

## 非等方性カラーTVセミノルムを用いたカラー画像雑音除去 Color-Image denoising with anisotropic color total-variation semi-norm

高垣 陽介<sup>†</sup>  
Yousuke Takagaki

齊藤 隆弘<sup>†</sup>  
Takahiro Saito

小松 隆<sup>†</sup>  
Takashi Komatsu

### 1. まえがき

筆者らは、先に、三原色信号間の相互依存性をカラー画像処理に活用するため、カラー画像の全変動 (TV: Total Variation) セミノルムを、各原色信号のTVセミノルム・色差のTVセミノルム・色和のTVセミノルムの線形荷重和として定義し、これを正則化項として用いた変分問題としてカラー画像雑音除去問題を定式化し、雑音除去を効率的に実現できることを示した<sup>[1]</sup>。これまでは、個別に定義した等方性TVセミノルムの線形荷重和としてカラー画像のTVセミノルムを定義していたが、ここでは原色・色差・色和の水平・垂直・対角・反対角方向の勾配を全て考慮した36次元カラー勾配作用素を新たに定義し、これを用いて非等方性カラーTVセミノルムを定義している。さらにこの非等方性カラーTVセミノルムの双対定義を導入することで、非等方性全変動カラー画像雑音除去問題を定式化し、この問題の主-双対問題を射影勾配解法で解くことで、その最適解を容易に求めることができる。この非等方性全変動カラー画像雑音除去問題の射影勾配解法を、Euler-Lagrange方程式の直接解法と実験的に比較検討し、その有用性を実験的に明らかにする。

### 2. 四方向の勾配作用素と発散作用素

$n \times n$  のスカラー画像  $u$  の画素値  $u_{i,j}$  をラスタ走査して一列に書き並べた  $N (= n^2)$  次元ベクトルを  $\mathbf{y}$  と表記する。スカラー画像  $u$  の空間をスカラー画像場  $\mathbf{U}$  という。スカラー画像  $u$  の勾配  $\nabla u$  は一般に  $n \times n \times m$  のサイズの三次元配列  $\mathbf{w}$  となる。三次元配列  $\mathbf{w}$  の空間を勾配場  $\mathbf{W}$  という。ここで、 $m$  は勾配  $\nabla u$  の次元数である。各画素の  $m$  次元勾配  $\nabla u$  をラスタ走査して一列に書き並べた  $M (= m \times N)$  次元ベクトルを  $\mathbf{p}$  と表記する。

スカラー画像  $u$  の勾配作用素  $\nabla$  に対応し、勾配場  $\mathbf{W}$  の三次元配列  $\mathbf{w}$  に作用する発散作用素  $\text{div}$  が、勾配作用素  $\nabla$  の随伴作用素として次式で定義される<sup>[2]</sup>。

$$(\nabla u, \mathbf{w})_{\mathbf{w}} = (u, -\text{div } \mathbf{w})_{\mathbf{u}} \quad (1)$$

勾配作用素  $\nabla$  は、 $N$  次元ベクトル  $\mathbf{y}$  に作用させる  $M \times N$  の行列  $\mathbf{A}^T$  としても定義できる。次式の関係より、

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{y}, \mathbf{p})_{\mathbf{R}^M} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = (\mathbf{y}, \mathbf{A} \mathbf{p})_{\mathbf{R}^N} \quad (2)$$

発散作用素  $\text{div}$  は、 $M$  次元ベクトル  $\mathbf{p}$  に作用する  $N \times M$  の行列  $-\mathbf{A}$  としても定義できる。この関係より、勾配作用素  $\nabla$  に対応した発散作用素  $\text{div}$  の具体的表現が求まる<sup>[2],[3]</sup>。

スカラー画像  $u$  の基本的な勾配作用素である水平勾配作用素  $\nabla_H$ ・垂直勾配作用素  $\nabla_V$ ・対角勾配作用素  $\nabla_D$ ・反対角勾配作用素  $\nabla_A$  を、水平・垂直・対角・反対角方向の一階前進差分を用い、Neumann境界条件を考慮して、次式にて定義する<sup>[2],[4]</sup>。

$$[\nabla_H u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j}, & 1 \leq j \leq n-1 \\ 0, & j = n \end{cases} \quad (3)$$

$$[\nabla_V u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 0, & i = n \end{cases} \quad (4)$$

$$[\nabla_D u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i+1,j+1} - u_{i,j}, & 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } 1 \leq j \leq n-1 \\ 0, & i = n \text{ or } j = n \end{cases} \quad (5)$$

$$[\nabla_A u]_{i,j} := \begin{cases} u_{i+1,j-1} - u_{i,j}, & 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } 2 \leq j \leq n \\ 0, & i = n \text{ or } j = 1 \end{cases} \quad (6)$$

