画像  $f[n]$  を多重スケールの差分係数  $d_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ) と最も粗いスケールの平均係数  $a[n]$  とに展開する。

#### 0) 初期化

任意の  $m \in G_0$  について、 $a[m] = f[m]$ ,  $s[m] = 1$  と初期化する。

#### 1) 階層 $j=1, \dots, J$ について 1-1), 1-2) を繰り返す。

##### 1-1) Association Field の計算ステップ

任意の  $\tilde{m} = (k, l) \in G_0$  について、 $2^{j-1}$  画素だけ離れた上の行  $(*, l-2^{j-1})$  の中で最も Regularity が高い点  $m$  への変位ベクトル  $A_j[\tilde{m}] = m - \tilde{m}$  をブロックマッチングにより求める (図1を参照)。  $0 \leq l < 2^{j-1}$  (画像の上端のとき) ならば対応点が求められないので、 $A_j[\tilde{m}] = \text{NULL}$  とする。

$j > 1$  のときには、計算量を抑えるための工夫として、前の階層  $j-1$  の Association Field  $A_{j-1}[n]$  から  $A_j[n]$  を推定することができる。  $m_1 = \tilde{m} + A_{j-1}[\tilde{m}]$ ,  $\hat{m} = m_1 + A_{j-1}[m_1]$  から  $A_j[m] = \hat{m} - \tilde{m}$  を求めて、これを起点にして行内で左右に微調整することと定める (図2を参照)。

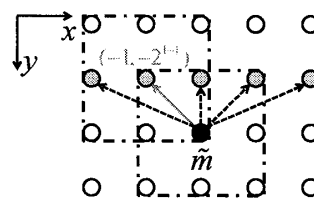


図1 Association Field の計算  
( $j=1$ , 探索領域サイズ  $\pm 2$ , ブロックサイズ  $3 \times 3$  の場合)

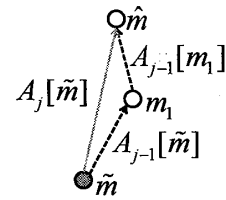


図2 Association Field の伝播

##### 1-2) 荷重 Haar Lifting の計算ステップ

$G_0$  から、再構成性を保証するためラスタ走査順で取り出した着目点を  $\tilde{m}$  とする。各着目点  $\tilde{m}$  について、 $A_j[\tilde{m}] \neq \text{NULL}$  ならば、対応点  $m = \tilde{m} + A_j[\tilde{m}]$  との間で以下の荷重 Haar Lifting を実行し、 $d_j[n]$  の計算と  $a[n]$ ,  $s[n]$  の更新を行う。

$$\hat{s} = s[\tilde{m}] + s[m] \quad (1)$$

$$d_j[\tilde{m}] = (a[\tilde{m}] - a[m]) \frac{\sqrt{s[m]s[\tilde{m}]}}{\sqrt{\hat{s}}} \quad (2)$$

$$\hat{a} = \frac{s[m]a[m] + s[\tilde{m}]a[\tilde{m}]}{\hat{s}} \quad (3)$$

$$a[m] = \hat{a}, \quad s[m] = \hat{s} \quad (4)$$

$A_j[\tilde{m}] = \text{NULL}$  ならば、 $d_j[\tilde{m}] = a[\tilde{m}] \sqrt{s[\tilde{m}]}$  として  $a[n]$ ,  $s[n]$  は更新しない。

†神奈川大学 工学研究科 電気電子情報工学専攻

2) 平均係数の正規化

最後に、最も粗いスケールの平均係数の正規化を行う。  
 任意の  $m \in G_0$  について、 $\hat{a} = a[m]\sqrt{s[m]}$ ,  $a[m] = \hat{a}$  とする。

[手順終]

次に、逆変換の計算アルゴリズムを示す。

[垂直方向逆 TF-GT の計算アルゴリズム]

逆 TF-GT は (冗長変換なので最小二乗型一般化逆変換として)、 $A_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ),  $d_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ) と  $a[n]$  から元の信号を  $f[n]$  に再構成する。