式(1)の関係から、水平・垂直・対角・反対角方向の発散作用素が次式にて一意に定まる。

$$[\text{div}_H \mathbf{w}]_{i,j} := \begin{cases} w_{i,j}, & j = 1 \\ -w_{i,j-1}, & j = n \\ w_{i,j} - w_{i,j-1}, & 2 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad (7)$$

$$[\text{div}_V \mathbf{w}]_{i,j} := \begin{cases} w_{i,j}, & i = 1 \\ -w_{i-1,j}, & i = n \\ w_{i,j} - w_{i-1,j}, & 2 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (8)$$

$$[\text{div}_D \mathbf{w}]_{i,j} := \begin{cases} 0, & (i,j) = (n,1) \text{ or } (1,n) \\ w_{i,j}, & \{(1,j); j=1,2,\dots,n-1\} \text{ or } \{(i,1); i=1,2,\dots,n-1\} \\ -w_{i-1,j-1}, & \{(n,j); j=2,3,\dots,n\} \text{ or } \{(i,n); i=2,3,\dots,n\} \\ w_{i,j} - w_{i-1,j-1}, & \{(i,j); i=2,3,\dots,n-1 \text{ and } j=2,3,\dots,n-1\} \end{cases} \quad (9)$$

$$[\text{div}_A \mathbf{w}]_{i,j} := \begin{cases} 0, & (i,j) = (1,1) \text{ or } (n,n) \\ w_{i,j}, & \{(1,j); j=2,3,\dots,n\} \text{ or } \{(i,n); i=1,2,\dots,n-1\} \\ -w_{i-1,j+1}, & \{(n,j); j=1,2,\dots,n-1\} \text{ or } \{(i,1); i=2,3,\dots,n\} \\ w_{i,j} - w_{i-1,j+1}, & \{(i,j); i=2,3,\dots,n-1 \text{ and } j=2,3,\dots,n-1\} \end{cases} \quad (10)$$

### 3. カラー画像の勾配と発散

$n \times n \times 3$  のカラー画像  $u$  の三原色値  $u_{i,j,k}$  をラスタ走査して一列に書き並べた  $3N (= 3n^2)$  次元ベクトルを  $\mathbf{y}$  と表記する。三次元配列  $u$  の空間をカラー画像場  $\mathbf{U}$  という。 $u_{i,j,1}$  をRed成分  $r_{i,j}$  に、 $u_{i,j,2}$  をGreen成分  $g_{i,j}$  に、 $u_{i,j,3}$  をBlue成分  $b_{i,j}$  に対応付ける。カラー画像  $u$  のカラー勾配  $\nabla_C u$  は、 $n \times n \times m$  の三次元配列  $\mathbf{w}$  となる。ここで、 $m$  はカラー勾配  $\nabla_C u$  の次元数であり、各原色成分の水平・垂直・対角・反対角勾配や、二原色間の色差と色和の水平・垂直・対角・反対角勾配を全て考慮した場合、次元数  $m$  は 36 となる。また、各原色成分・二原色間の色差と色和の水平・垂直勾配のみを考慮した場合は、次元数  $m$  は 18 となる<sup>[1]</sup>。各画素位置におけるカラー勾配  $\nabla_C u$  をラスタ走査して一列に書き並べた  $M (= m \times N)$  次元ベクトルを  $\mathbf{p}$  と表記する。三次元配列  $\mathbf{w}$  の空間をカラー勾配場  $\mathbf{W}$  という。このとき、カラー画像  $u$  のカラー勾配作用素  $\nabla_C$  に対応し、カラー勾配場  $\mathbf{W}$  の

<sup>†</sup> 神奈川大学, Kanagawa University

三次元配列  $w$  に対するカラー発散作用素  $\text{div}_C$  が、カラー勾配作用素  $\nabla_C$  の随伴作用素として定義される。

ここでは、36次元のカラー勾配  $\nabla_C$  を定義する。18次元のカラー勾配  $\nabla_C$  については文献[4]を参照のこと。まず、 $n \times n \times 3$  の三原色カラー画像  $u$  の  $l$  ( $l := (i-1)n + j$ ) 番目の画素位置  $(i, j)$  において、三原色・色差・色和の水平・垂直・対角・反対角勾配を重み付けて一列に書き並べ、36次元カラー勾配ベクトル  $\rho_l$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \rho_l := & \left( [\nabla_H r]_{i,j}, [\nabla_V r]_{i,j}, [\nabla_D r]_{i,j}, [\nabla_A r]_{i,j}, \right. \\ & [\nabla_H g]_{i,j}, [\nabla_V g]_{i,j}, [\nabla_D g]_{i,j}, [\nabla_A g]_{i,j}, \\ & [\nabla_H b]_{i,j}, [\nabla_V b]_{i,j}, [\nabla_D b]_{i,j}, [\nabla_A b]_{i,j}, \\ & \alpha [\nabla_H (r-g)]_{i,j}, \alpha [\nabla_V (r-g)]_{i,j}, \alpha [\nabla_D (r-g)]_{i,j}, \\ & \alpha [\nabla_A (r-g)]_{i,j}, \alpha [\nabla_H (g-b)]_{i,j}, \alpha [\nabla_V (g-b)]_{i,j}, \\ & \alpha [\nabla_D (g-b)]_{i,j}, \alpha [\nabla_A (g-b)]_{i,j}, \alpha [\nabla_H (b-r)]_{i,j}, \\ & \alpha [\nabla_V (b-r)]_{i,j}, \alpha [\nabla_D (b-r)]_{i,j}, \alpha [\nabla_A (b-r)]_{i,j}, \\ & \beta [\nabla_H (r+g)]_{i,j}, \beta [\nabla_V (r+g)]_{i,j}, \beta [\nabla_D (r+g)]_{i,j}, \\ & \beta [\nabla_A (r+g)]_{i,j}, \beta [\nabla_H (g+b)]_{i,j}, \beta [\nabla_V (g+b)]_{i,j}, \\ & \beta [\nabla_D (g+b)]_{i,j}, \beta [\nabla_A (g+b)]_{i,j}, \beta [\nabla_H (b+r)]_{i,j}, \\ & \left. \beta [\nabla_V (b+r)]_{i,j}, \beta [\nabla_D (b+r)]_{i,j}, \beta [\nabla_A (b+r)]_{i,j} \right)^T \\ = & \mathbf{A}_l^T \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{36}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

二つのパラメータ  $\{\alpha, \beta\}$  は非負の重み係数であり、通常は  $\alpha \geq \beta$  と設定する。行列  $\mathbf{A}_l$  は  $3N \times 36$  の行列であり、式(3)～式(6)の四方向の勾配作用素の定義より定まる。なお、カラー勾配ベクトル  $\rho_l$  を次式にて表記する。

$$\rho_l := (a_l^{(1)}, a_l^{(2)}, \dots, a_l^{(36)})^T \quad (12)$$

$\rho_l$  の各要素は、 $l$  ( $l := (i-1)n + j$ ) 番目の画素位置  $(i, j)$  における三原色・色差・色和の水平・垂直・対角・反対角勾配である。次に、全ての画素位置において求めた36次元勾配ベクトル  $\rho_l$  を一列に書き並べた  $M$  ( $M := 36N$ ) 次元のカラー勾配ベクトル  $\rho$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \rho := & (\rho_1^T, \rho_2^T, \dots, \rho_N^T)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{36N} = \mathbf{R}^M \\ \mathbf{A} := & (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N) \end{aligned} \quad (13)$$