1)  $s[n]$  の再計算

$A_j[n]$  ( $j=1, \dots, J$ ) に基づいて、順変換のときと同様にし、階層  $J$  でのサポートサイズを再計算する。

2) 正規化の逆演算

平均係数の正規化を元に戻す。任意の  $m \in G_0$  について

$$\tilde{a} = \frac{a[m]}{\sqrt{s[m]}}, \quad a[m] = \tilde{a} \quad (5)$$

3) 順変換とは逆順に階層  $j=J, \dots, 1$  について、3-1) を繰り返す。

3-1) 逆計算のステップ

$G_0$  から、ラスト走査とは逆順で取り出した着目点を  $\tilde{m}$  とする。各着目点  $\tilde{m}$  について、 $A_j[\tilde{m}] \neq \text{NULL}$  ならば、対応点  $m = \tilde{m} + A_j[\tilde{m}]$  との間で以下の荷重 Haar Lifting の逆計算を実行する。

$$\tilde{s} = s[m] - s[\tilde{m}] \quad (6)$$

$$\tilde{a}_- = a[m] + d_j[\tilde{m}] \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{\sqrt{s[\tilde{m}]s[m]}} \quad (7)$$

$$\tilde{a}_+ = a[m] - d_j[\tilde{m}] \frac{\sqrt{s[\tilde{m}]}}{\sqrt{\tilde{s}s[m]}} \quad (8)$$

$$a[m] = \tilde{a}_+, \quad \tilde{a} = \frac{\tilde{a}_- + a[\tilde{m}]}{2}, \quad a[\tilde{m}] = \tilde{a}, \quad s[m] = \tilde{s} \quad (9)$$

$A_j[\tilde{m}] = \text{NULL}$  ならば、何もしない。

4) 再構成

任意の  $m \in G_0$  について、 $f[m] = a[m]$  として再構成する。  
 [手順終]

3. Grouplet 変換の実用上の工夫

TF-GT とその計算アルゴリズムは 2 章に示した通りである。しかしながら、これを実際の画像処理問題に応用するに当たっては、この変換をそのままアルゴリズム通りに実画像に適用して得られた変換係数に対し、処理を行っても望ましい結果が得られない。そこで、いくつかの実用上の工夫が必要とされる。

3.1 シフト不変 Haar Wavelet 変換との組み合わせ

TF-GT は、ブロックマッチングによって画像から求めた対応付けに従って変換するため、構造的画像特徴に適応的である反面、画像全体に一樣に計算する変換ではないので、実画像に対して直接適用しても画像処理にとって必ずしも望ましい画像表現が得られない。そこで、画像全体に一樣に計算処理を行い、且つ多重解像度表現を与える変換であるシフト不変 Haar Wavelet 変換 (以下 SI-HWT と呼ぶ) と組み合わせることが有効となる。すなわち、入力画像をまず SI-HWT で展開し、得られた展開係数に対して TF-GT を適用する。これは、先に SI-HWT することであらかじめ画

像の疎な表現が得られ、その展開係数が元の画像の構造的な特徴を継承しているということから考えても妥当である。

はじめに、 $M \times N$  の入力画像  $f[n]$  を  $I$  階層の SI-HWT により展開する (図 3 参照)。

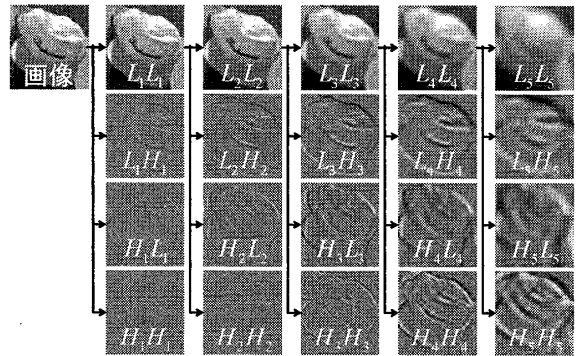


図 3 5 階層 SI-HWT とその展開係数

以下、SI-HWT について簡単に説明する。変換は階層  $i=1, \dots, I$  について順次的に行い、階層  $i$  における係数の計算は、 $(1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, 1/\sqrt{2})$  (間隔  $2^{i-1}$ ) の 1 次元 2 点平均フィルタと  $(1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, -1/\sqrt{2})$  (間隔  $2^{i-1}$ ) の 1 次元 2 点差分フィルタを水平・垂直に組み合わせて行う。

$L_iL_i$ : 前の階層  $i-1$  の Scaling 係数  $L_{i-1}L_{i-1}$  ( $L_0L_0$  は入力画像とする) の各点に対して、水平方向、垂直方向ともに 2 点平均フィルタを掛けて得られた  $M \times N$  の配列。

$L_iH_i$ :  $L_{i-1}L_{i-1}$  の各点に対して、水平方向、垂直方向にそれぞれ 2 点平均フィルタ、2 点差分フィルタを掛けて得られた  $M \times N$  の配列。