カラー勾配ベクトル  $\rho$  は、カラー勾配  $\nabla_C u$  を  $n \times n \times 36$  の三次元配列として書き並べたカラー勾配配列  $w$  をラスタ走査し、一列に書き並べたベクトルである。また、 $3N \times M$  の行列  $\mathbf{A}$  を用い、 $M$  次元ベクトル  $\rho$  に対するカラー発散の演算が、 $-\mathbf{A} \rho$  と定義されるが、これは実際には  $n \times n \times 36$  の配列  $w$  に対する演算として構成される。ここで、 $n \times n \times 36$  の配列  $w$  を次式で表現する。

$$\begin{aligned} w := & \{w_{i,j,k} \mid i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; k=1, \dots, 36\} \\ := & \{a_{i,j}^{(k)} \mid i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; k=1, \dots, 36\} \end{aligned} \quad (14)$$

$a^{(k)}$  は、各画素位置において計算した36次元カラー勾配ベクトル  $\rho_l$  の  $k$  番目の要素を、画面全体で二次元配列として書き並べたものに相当する。このとき、カラー発散  $\text{div}_C w$  の演算は、次式の演算として定義される。

$$[\text{div}_C w]_{i,j} = \left( [\text{div}_C w]_{i,j,1}, [\text{div}_C w]_{i,j,2}, [\text{div}_C w]_{i,j,3} \right)^T \quad (15)$$

式(15)の右辺のベクトルの三つの要素は、画素位置  $(i, j)$  に

おける三原色信号  $\{r, g, b\}$  の各原色成分に対応した要素である。これらの三つの要素を計算するための具体的な演算公式は、配列  $w$  の式(14)の表記法の下で、以下に示した式(16)～式(18)の三つの演算公式として与えられる。

1) 赤色信号  $r$  を生成するカラー発散作用素  $\text{div}_C$  の演算

$$\begin{aligned} & [\text{div}_C w]_{i,j,1} \\ := & [\text{div}_H a^{(1)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(2)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(3)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(4)}]_{i,j} \\ & + \alpha \left\{ [\text{div}_H a^{(13)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(14)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(15)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(16)}]_{i,j} \right. \\ & \left. - [\text{div}_H a^{(21)}]_{i,j} - [\text{div}_V a^{(22)}]_{i,j} - [\text{div}_D a^{(23)}]_{i,j} - [\text{div}_A a^{(24)}]_{i,j} \right\} \\ & + \beta \left\{ [\text{div}_H a^{(25)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(26)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(27)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(28)}]_{i,j} \right. \\ & \left. + [\text{div}_H a^{(33)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(34)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(35)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(36)}]_{i,j} \right\} \\ & : (i, j, 1) \text{ is the pixel location } (i, j) \text{ of the red signal } r. \end{aligned} \quad (16)$$

2) 緑色信号  $g$  を生成するカラー発散作用素  $\text{div}_C$  の演算

$$\begin{aligned} & [\text{div}_C w]_{i,j,2} \\ := & [\text{div}_H a^{(5)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(6)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(7)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(8)}]_{i,j} \\ & + \alpha \left\{ [\text{div}_H a^{(17)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(18)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(19)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(20)}]_{i,j} \right. \\ & \left. - [\text{div}_H a^{(13)}]_{i,j} - [\text{div}_V a^{(14)}]_{i,j} - [\text{div}_D a^{(15)}]_{i,j} - [\text{div}_A a^{(16)}]_{i,j} \right\} \\ & + \beta \left\{ [\text{div}_H a^{(25)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(26)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(27)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(28)}]_{i,j} \right. \\ & \left. + [\text{div}_H a^{(29)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(30)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(31)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(32)}]_{i,j} \right\} \\ & : (i, j, 2) \text{ is the pixel location } (i, j) \text{ of the green signal } g. \end{aligned} \quad (17)$$

3) 青色信号  $b$  を生成するカラー発散作用素  $\text{div}_C$  の演算

$$\begin{aligned} & [\text{div}_C w]_{i,j,3} \\ := & [\text{div}_H a^{(9)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(10)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(11)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(12)}]_{i,j} \\ & + \alpha \left\{ [\text{div}_H a^{(21)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(22)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(23)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(24)}]_{i,j} \right. \\ & \left. - [\text{div}_H a^{(17)}]_{i,j} - [\text{div}_V a^{(18)}]_{i,j} - [\text{div}_D a^{(19)}]_{i,j} - [\text{div}_A a^{(20)}]_{i,j} \right\} \\ & + \beta \left\{ [\text{div}_H a^{(29)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(30)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(31)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(32)}]_{i,j} \right. \\ & \left. + [\text{div}_H a^{(33)}]_{i,j} + [\text{div}_V a^{(34)}]_{i,j} + [\text{div}_D a^{(35)}]_{i,j} + [\text{div}_A a^{(36)}]_{i,j} \right\} \\ & : (i, j, 3) \text{ is the pixel location } (i, j) \text{ of the blue signal } b. \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4. 非等方向性カラーTVセミノルム

三原色カラー画像  $u$  の非等方向性カラーTVセミノルム  $J_{AC}(u)$  を、3.で定義した  $M$  次元カラー勾配ベクトル  $\rho$  を用いて定義する。非等方向性カラーTVセミノルム  $J_{AC}(u)$  は、各画素位置で式(11)で定義されたカラー勾配ベクトル  $\rho_l$  の  $l^1$  ノルムを、カラー画像内で全て加算することで、

$$J_{AC}(u) := \sum_{l=1}^N \|\rho_l\|_1 = \sum_{l=1}^N \|\mathbf{A}_l^T \mathbf{y}\|_1 \quad (19)$$

と定義される。さらに、 $l^1$  ノルムの定義および式(13)のカラー勾配ベクトル  $\rho$  の定義より明らかに、次式が成立する。

$$J_{AC}(u) := \sum_{l=1}^N \|\rho_l\|_1 = \|\rho\|_1 := \|\mathbf{A}^T \mathbf{y}\|_1 \quad (20)$$

ここで、 $M$  次元の双対変数ベクトル  $\mathbf{x}$  を導入し、さらに双対変数ベクトル  $\mathbf{x}$  に関する制約条件に対応した空間  $\mathbf{X}_\omega$  を

$$X_\infty := \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{18N} = \mathbf{R}^M \} \quad (21)$$

と定義すると、非等方性カラーTVセミノルム  $J_{AC}(u)$  の次式の双対定義が得られる。

$$J_{AC}(u) = \max_{\mathbf{x} \in X_\infty} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in X_\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (22)$$

空間  $X_\infty$  は  $M$  次元線形空間  $\mathbf{R}^M$  の原点を中心とした  $M$  次元単位  $l^\infty$  超球であり、閉凸であるので、 $M$  次元ベクトル  $\mathbf{x}$  の閉凸空間  $X_\infty$  上への凸射影は、 $\mathbf{x}$  の各要素  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) に、次式のClipping演算を適用することで計算される。

$$[P_{X_\infty}(\mathbf{x})]_i = \text{Clip}(x_i) := \begin{cases} \text{sgn}(x_i), & |x_i| \geq 1 \\ x_i, & |x_i| < 1 \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (23)$$

### 5. 非等方性全変動カラー画像雑音除去問題とその解法

4.で述べた非等方性カラーTVセミノルムを用いた非等方性全変動カラー画像雑音除去問題の二つの解法について述べる。非等方性全変動カラー画像雑音除去問題は、次式の最適化問題として定式化される。

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} E(\mathbf{y}) := J_{AC}(u) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2, \quad \lambda > 0 \quad (24)$$

$\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{3N}$ : Input image vector,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}$ : Output image vector  
 $u \in \mathbf{U}$ : Output image array

#### 5.1 Euler-Lagrange方程式の直接解法

式(24)のEuler-Lagrange方程式は、非等方性カラーTVセミノルム  $J_{AC}(u)$  の劣勾配を  $\partial J_{AC}(u)$  とすると、

$$\partial J_{AC}(u) + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = 0 \quad (25)$$

となる。このEuler-Lagrange方程式を、Time-Marching法によって反復的に解く。すなわち、初期画像  $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{z}$  から出発し、次式にて反復更新を行い、

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} - \varepsilon \left[ \partial J_{AC}(u) + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \right]_{i,j}^{(k)} \quad (26)$$

その定常解として式(25)のEuler-Lagrange方程式の解を求めるものである。なお、 $u^{(k)}$  は  $k$  回目の反復更新画像、 $\varepsilon$  は更新ステップサイズパラメータであり、 $k \rightarrow \infty$  で  $u^{(k)}$  が定常解に収束することを保証するため、十分小さな正の実数に設定する必要がある。