$H_iL_i$ :  $L_{i-1}L_{i-1}$  の各点に対して、水平方向、垂直方向にそれぞれ 2 点差分フィルタ、2 点平均フィルタを掛けて得られた  $M \times N$  の配列。

$H_iH_i$ :  $L_{i-1}L_{i-1}$  の各点に対して、水平方向、垂直方向ともに 2 点差分フィルタを掛けて得られた  $M \times N$  の配列。

例えば、階層 1 での展開係数を求めるには、入力画像  $L_0L_0$  の各点に図 4 のフィルタを掛ける。

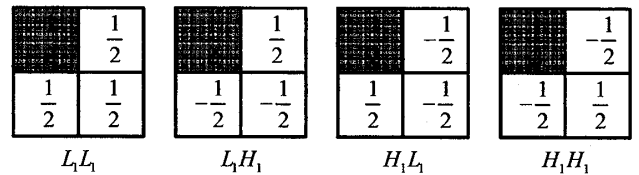


図 4 階層 1 の係数を求めるためのフィルタ

以上のように、 $M \times N$  の入力画像  $f[n]$  が、それぞれ  $M \times N$  の Wavelet 係数  $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) と、最も低周波の Scaling 係数  $L_iL_i$  に展開される。

3.2 SI-HWT の各帯域への TF-GT の適用法

次に、Scaling 係数  $L_iL_i$  を除く  $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) の各帯域に対して、それぞれを  $M \times N$  の 1 枚の画像と見なし、個別に TF-GT を適用する。しかし、TF-GT には、垂直方向の変換と水平方向の変換があり、どの帯域にどの変換を行うかが問題となる。

ここでは、 $L_iH_i$  には垂直方向の、 $H_iL_i$  には水平方向の TF-GT を適用することにする。これを逆に行うと問題が生

じる。例えば、 $H_iL_i$ はその定義から、垂直方向に Regularity を持った成分である。これに対して垂直方向の TF-GT を適用しても、Association Field の計算ステップにおいて“自明な方向である  $A_i[n]=(0,-1)$  (真上)”が支配的に求まるので、雑音除去では処理結果に縞模様のパターンが生じてしまう。

また、 $H_iH_i$ は高周波帯域であるので画像の構造的特徴をブロックマッチングによって見つけるのは非常に困難である。これに対して垂直方向・水平方向の TF-GT を適用すると、Association Field の計算ステップにおいて斜め方向  $A_i[n]=(-1,-1), (1,-1), (-1,1)$  が支配的に選択される。そのため、この Association Field を用いて  $H_iH_i$  を TF-GT した係数を Shrinkage して逆 TF-GT すると、 $H_iH_i$ には斜めの特定方向に傷が生じてしまう。これを避けるため、 $H_iH_i$ の処理は、 $L_iH_i$ への垂直方向 TF-GT で求めた Association Field を流用して計算する垂直方向 TF-GT と、 $H_iL_i$ への水平方向 TF-GT で求めた Association Field を流用して計算する水平方向 TF-GT の二つの処理を行い、それぞれの係数を Shrinkage して逆 TF-GT された  $H_iH_i$  を平均する。

### 3.3 SI-HWT の階層による TF-GT の制御

SI-HWT の上位 (大きい値のパラメータ  $i$  の低周波数の) 階層の係数に下位階層と同じように TF-GT を適用すると、粗いスケールのエッジ以外には特別な構造がないにも関わらず、Association Field により係数を対応付けして計算するため、雑音除去では色斑が発生するという問題を生じた。SI-HWT 係数の階層と領域に応じて TF-GT の Association Field による対応付けを制御する必要がある。

ここでは、SI-HWT の階層が上位であるほど、その係数は広範囲の平均となるので、上位階層での TF-GT における Association Field の探索においては、特別な構造がない領域では自明の方向 ( $L_iH_i$ における垂直方向 TF-GT では真上を向くベクトル、 $H_iL_i$ における水平方向 TF-GT では真左を向くベクトル) が選ばれるという性質を利用し、Association Field による対応付けを制御する。以下に、水平方向に平滑化された構造を持つ  $L_iH_i$  に対する垂直方向 TF-GT について、制御手法を具体的に示す

1) 階層  $j$  における点  $\tilde{m}$  での Association Field の計算で  $A_j[\tilde{m}]=(0,-2^{j-1})$  (真上) が選択された場合、 $\tilde{m}$  の周りには特別な Regularity がないと判断して  $A_j[\tilde{m}]=\text{NULL}$  と設定する (どの点とも対応付けしないことを意味する)。

2) このとき、次階層  $j+1$  では点  $\tilde{m}$  において Association Field の伝播ができないので、 $A_{j+1}[\tilde{m}]=(0,-2^j)$  を起点にして左右を探索する。この場合も、 $A_{j+1}[\tilde{m}]=(0,-2^j)$  が選択された場合には、再び  $A_{j+1}[\tilde{m}]=\text{NULL}$  と設定する。

$H_iL_i$  に対する処理も同様にして構成される。

### 4. SI-HWT を用いたぼけ復元・拡大法

R. H. Chan らにより、SI-HWT 変換領域での Shrinkage によるぼけ復元法が提案されている。3章の SI-HWT の説明で、通常の SI-HWT は階層  $i$  において  $L_iL_i$  を求めるために  $L_{i-1}L_{i-1}$  に対して間隔  $2^{i-1}$  の 2 点フィルタを掛けると述べたが、 $L_iL_i$  は入力画像から見れば  $2^i \times 2^i$  の一様な重みの平均フィルタを掛けた画像に相当する。一方、この 2 点フィルタの間隔を  $2^{i-1}$  ではなく全階層で 1 と固定すると、 $L_iL_i$  は入力画像に  $(i+1) \times (i+1)$  の 2 項フィルタを掛けた画像に相

当する。このように、各階層でのフィルタ間隔と全体の階層数  $I$  を変えることで、最も低周波の Scaling 係数  $L_iL_i$  に所望のぼけ画像を作り出すことができる。Wavelet Shrinkage によるぼけ復元アルゴリズムは、 $L_iL_i$  のぼけフィルタが、復元したいぼけ画像に掛っていると想定されるぼけと等価になるように、SI-HWT を設計した上で、以下のように行われる。

[SI-HWT と Shrinkage による反復型ぼけ復元アルゴリズム]

0) 初期化

Wavelet 係数  $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) をすべて 0 と初期化し、反復パラメータ  $k \leftarrow 0$  と初期化する。

1) 反復更新

1-1) Wavelet 係数の Shrinkage と Scaling 係数の拘束

$L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) の全 Wavelet 係数に対して Shrinkage を適用し、元のぼけ画像を、その振幅と位相ずれを考慮して Scaling 係数  $L_iL_i$  に拘束として代入する。

1-2) 逆変換

逆 SI-HWT を行い、 $k$  回目の復元画像  $f^{(k)}[n]$  を得る。

2) 収束判定

もし収束していないならば、 $k \leftarrow k+1$  とし、 $f^{(k)}[n]$  を SI-HWT で展開して 1-1) へ戻る。

[手順終]

SI-HWT は冗長変換であるので、 $L_iL_i$  と  $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) は互いに冗長性を有しており、互いに独立に自由な値をとることはできない。 $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) の初期値は 0 だが、各更新回でぼけ画像を拘束として  $L_iL_i$  に与え、Shrinkage により正則化を行いながら、逆変換と変換を繰り返すことで、 $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) に望ましい値が次第に作り出されていく。

このぼけ復元アルゴリズムを若干変更することで、ぼけの復元と画像の拡大を同時に行うアルゴリズムが得られる。 $M \times N$  の画像を  $\alpha$  倍に拡大したいならば、 $\alpha M \times \alpha N$  の配列を作り、拡大したい画像を  $\alpha$  画素おきに配置し、他の作り出したい画素の値は 0 に初期化する。この配列に対してぼけ復元アルゴリズムを適用する。ただし、反復の度に  $L_iL_i$  にぼけ画像を代入する際には、既知の画素のみを拘束として代入し、作り出したい画素には何も行わない。

## 5. 提案手法とその性能評価

4章に述べた SI-HWT とその変換領域での Shrinkage によるぼけ復元・拡大法を、さらに TF-GT を用いるように変更する。具体的には、ステップ 1-1) で SI-HWT 係数  $L_iH_i, H_iL_i, H_iH_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) を Shrinkage するところを、これらにさらに TF-GT を施して得られた Grouplet 平均係数、差分係数に対して Shrinkage を適用して逆 TF-GT をするように変更する。その際の SI-HWT 係数に対する TF-GT の適用法は、3章で述べた方法に従って行う。