#### 5.2 射影勾配解法

式(24)の全変動カラー画像雑音除去問題に、カラーTVセミノルムの双対定義を導入すると、次式の主-双対問題<sup>[3]</sup>が定式化される。

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \max_{\mathbf{x} \in X_\infty} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{B} \mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2, \quad \lambda > 0 \quad (27)$$

$\mathbf{x}$  は  $M$  次元の双対変数ベクトルである。この問題の解法として、次式の射影勾配解法が導出される<sup>[4]</sup>。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P_{X_\infty} \left( \mathbf{x}^{(k)} + 2\varepsilon \lambda \mathbf{A}^T \left( \mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \right) \right) \quad (28)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \quad (29)$$

ここで、 $P_{X_\infty}$  は閉凸空間  $X_\infty$  上への凸射影、 $\mathbf{x}^{(k)}$  は双対変数ベクトルの  $k$  回目の更新ベクトル、 $\varepsilon$  はステップサイズパラメータであり、反復更新が収束するための“ステップサイ

ズパラメータ  $\varepsilon$  の値に関する十分条件”は、

$$\varepsilon \in \left( 0, \frac{1}{32(1+4\alpha^2+4\beta^2)} \right] \quad (30)$$

で与えられる。式(28)と式(29)において、 $\mathbf{z} \rightarrow f$  (入力カラー画像)、 $\mathbf{x} \rightarrow w$  (双対変数配列)、 $\mathbf{A}^T \mathbf{z} \rightarrow \nabla_C f$  (カラー勾配)、 $-\mathbf{A} \mathbf{x} \rightarrow \text{div}_C w$  (カラー発散)と置き換えると、画像に対する演算として表現された次式を得る。

$$w^{(k+1)} = P_{X_\infty} \left( w^{(k)} + 2\varepsilon \lambda \nabla_C \left( f + \frac{1}{\lambda} \text{div}_C w^{(k)} \right) \right) \quad (31)$$

$$u^{(k+1)} = f + \frac{1}{\lambda} \text{div}_C w^{(k+1)} \quad (32)$$

なお、実際の反復更新では、最近A. BeckとM. Teboulleによって考案された“射影勾配解法の反復更新を高速化する手法”を用いている<sup>[5]</sup>。

### 6. カラー画像雑音除去性能の評価

Kodakの標準カラー画像を原画像とし、これに白色ガウス性雑音を付加したものをテスト画像として用いた。雑音の標準偏差  $\sigma$  は 10, 15, 20 の三種類とした。二方向と四方向の非等方性カラーTVセミノルムを用いた場合について、直接解法と射影勾配解法による雑音除去画像を比較した。表1には、原画像とのPSNRを示した。なお、反復回数は、ほぼ収束した回数に設定した。二方向の直接解法で1200回、射影勾配解法で50回、四方向の直接解法で600回、射影勾配解法で40回とした。また、表2には、使用したパラメータ値を示した。なお、直接解法のステップサイズパラメータ  $\varepsilon$  は 0.01 とした。

表1 PSNR [dB] による評価

(a) 二方向の非等方性カラーTVセミノルムを用いた場合

$\sigma$	雑音付加画像	直接解法	射影勾配解法
10	28.19	36.79	36.77
15	24.71	34.62	34.64
20	22.25	33.00	33.19

(b) 四方向の非等方性カラーTVセミノルムを用いた場合

$\sigma$	雑音付加画像	直接解法	射影勾配解法
10	28.19	36.67	36.65
15	24.71	34.50	34.50
20	22.25	32.91	33.05

表2 パラメータ値

(a) 二方向の非等方性カラーTVセミノルム

$\sigma$	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$
10	0.38	1.18	0.00
15	0.22	1.03	0.00
20	0.15	0.97	0.00

(b) 四方向の非等方性カラーTVセミノルム

$\sigma$	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$
10	0.83	1.15	0.00
15	0.50	1.02	0.00
20	0.34	0.91	0.00

PSNRの観点からは、雑音の標準偏差が大きくなるにつれ、二方向、四方向の両方で、射影勾配解法が直接解法に比べ良好な結果となっている。各反復更新における雑音除去画像のPSNRを図1と図2に比較して示したが、雑音の

標準偏差が大きくなるにつれ、直接解法の収束特性が悪化することに起因している。また、二方向と四方向とでは、雑音の標準偏差によらず、どちらの解法でも二方向の方が約0.1[dB]良好な結果が得られた。

図3に原画像を、図4に雑音の標準偏差 $\sigma=20$ のテスト画像を、図5と図6に雑音除去画像を比較して示した。図5(a)と図6(a)、及び図5(b)と図6(b)を比較すると、同じ傾向の雑音除去画像が得られていることが分かる。表1及び図5と図6の結果から、直接解法と射影勾配解法とでは、ほぼ同じ解へと収束していることが分かる。また、図5(a)と図5(b)、及び図6(a)と図6(b)を比較すると、二方向の非等方性TVセミノルムを用いた場合、四方向の場合に比較し、斜めのライン付近でジャギが目立つ処理結果となっている。一方、四方向の処理画像では、二方向の処理画像では鮮明だった水平や垂直方向のエッジがやや凸凹した印象のものとなる傾向が見られる。

### 7. むすび

本研究では、原色・色差・色和の水平・垂直・対角・反対角方向の勾配を全て考慮した36次元カラー勾配作用素を用いて非等方性カラーTVセミノルムを定義し、このセミノルムの双対定義を用いて非等方性全変動カラー画像雑音除去問題を定式化し、この問題の最適解を主-双対問題を射影勾配解法で解くことで求めた。この射影勾配解法を、Euler-Lagrange方程式の直接解法と実験的に比較検討し、射影勾配解法がより優れた収束特性を有することを明らかにした。

今後、他の形式のカラーTVセミノルムを用いた全変動カラー画像雑音除去問題や、全変動カラー画像復元問題について実験的に検討を加える必要がある。

### 参考文献

- [1]小松 隆, 齊藤 隆弘, “色差と色和のTVを用いたカラー画像雑音除去法”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J91-D, No.8, pp.2002-2004 (2008).
- [2]A. Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications”, J. Math. Imaging Vision, Vol.21, No.1-2, pp.89-97 (2004).
- [3]T. F. Chan, G. H. Golub, P. Mulet, “A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration”, SIAM J. Sci. Comput., Vol.20, No.6, pp.1964-1977 (1999).
- [4]齊藤隆弘, 高垣陽介, 小松 隆, “全変動カラー画像復元問題とその近接勾配解法”, FIT 2010, 4J-1 (2010).
- [5]A. Beck and M. Teboulle, “Gradient-Based Algorithms with Applications to Signal Recovery Problems, in Convex Optimization in Signal Processing and Communications, D.P. Palomar and Y.C. Eldar (Eds.)”, pp.42-88, Cambridge Univ. Press, U.K., Dec. 2009.



図3 原画像



図4 雑音付加画像 ( $\sigma=20$ )



(a) 二方向



(b) 四方向

図5 直接解法による雑音除去画像 ( $\sigma=20$ )



(a) 二方向



(b) 四方向

図6 射影勾配解法による雑音除去画像 ( $\sigma=20$ )

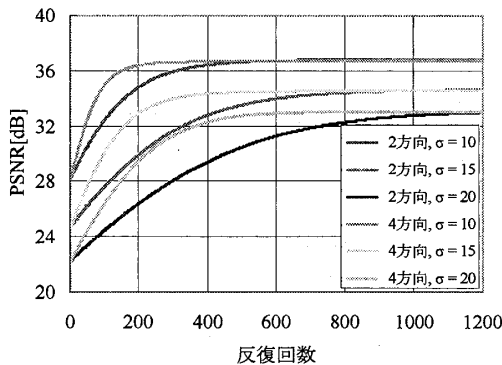


図1 直接解法の収束特性

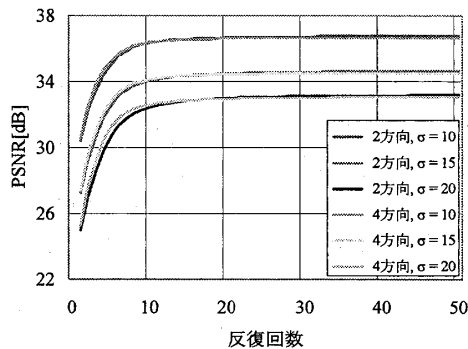


図2 射影勾配解法の収束特性