### 5.1 ぼけ復元法の性能評価

Kodak 標準カラー画像をテスト画像として用い、ぼけのモデルとして、3 階層でフィルタ間隔を階層 1 から順に 1, 1, 2 として構成された SI-HWT の Scaling 係数に対応する図 5 のぼけフィルタを採用した。TF-GT の Association Field の探索領域サイズは、 $\pm 4$ 、ブロックサイズは  $7 \times 7$  としている。アルゴリズムの反復回数  $k_{\max} = 300$  とし、また、

Shrinkage には Soft Shrinkage を使い, 反復パラメータ  $k$  における閾値  $Th^{(k)}$  を山田の強収束定理<sup>[5]</sup>に基づき

$$Th^{(k)} = \frac{k_{\max} - k}{k_{\max}}$$

と設定している. 図 6 にぼけ画像, 図 7 に SI-HWT による従来法の復元画像, 図 8 に TF-GT を導入した方法の復元画像を示した. 図 7 の従来法ではテクスチャに人工的なパターンが生じている. 一方, TF-GT を導入した図 8 ではそれが解消されている.

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

図 5 ぼけフィルタ



図 6 ぼけ画像



図 7 従来法によるぼけ復元画像



図 8 提案法によるぼけ復元画像

## 5.2 拡大法の性能評価

768×512 の Kodak 標準カラー画像をテスト画像として用いて 4 倍拡大を行った. ぼけのモデルは, 4 階層でフィルタ間隔を階層 1 から順に 1, 1, 2, 2 として構成した SI-HWT の Scaling 係数に対応した 7×7 のぼけフィルタを採用した. その他のパラメータ設定は, 5.1 と同じである. 図 9 に Nearest Neighbor 法による補間画像, 図 10 に Bi-cubic 法による補間画像, 図 11 に SI-HWT による従来法の拡大画像, 図 12 に TF-GT を導入した方法の拡大画像を示した.

## 6. むすび

SI-HWT 変換領域での Shrinkage によるぼけ復元・拡大法に TF-GT 法を導入することで, テクスチャに人工的なパターンが生じる問題が解消された.

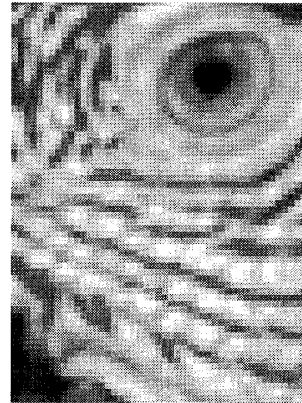


図 9 Nearest Neighbor 法

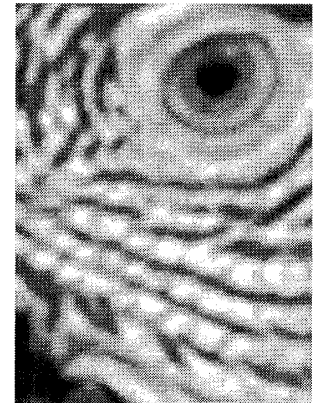


図 10 Bi-cubic 法



図 11 SI-HWT を用いた手法

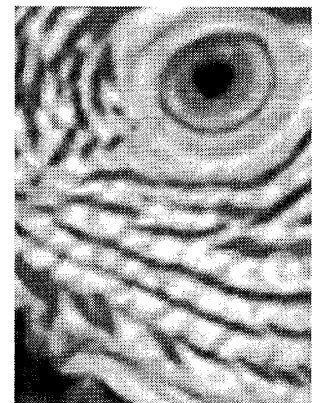


図 12 提案法

## 参考文献

- [1] S. Mallat, "Geometrical grouplets," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 26, no. 2, pp. 161-180, 2009.
- [2] 石川健一, 小松隆, 齊藤隆弘, "Hard Color-Shrinkage と Grouplet 変換を用いたカラー画像雑音除去," 電子情報通信学会 2010 年総大会, D-11-68, Mar. 2010.
- [3] 石川健一, 小松隆, 齊藤隆弘, "カラー画像雑音除去への応用のための Grouplet 変換の改良," 映像情報メディア学会 2010 年年次大会, Sep. 2010 (予定).
- [4] R. H. Chan, T. F. Chan, L. X. Shen, and Z. W. Shen, "Wavelet algorithms for high-resolution image reconstruction," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 24, no. 4, pp. 1408-1432, 2003.
- [5] I. Yamada, "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings," *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications*, vol. 8, pp. 473-504, 2001.